UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Departamento de Matemática

Avaliação Final de Cálculo IV - Turma A - 11 de Dezembro de 2018

1. Dadas a função $f(z) = \dfrac{2}{(2z-1)(z-2i)}$ e a curva $\Gamma(t) = 1 + \cos t + 2i \operatorname{sen} t$, com $0 \leq t \leq 2\pi$, calcule $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz$. **(20 pontos)**

   Solução: Nota-se que $\Gamma(t) = x(t) + i\,y(t) = (1 + \cos t) + i2 \operatorname{sen} t$, para $t \in [0, 2\pi]$; logo, Γ é a elipse de equação $(x-1)^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$. Além disso, como $f(z) = \dfrac{1}{(z-\frac{1}{2})(z-2i)}$, vê-se que $z_0 = \dfrac{1}{2}$ e $z_1 = 2i$ são os pólos de f; portanto, z_0 é o único pólo de f que está no interior da região limitada por Γ. Daí, utilizando-se a *Fórmula Integral de Cauchy*, segue que:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma \frac{2}{(2z-1)(z-2i)}\,dz = \int_\Gamma \frac{1}{(z-\frac{1}{2})(z-2i)}\,dz = \int_\Gamma \frac{\frac{1}{z-2i}}{z-\frac{1}{2}}\,dz$$

$$= 2\pi i \left[\frac{1}{z-2i}\right]_{z=\frac{1}{2}} = 2\pi i \frac{1}{\frac{1}{2}-2i} = \frac{4\pi i}{1-4i}.$$

2. Dada a função $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z-i)}$, determine sua série de *Taylor* em torno de $z_0 = 2$ e o raio de convergência da mesma. **(20 pontos)**

   Solução: Pela expressão de f, sugere-se usar o método das frações parciais; mais precisamente, deve-se fazer:

$$f(z) = \frac{a}{(z-1)^2} + \frac{b}{z-1} + \frac{c}{z-i} = \frac{a(z-i) + b(z-1)(z-i) + c(z-1)^2}{(z-1)^2(z-i)}$$

$$= \frac{(b+c)z^2 + (a - b(1+i) - 2c)z - i\,a + i\,b + c}{(z-1)^2(z-i)} = \frac{0 \cdot z^2 + 0 \cdot z + 1}{(z-1)^2(z-i)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 0 \Rightarrow c = -b \Rightarrow c = \frac{i}{2} \\ a - b(1+i) - 2c = 0 \Rightarrow a = b(1+i) + 2c = b(1+i) - 2b = b(i-1) \Rightarrow a = -\frac{i}{2}(i-1) = \frac{1+i}{2} \\ -i\,a + i\,b + c = 1 \Rightarrow -ib(i-1) + i\,b - b = 1 \Rightarrow b + i\,b + i\,b - b = 1 \Rightarrow 2i\,b = 1 \Rightarrow b = -\frac{i}{2} \end{cases}$$

   Logo, tem-se que:

$$f(z) = \frac{1+i}{2} \cdot \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{i}{2} \cdot \frac{1}{z-1} + \frac{i}{2} \cdot \frac{1}{z-i} = \frac{1+i}{2} \cdot g(z) - \frac{i}{2} \cdot h(z) + \frac{i}{2} \cdot j(z).$$

   Daí, segue que:

$$g^{(0)}(z) = (z-1)^{-2} \;\Rightarrow\; g^{(1)}(z) = -2 \cdot (z-1)^{-3} \;\Rightarrow\; g^{(2)}(z) = 2 \cdot 3 \cdot (z-1)^{-4}$$

$$\Rightarrow\; \cdots \;\Rightarrow g^{(n)}(z) = (-1)^n (n+1)! \cdot (z-1)^{-(n+2)}, \qquad \text{para} \qquad n = 0, 1, \cdots.$$

$$\Rightarrow\; a_n = \frac{g^{(n)}(2)}{n!} = \frac{(-1)^n(n+1)!}{n!} = (-1)^n(n+1), \qquad \text{para} \qquad n = 0, 1, \cdots.$$

   Portanto, o desenvolvimento em série de *Taylor* de $g(z)$ em torno de $z_0 = 2$ será:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1)\,(z-2)^n,$$

   válida no disco $D(2; R)$, onde o raio de convergência R é dado por:

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = 1.$$

Para $h(z)$, tem-se que:

$$h(z) = \frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z-2)+1} = \frac{1}{1-[-(z-2)]} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-2)^n,$$

válida para $|z-2|<1$. Por sua vez, para $j(z)$, tem-se que:

$$j(z) = \frac{1}{z-i} = \frac{1}{(z-2)+(2-i)} = \frac{1}{2-i}\cdot\frac{1}{1-[-\frac{z-2}{2-i}]}$$

$$= \frac{1}{2-i}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2-i)^n}(z-2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2-i)^{n+1}}(z-2)^n,$$

válida para $\left|\dfrac{z-2}{2-i}\right| < 1$, ou seja, para $|z-2| < |2-i| = \sqrt{5}$. Portanto, o desenvolvimento em série de *Taylor* de f em $z_0 = 2$ será:

$$f(z) = \frac{1+i}{2}\cdot g(z) - \frac{i}{2}\cdot h(z) + \frac{i}{2}\cdot j(z)$$

$$= \frac{1+i}{2}\left\{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+1)\,(z-2)^n\right\} - \frac{i}{2}\left\{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-2)^n\right\} + \frac{i}{2}\left\{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2-i)^{n+1}}(z-2)^n\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2}\left\{(1+i)(n+1) - i + \frac{i}{(2-i)^{n+1}}\right\}(z-2)^n,$$

válido para $|z-2|<1$.

3. Dada $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z-i)}$, determine todas as possíveis séries de *Laurent* de f, com centro em $z_0 = 1$. (**20 pontos**)

Solução: Observa-se inicialmente, que as duas possíveis regiões para cálculo da série de *Laurent* de f são $[D(1;1)-\{1\}]$ e a coroa $\{z\in\mathbb{C}; |z-1|>\sqrt{2}\}$. Também vê-se que o termo $\dfrac{1}{(z-1)^2}$ já é a sua própria série de *Laurent* na região $|z-1|>0$; além disso, o termo $\dfrac{1}{z-i}$ é analítico em $z_0 = 1$ e então, sua série de *Laurent* será sua série de *Taylor* em algum disco $D(1;R)$ (com $R>0$ a ser determinado). Daí, segue que:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{(z-i)} = \frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{(z-1)+(1-i)} = \frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{1-i}\cdot\frac{1}{1-[-\frac{(z-1)}{1-i}]}$$

$$= \frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{1-i}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1-i)^n}\,(z-1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1-i)^{n+1}}\,(z-1)^{n-2},$$

série válida para $0 < \left|\dfrac{z-1}{1-i}\right| < 1$, ou seja, para $0<|z-1|<|1-i| = \sqrt{2}$ $(= R)$.

Na coroa $|z-1|>\sqrt{2}$, tem-se que:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{(z-i)} = \frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{(z-1)+(1-i)} = \frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-[-\frac{1-i}{(z-1)}]}$$

$$= \frac{1}{(z-1)^3}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(1-i)^n}{(z-1)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(i-1)^n}{(z-1)^{n+3}},$$

série válida para $\left|\dfrac{1-i}{z-1}\right| < 1$, ou seja, para $|z-1|>|1-i| = \sqrt{2}$.

4. Dada $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z-i)}$, determine o resíduo de f em cada um dos seus pólos. (**20 pontos**)

Solução: Vê-se que

$$f(z) = \frac{\frac{1}{z-i}}{(z-1)^2} = \frac{g(z)}{(z-1)^2}, \qquad \text{e também}, \qquad f(z) = \frac{\frac{1}{(z-1)^2}}{z-i} = \frac{h(z)}{z-i}.$$

Como $z_0 = 1$ não é zero de $g(z)$, tem-se que z_0 é pólo de ordem 2 de f e, como $z_1 = i$ não é zero de $h(z)$, tem-se que z_1 é pólo de ordem 1 de f . Daí, utilizando-se a *Fórmula dos Resíduos* obtem-se que:

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left\{(z-1)^2 \cdot f(z)\right\} = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{z-i}\right\} = -\lim_{z\to 1}\frac{1}{(z-i)^2} = -\frac{1}{(1-i)^2};$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i}\{(z-i)\cdot f(z)\} = \lim_{z\to i}\frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{(i-1)^2}.$$

5. Determine a série de *Fourier* de f_P, a extensão par ao intervalo $[-2,2]$, da função f definida por $f(x) = x$, se $x \in [0,1)$ e $f(x) = 2-x$, se $x \in [1,2]$. (**20 pontos**)

Solução: Dado que f_P é função par, tem-se que sua série de *Fourier* é uma série de cossenos ($b_n = 0$, para $n = 0, 1, \cdots$). Portanto, deve-se ter:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f_P(x)\,dx = \frac{2}{2}\int_0^2 f_P(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{1}{2} + \left[(4-2) - (\frac{4}{2} - \frac{1}{2})\right] = 1;$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f_P(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{2}{2}\int_0^2 f_P(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx =$$

$$= \int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_1^2 2\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx - \int_1^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = (I) + (II) - (III).$$

Segue-se que:

$$(I) = \frac{2}{n\pi}x\,\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 (-\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2})\,dx = \frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{(n\pi)^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^1$$

$$= \frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{(n\pi)^2}\left[\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right];$$

$$(II) = 2\int_1^2 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{4}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}\bigg|_1^2 = -\frac{4}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2};$$

$$(III) = \frac{2}{n\pi}x\,\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}\bigg|_1^2 + \frac{2}{n\pi}\int_1^2(-\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2})\,dx = -\frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{(n\pi)^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_1^2$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{(n\pi)^2}[\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n].$$

Logo, segue que:

$$a_n = (I) + (II) - (III) = \left\{\frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{(n\pi)^2}\left[\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right]\right\} + \left\{-\frac{4}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\right\}$$

$$+\left\{\frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{(n\pi)^2}[\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n]\right\} = \frac{4}{(n\pi)^2}[2\cos\frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n].$$

Nota-se que

$$a_{2n-1} = \frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}[2 \cos \frac{(2n-1)\pi}{2} - 1 - (-1)^{2n-1}] = \frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}[2 \cdot 0 + 0] = 0,$$

$$\text{e} \quad a_{2n} = \frac{4}{(2n)^2\pi^2}[2 \cos \frac{2n\pi}{2} - 1 - (-1)^{2n}] = \frac{4}{(2n)^2\pi^2}[2 \cos \frac{2n\pi}{2} - 1 - (-1)^{2n}]$$

$$= \frac{1}{n^2\pi^2}[2 \cos n\pi - 2] = \frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1], \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \cdots ;$$

mais ainda,

$$a_{4n} = a_{2(2n)} = \frac{2}{(2n)^2\pi^2}[(-1)^{2n} - 1] = 0 \quad \text{e}$$

$$a_{4n-2} = a_{2(2n-1)} = \frac{2}{(2n-1)^2\pi^2}[(-1)^{2n-1} - 1] = -\frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}, \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \cdots .$$

Logo, os coeficientes não-nulos obtidos são a_0 e a_{4n-2}, para $n = 1, 2, \cdots$; portanto, a série procurada é:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{4n-2} \cos \frac{(4n-2)\pi x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos (2n-1)\pi x.$$

6. Determinar uma função $u : [0, +\infty) \times [0, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ tal que:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) = 0, & \text{para } (t,x) \in [0,+\infty) \times [0,3]; \\ u(t,0) = 0 = u(t,3), & \text{para } t \in [0,+\infty); \\ u(0,x) = x, \ \ u_t(0,x) = 0, \text{para } x \in [0,3]. \end{cases}$$

Solução: Sabe-se, pela natureza do problema, que a solução $u(t,x)$ é dada na forma:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty}[A_n \cos \frac{n\pi t}{3} + B_n \text{ sen } \frac{n\pi t}{3}] \text{ sen } \frac{n\pi x}{3}.$$

Daí, vê-se que:

$$u(0,x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \text{ sen } \frac{n\pi x}{3} = x,$$

ou seja, o coeficiente A_n deve ser escolhido de modo que coincida com o n-ésimo coeficiente da série de *Fourier* de $j_I(x)$, a extensão ímpar da função $j(x) = x$, ao intervalo $[-3, 3]$; além disso, deve-se ter também:

$$u_t(0,x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty}[-\frac{n\pi}{3}A_n \text{ sen } 0 + \frac{n\pi}{3}B_n \cos 0] \text{ sen } \frac{n\pi x}{3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\pi}{3}B_n \text{ sen } \frac{n\pi x}{3} = 0,$$

ou seja, deve-se escolher $B_n = 0$, para $n = 1, 2, \cdots$. Sendo assim, deve-se ter:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos \frac{n\pi t}{3} \text{ sen } \frac{n\pi x}{3}.$$

Segue-se que;

$$A_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} j_I(x) \text{ sen } \frac{n\pi x}{3}\, dx = \frac{2}{3}\int_0^3 j_I(x) \text{ sen } \frac{n\pi x}{3}\, dx = \frac{2}{3}\int_0^3 j(x) \text{ sen } \frac{n\pi x}{3}\, dx = \frac{2}{3}\int_0^3 x \text{ sen } \frac{n\pi x}{3}\, dx$$

$$= \frac{2}{3}\left[-\frac{3}{n\pi}x \cos \frac{n\pi x}{3}\Big|_0^3 + \frac{3}{n\pi}\int_0^3 \cos \frac{n\pi x}{3}\, dx \right] = \frac{2}{3}\left[-\frac{9}{n\pi}(-1)^n + \frac{9}{(n\pi)^2} \text{ sen } \frac{n\pi x}{3}\Big|_0^3 \right] = \frac{6(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Conclui-se que:

$$u(t,x) = \frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos \frac{n\pi t}{3} \text{ sen } \frac{n\pi x}{3}.$$