UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Departamento de Matemática

Gabarito da Avaliação Final de Cálculo IV - Turma B - 11 de Dezembro de 2018

1. Dadas a função $f(z) = \dfrac{4}{(2z-3)^2(z-i)}$ e a curva $\Gamma(t) = 1+\cos t + 2i \operatorname{sen} t$, com $0 \leq t \leq 2\pi$, calcule $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz$. (**20 pontos**)

Solução: Nota-se que $\Gamma(t) = x(t) + i\,y(t) = (1+\cos t) + i2 \operatorname{sen} t$, para $t \in [0, 2\pi]$; logo, Γ é a elipse de equação $(x-1)^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$. Além disso, $z_0 = \dfrac{3}{2}$ e $z_1 = i$ são os pólos de f; portanto, apenas z_0 está no interior da região limitada por Γ. Daí, utilizando-se a *Fórmula Integral de Cauchy para Derivadas*, segue que:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma \frac{4}{(2z-3)^2(z-i)}\,dz = \int_\Gamma \frac{1}{(z-\frac{3}{2})^2(z-i)}\,dz = \int_\Gamma \frac{\frac{1}{z-i}}{(z-\frac{3}{2})^2}\,dz$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{z-i}\right\}_{z=\frac{3}{2}} = 2\pi i\left\{-\frac{1}{(z-i)^2}\right\}_{z=\frac{3}{2}} = -\frac{8\pi i}{(3-2i)^2}.$$

2. Dada a função $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z-2)}$, determine sua série de *Taylor* em torno de $z_0 = i$ e o raio de convergência da mesma. (**20 pontos**)

Solução: A expressão de f sugere que se decomponha tal função em frações parciais; mais precisamente, deve-se determinar $a, b, c \in \mathbb{C}$ tais que:

$$f(z) = \frac{a}{(z-1)^2} + \frac{b}{z-1} + \frac{c}{z-2} = \frac{a(z-2) + b(z-1)(z-2) + c(z-1)^2}{(z-1)^2(z-2)} =$$

$$\frac{(b+c)z^2 + (a-3b-2c)z - 2a + 2b + c}{(z-1)^2(z-2)} = \frac{0\cdot z^2 + 0\cdot z + 1}{(z-1)^2(z-2)}.$$

Portanto, deve-se ter:

$$\begin{cases} b+c=0 \Rightarrow c=-b \Rightarrow \\ a-3b-2c=0 \Rightarrow a=3b+2c \Rightarrow a=b \\ -2a+2b+c=1 \Rightarrow c=1 \Rightarrow b=-1 \Rightarrow a=-1 \end{cases} \Rightarrow \quad f(z) = -\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}.$$

Sejam $g(z) = -\dfrac{1}{(z-1)^2}$, $h(z) = -\dfrac{1}{z-1}$ e $j(z) = \dfrac{1}{z-2}$, e calculemos a série de *Taylor* de cada uma destas funções em z_0.

$$\begin{array}{lll} g^{(0)}(z) = -(z-1)^{-2}; & & g^{(1)}(z) = 2(z-1)^{-3} \\ g^{(2)}(z) = -2\cdot 3\cdot (z-1)^{-4}; & \cdots & g^{(n)}(z) = (-1)^{n+1}(n+1)!(z-1)^{-(n+2)},\ \text{para } n = 0, 1, \cdots \end{array}$$

Portanto, o coeficiente a_n da série de *Taylor* de g é dado por $a_n = \dfrac{g^{(n)}(i)}{n!} = \dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)}{(i-1)^{n+2}}$ e assim,

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{(i-1)^{n+2}}\,(z-i)^n,$$

série válida para $|z-i| < R$, onde o raio de convergência R é dado por:

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left\{\frac{n+1}{|i-1|^{n+2}} \cdot \frac{|i-1|^{n+3}}{n+3}\right\} = |i-1| \cdot \lim_{n\to+\infty}\frac{n+3}{n+2} = |i-1|\cdot 1 = \sqrt{2}.$$

Para $h(z)$, tem-se que:

$$h(z) = -\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-i)-(z-i)} = \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-i}{1-i}}$$

$$= \frac{1}{1-i} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1-i)^n} (z-i)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1-i)^{n+1}} (z-i)^n,$$

válida para $\left|\dfrac{z-i}{1-i}\right| < 1$, ou seja, para $|z-i| < \sqrt{2}$.

Por sua vez, para $j(z)$ tem-se que:

$$j(z) = \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2-z} = -\frac{1}{(2-i)-(z-i)} = -\frac{1}{2-i} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-i}{2-i}} =$$

$$-\frac{1}{2-i} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2-i)^n} (z-i)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2-i)^{n+1}} (z-i)^n,$$

válida para $\left|\dfrac{z-i}{2-i}\right| < 1$, ou seja, para $|z-i| < \sqrt{5}$.

Portanto, o desenvolvimento em série de *Taylor* de f em torno de $z_0 = i$ é dado por:

$$f(z) = g(z) + h(z) + j(z)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{(i-1)^{n+2}} (z-i)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1-i)^{n+1}} (z-i)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2-i)^{n+1}} (z-i)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{(i-1)^{n+2}} + \frac{1}{(1-i)^{n+1}} - \frac{1}{(2-i)^{n+1}}\right] (z-i)^n$$

válida para $\left|\dfrac{z-i}{1-i}\right| < 1$, ou seja, para $|z-i| < \sqrt{2}$.

3. Dada $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z-i)}$, determine todas as possíveis séries de *Laurent* de f, com centro em $z_0 = i$. (**20 pontos**)

Solução: Nota-se inicialmente, que as duas possíveis regiões para cálculo da série de *Laurent* de f são $[D(i;\sqrt{2}) - \{i\}]$ e a coroa $\{z \in \mathbb{C}; |z-i| > \sqrt{2}\}$. Além disso, o termo $\dfrac{1}{z-i}$ já a sua própria série de *Laurent* na região $|z-i| > 0$; resta, portanto, determinar a série de *Laurent* de $\dfrac{1}{(z-1)^2}$ e, em seguida, multiplicar por $\dfrac{1}{z-i}$. Dado que $\dfrac{1}{(z-1)^2}$ é analítica no disco $D(i;\sqrt{2})$, sua série de *Laurent* neste disco é sua própria série de *Taylor*. Sendo assim, utilizando-se a função $-g(z)$ (dada na questão anterior), deve-se ter:

$$f(z) = -g(z) \cdot \frac{1}{z-i} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{z-i} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{(i-1)^{n+2}} (z-i)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{(i-1)^{n+2}} (z-i)^{n-1},$$

válida na região $0 < |z-i| < \sqrt{2}$, ou seja, na região $[D(i;\sqrt{2}) - \{i\}]$.

Por outro lado, para $|z-i| > \sqrt{2}$, considera-se que:

$$\left[\frac{1}{z-1}\right]^2 = \left[\frac{1}{(z-i)-(1-i)}\right]^2 = \frac{1}{(z-i)^2} \cdot \left[\frac{1}{1-\frac{1-i}{z-i}}\right]^2 = \frac{1}{(z-i)^2} \cdot \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-i)^n}{(z-i)^n}\right]^2,$$

válida para $\left|\dfrac{1-i}{z-i}\right| < 1$, ou seja, para $|z-i| > \sqrt{2}$. Denotando-se $a_n = (1-i)^n$, vê-se que:

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-i)^n}{(z-i)^n}\right]^2 = \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-i)^n}{(z-i)^n}\right] \cdot \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-i)^n}{(z-i)^n}\right]$$

$$= a_0^2 + [a_0 a_1 + a_1 a_0]\frac{1}{z-i} + [a_0 a_2 + a_1 a_1 + a_1 a_0]\frac{1}{(z-i)^2} + [a_0 a_3 + a_1 a_2 + a_2 a_1 + a_3 a_0]\frac{1}{(z-i)^3} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} a_j a_{n-j}\right)\frac{1}{(z-i)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}(1-i)^j(1-i)^{n-j}\right)\frac{1}{(z-i)^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} 1\right)\frac{(1-i)^n}{(z-i)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\frac{(1-i)^n}{(z-i)^n}.$$

Conclui-se que:

$$f(z) = \frac{1}{z-i}\cdot\left[\frac{1}{z-1}\right]^2 = \frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{(z-i)^2}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\frac{(1-i)^n}{(z-i)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\frac{(1-i)^n}{(z-i)^{n+3}},$$

válida para $|z-i| > \sqrt{2}$.

4. Dada $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-i)^2}$, determine o resíduo de f em cada um dos seus pólos. **(20 pontos)**

Solução: Observa-se que $z_0 = 1$ e $z_1 = i$ são os pólos de f. Além disso, escrevendo-se

$$f(z) = \frac{\frac{1}{z-1}}{(z-i)^2} = \frac{g(z)}{(z-i)^2},$$

tem-se que $z_1 = i$ não é zero de $g(z)$ e portanto, z_1 é pólo de ordem 2 de f; analogamente, escrevendo-se

$$f(z) = \frac{\frac{1}{(z-i)^2}}{z-1} = \frac{h(z)}{z-1},$$

vê-se que $z_0 = 1$ não é zero de $h(z)$ e assim, z_0 é pólo de ordem 1 de f.

Utilizando-se a *Fórmula dos Resíduos* obtem-se que:

$$\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1}\{(z-1)\cdot f(z)\} = \lim_{z\to 1}\frac{1}{(z-i)^2} = \frac{1}{(1-i)^2};$$

$$\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left\{(z-i)^2\cdot f(z)\right\} = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{z-1}\right\} = -\lim_{z\to i}\frac{1}{(z-1)^2} = -\frac{1}{(i-1)^2}.$$

5. Determine a série de *Fourier* de f_I, a extensão ímpar ao intervalo $[-2,2]$, da função f definida por $f(x) = x$, se $x \in [0,1)$ e $f(x) = 2-x$, se $x \in [1,2]$. **(20 pontos)**

Solução: Dado que f_I é função ímpar, tem-se que sua série de *Fourier* é uma série de senos ($a_n = 0$, para $n = 0, 1, \cdots$). Portanto, deve-se ter:

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f_I(x)\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{2}{2}\int_{0}^{2} f_I(x)\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\,dx = \int_{0}^{2} f(x)\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\,dx =$$

$$= \int_0^1 x\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_1^2 2\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\,dx - \int_1^2 x\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\,dx = (I) + (II) - (III).$$

Daí, segue que:

$$(I) = -\frac{2}{n\pi}x\ \cos\ \frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \cos\ \frac{n\pi x}{2}\,dx = -\frac{2}{n\pi}\ \cos\ \frac{n\pi}{2} + \frac{4}{(n\pi)^2}\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\ \cos\ \frac{n\pi}{2} + \frac{4}{(n\pi)^2}\ \text{sen}\ \frac{n\pi}{2};$$

$$(II) = 2\int_1^2 \text{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\,dx = -\frac{4}{n\pi}\ \cos\ \frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2 = -\frac{4}{n\pi}[\ \cos\ n\pi -\ \cos\ \frac{n\pi}{2}] = \frac{4}{n\pi}[\ \cos\ \frac{n\pi}{2} - (-1)^n];$$

$$(III) = \int_1^2 x\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\,dx = -\frac{2}{n\pi}x\ \cos\ \frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2 + \frac{2}{n\pi}\int_1^2 \cos\ \frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi}[2\ \cos\ n\pi -\ \cos\ \frac{n\pi}{2}] + \frac{4}{(n\pi)^2}\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2 = -\frac{2}{n\pi}[2(-1)^n -\ \cos\ \frac{n\pi}{2}] + \frac{4}{(n\pi)^2}[0 -\ \text{sen}\ \frac{n\pi}{2}]$$

$$= -\frac{2}{n\pi}[2(-1)^n -\ \cos\ \frac{n\pi}{2}] - \frac{4}{(n\pi)^2}\ \text{sen}\ \frac{n\pi}{2}.$$

Portanto, tem-se que:

$$b_n = (I) + (II) - (III) = \left\{-\frac{2}{n\pi}\ \cos\ \frac{n\pi}{2} + \frac{4}{(n\pi)^2}\ \text{sen}\ \frac{n\pi}{2}\right\}$$

$$+\left\{\frac{4}{n\pi}[\ \cos\ \frac{n\pi}{2} - (-1)^n]\right\} + \left\{\frac{2}{n\pi}[2(-1)^n -\ \cos\ \frac{n\pi}{2}] + \frac{4}{(n\pi)^2}\ \text{sen}\ \frac{n\pi}{2}\right\}$$

$$= 0\cdot\ \cos\ \frac{n\pi}{2} + 0\cdot(-1)^n + \frac{8}{(n\pi)^2}\ \text{sen}\ \frac{n\pi}{2} = \frac{8}{(n\pi)^2}\ \text{sen}\ \frac{n\pi}{2}.$$

Dado que sen $\frac{(2n-1)\pi}{2} = (-1)^n$ e sen $\frac{2n\pi}{2} =$ sen $n\pi = 0$, para $n = 1, 2, \cdots$, conclui-se que:

$$b_{2n} = 0 \qquad \text{e} \qquad b_{2n-1} = \frac{8}{\pi^2}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}, \qquad \text{para} \quad n = 1, 2, \cdots.$$

Portanto, a série de *Fourier* procurada é:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_{2n-1}\ \text{sen}\ \frac{(2n-1)\pi x}{2} \quad = \quad \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\ \text{sen}\ \frac{(2n-1)\pi x}{2}.$$

6. Determinar uma função $u : [0,2]\times[0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, tal que

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0,\ \text{para}\ (x,y)\in[0,2]\times[0,2], \\ u(0,y) = 0 = u(x,0) = u(2,y),\ \text{para}\ x,\ y\in[0,2], \\ u(x,2) = 2x - x^2,\ \text{para}\ x\in[0,2]. \end{cases} \qquad \textbf{(20 pontos)}$$

Solução: Sabe-se, pela natureza do problema, que a solução procurada é da forma:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\ \text{senh}\ \frac{n\pi y}{2},$$

onde os coeficientes $\tilde{A}_n$ devem ser escolhidos de modo que

$$u(x,2) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\ \text{senh}\ n\pi = 2x - x^2,$$

ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, o número A_n senh $n\pi$ deve-se ser o n-ésimo coeficiente da série de *Fourier* de $j_I(x)$, a extensão ímpar da função $j(x) = 2x - x^2$ ao intervalo $[-2, 2]$, ou ainda,

$$A_n \text{ senh } n\pi = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} j_I(x) \text{ sen } \frac{n\pi x}{2}\, dx = \frac{2}{2}\int_{0}^{2} j_I(x) \text{ sen } \frac{n\pi x}{2}\, dx = \int_{0}^{2} j(x) \text{ sen } \frac{n\pi x}{2}\, dx$$

$$= 2\int_{0}^{2} x \text{ sen } \frac{n\pi x}{2}\, dx - \int_{0}^{2} x^2 \text{ sen } \frac{n\pi x}{2}\, dx = (I) - (II).$$

Sendo assim, obtem-se que:

$$(I) = 2\left[-\frac{2}{n\pi}\, x \cos \frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2} + \frac{2}{n\pi}\int_{0}^{2} \cos \frac{n\pi x}{2}\, dx\right] = 2\left[-\frac{4}{n\pi}\cos n\pi + \frac{4}{(n\pi)^2}\text{ sen } \frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2}\right]$$

$$2\left[-\frac{4}{n\pi}(-1)^n + \frac{4}{(n\pi)^2}\cdot 0\right] = -\frac{8}{\pi}\,\frac{(-1)^n}{n};$$

$$(II) = -\frac{2}{n\pi}\, x^2 \cos \frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2} + \frac{4}{n\pi}\int_{0}^{2} x \cos \frac{n\pi x}{2}\, dx = -\frac{8}{\pi}\,\frac{(-1)^n}{n} + \frac{4}{n\pi}\left[\frac{2}{n\pi}\, x \text{ sen } \frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2} - \frac{2}{n\pi}\int_{0}^{2} \text{sen } \frac{n\pi x}{2}\, dx\right]$$

$$= -\frac{8}{\pi}\,\frac{(-1)^n}{n} + \frac{4}{n\pi}\left[0 + \frac{4}{(n\pi)^2}\cos \frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2}\right] = -\frac{8}{\pi}\,\frac{(-1)^n}{n} + \frac{4}{n\pi}\left[\frac{4}{(n\pi)^2}\cos n\pi - \frac{4}{(n\pi)^2}\cdot 1\right]$$

$$= -\frac{8}{\pi}\,\frac{(-1)^n}{n} - \frac{16}{\pi^3}\,\frac{[1-(-1)^n]}{n^3}.$$

Portanto, deve-se ter:

$$A_n \text{ senh } n\pi = (I) - (II) = -\frac{8}{\pi}\,\frac{(-1)^n}{n} + \frac{8}{\pi}\,\frac{(-1)^n}{n} + \frac{16}{\pi^3}\,\frac{[1-(-1)^n]}{n^3} = \frac{16}{\pi^3}\,\frac{[1-(-1)^n]}{n^3}$$

$$\Rightarrow A_n = \frac{16}{\pi^3}\,\frac{[1-(-1)^n]}{n^3 \text{ senh } n\pi},$$

e daí, vê-se que

$$A_{2n} = 0 \qquad \text{e} \qquad A_{2n-1} = \frac{32}{\pi^3}\,\frac{1}{(2n-1)^3 \text{ senh } (2n-1)\pi}, \qquad \text{para} \quad n = 1, 2, \cdots.$$

Conclui-se que:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_{2n-1} \text{ sen } \frac{(2n-1)\pi x}{2} \text{ senh } \frac{(2n-1)\pi y}{2}$$

$$= \frac{32}{\pi^3}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^3 \text{ senh } (2n-1)\pi} \text{ sen } \frac{(2n-1)\pi x}{2} \text{ senh } \frac{(2n-1)\pi y}{2}.$$