UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Lista de exercícios - Otimização II
Professor : Luiz Carlos Matioli

1. Considere o problema

$$(P) \qquad \begin{array}{rc} \text{minimizar} & f(x_1,x_2) = e^{3x_1+4x_2} \\ \text{sujeito a} & h(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \end{array}$$

   (a) Encontre a solução de (P) utilizando KKT

   (b) Escreva a função lagrangeano aumentado, para o problema (P), utilizando a penalidade quadrática.

   (c) Utilizando o método de Newton "puro" (sem busca) faça 2 iterações do algoritmo de lagrangeano aumentado aplicado ao problema (P) com penalidade quadrática.

2. Considere o problema unidimensional

$$(P1) \qquad \begin{array}{rl} \text{minimizar} & -\frac{1}{2}x^2 \\ \text{sujeito a} & x = 1 \end{array}$$

   (a) Verifique que a solução de (P1) é $\bar{x} = 1$ e $\bar{\lambda} = -1$.

   (b) Mostre que se $\rho < 1$ com λ e ρ finitos, então a função lagrangeano aumentado associada ao problema (P1) com penalidade quadrática é ilimitada por baixo. (Nota: ρ é o parâmetro de penalidade).

   (c) Mostre que se $\rho > 1$ então a função lagrangeano aumentado é estritamente convexa quando considerada como função de x e então tem um único minimizador.

   (d) O que acontece quando $\rho = 1$?

   (e) Faça algumas iterações do algoritmo de lagrangenao aumentado aplicado ao problema (P1) com penalidade quadrática, se necessário utilize $\lambda^0 = 0$ e $\rho^0 = 2$. Sugestão: utilize o procedimento visto em sala - através de derivada encontre x^{k+1} em função do multiplicador e do parâmetro de penalidade. Não deixe o valor de ρ ficar menor que 1.

3. Considere o problema quadrático

$$(P2) \qquad \begin{array}{rc} \text{minimizar} & \frac{1}{2}x^tQx + \theta b^T x \\ \text{sujeito a} & b^T x = 0 \end{array}$$

   em que Q é uma matriz simétrica e não singular e positiva definida sobre o subespaço $b^T x = 0$. O vetor $b \neq 0$ e o escalar $\theta > 0$ são dados.

   (a) Qual é a solução ótima desse problema? Qual é o multiplicador de Lagrange ótimo correspondente?

   (b) Escreva a função lagrangeano aumentado associada ao problema (P2) com penalidade quadrática.

(c) Mostre que os valores que x^{k+1} e de λ^{k+1} no algoritmo de lagrangenao aumentado aplicado ao problema (P2) com penaliade quadrática são da forma:

$$x^{k+1} = \frac{(\lambda^k - \theta)Q^{-1}b}{1 + \rho^k b^T Q^{-1} b} \text{ e } \lambda^{k+1} = \lambda^k - \frac{\rho^k \lambda^k Q^{-1}b - \rho^k \theta Q^{-1} b}{1 + \rho^k b^T Q^{-1} b}$$

Observe o que acontece quando $\lambda^k = \theta$ nas expressões acima. Isto deveria ter acontecido também no item (a) deste exercício.

4. Considere o problema quadrático

$$(P3) \qquad \begin{array}{lc} \text{minimizar} & 5x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + 3x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeito a} & 3x_1 + 2x_2 = 0 \end{array}$$

(a) Escreva o problema (P3) na forma matricial do problema (P2).

(b) Mostre que a hessianda da função objetivo é positiva definida.

(c) Sabendo que $\lambda^0 = 1$, determine a solução do problema (P3).

(d) Partindo de $\lambda^0 = -1$ e $\rho^0 = 2$. Faça uma iteração do Algoritmo de Lagrangeano aumentado, aplicado ao problema (P3) com penalidade quadrática.

5. Encontre a solução de mínimos quadrados do sistema linear inconsistente

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ & & & & x_3 & = & 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & & & + & 5x_3 & = & 8 \\ -7x_1 & + & 8x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1. \end{array}$$

6. Considere o problema

$$(P4) \qquad \begin{array}{lc} \text{minimizar} & e^{3x_1+4x_2} \\ \text{sujeito a} & x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0 \end{array}$$

(a) Econtre a(s) solução(ões) de (P4) por KKT.

(b) Escreva a função lagrangeano aumentado associada ao problema (P4), utilizando a MET.1 e θ a função a exponencial.

(c) Escreva a função lagrangeano aumentado associada ao problema (P4), utilizando a MET.2 e θ a função logaritmica.

(d) Faça, se possível, uma iteração do algoritmo de lagrangenao aumentado aplicado ao problema (P4) com MET.1 e θ a função exponencial. Utilize o método de Newton sem busca para encontrar o minimizador da função lagrangeano aumentada irrestrita. Se necessário utilize $x^0 = (0,0)^T$, $\mu^0 = 1$ (μ é o multiplicador de Lagrange) e o parâmetro de penalidade $r^0 = 1$.