UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Departamento de Matemática

Gabarito da Avaliação Final de CM044 - 03 de Julho de 2018

1. Verificar se existe uma função analítica $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}[f(z)] = x^2 - 2x - y^2$ e $f(1) = -1 + 2i$. Em caso afirmativo, expressar f na variável z.

Solução: Admita que $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, $u(x,y) = x^2 - 2x - y^2$ e $z = x + iy$. Sendo f analítica, as equações de *Cauchy-Riemann* são satisfeitas:

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= 2x - 2 = v_y(x,y) \\ u_y(x,y) &= -2y = -v_x(x,y) \end{aligned}$$

Daí, segue que:

$$v(x,y) = \int (2x-2)\,dy \,+\, \varphi(x) = (2x-2)y \,+\, \varphi(x) \Rightarrow v_x(x,y) = 2y + \varphi'(x) = -u_y(x,y) = 2y$$
$$\Rightarrow \varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = M \;\; (M \in \mathbb{R}) \Rightarrow v(x,y) = (2x-2)y \,+\, M$$

Portanto, deve-se ter:

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) = (x^2 - 2x - y^2) + i\,((2x-2)y \,+\, M)$$

Logo, para $z = 1 + i \cdot 0$ deve-se ter:

$$f(1) = -1 + 2i \Leftrightarrow u(1,0) + i\,v(1,0) = -1 + 2i \Leftrightarrow -1 + i(1 \cdot 0 + M) = -1 + 2i \Leftrightarrow M = 2.$$

Portanto, a função procurada é

$$\begin{aligned} f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) &= (x^2 - 2x - y^2) + i\,((2x-2)y \,+\, 2) = (x^2 + 2xy\,i - y^2) - 2(x + i\,y) + 2i \\ &= (x + i\,y)^2 - 2(x + i\,y) + 2i = z^2 - 2z + 2i. \end{aligned}$$

2. Calcular $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz$ sendo dadas a função $f(z) = \dfrac{1+i}{z^2 + (1-i)z - i}$ e a curva $\Gamma(t) = 2(-1 + e^{it})$, com $t \in [0, 2\pi]$.

Solução: Nota-se que $f(z) = \dfrac{1+i}{(z+1)(z-i)}$ e assim, utilizando-se frações parciais deve-se ter:

$$f(z) = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-i} = \frac{A(z-i) + B(z+1)}{(z+1)(z-i)} = \frac{(A+B)z - Ai + B}{(z+1)(z-i)}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \Rightarrow B = -A \\ -Ai + B = 1 + i \Rightarrow -Ai - A = 1 + i \Rightarrow A = -1 \Rightarrow B = 1 \end{cases}$$

Logo, deve ser:

$$f(z) = -\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-i}. \qquad (*)$$

Além disso, tem-se que $\Gamma(t) = -2 + 2 \cdot e^{it}$, ou seja, Γ é a circunferência com centro em -2 e raio 2. Portanto,

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = -\int_\Gamma \frac{1}{z-(-1)}\,dz + \int_\Gamma \frac{1}{z-i}\,dz = -2\pi\,i + 0 = -2\pi\,i,$$

já que a segunda integral se anula devido a que o integrando é uma função analítica sobre Γ e na região limitada por Γ.

3. Determinar a série de *MacLaurin* da função $f(z) = \dfrac{1+i}{z^2+(1-i)z-i}$ e o raio de convergência da mesma.

Solução: Por $(*)$ vê-se que é suficiente determinar a série de *MacLaurin* dos termos $\dfrac{-1}{z+1}$ e $\dfrac{1}{z-i}$. Daí, segue que:

$$-\frac{1}{z+1} = -\frac{1}{1-(-z)} = -\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}z^n, \quad \text{para } |z|<1;$$

$$\frac{1}{z-i} = -\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{i}} = -\frac{1}{i}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{i^n} = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{i^{n+1}}, \quad \text{para } |z/i|<1, \text{ ou seja, para } |z|<1.$$

Portanto, o desenvolvimento em série de MacLaurin será:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^{n+1} - \frac{1}{i^{n+1}}\right] z^n,$$

válido para $|z|<1$, ou seja, o raio de convergência da série é igual a 1.

4. Seja a função $f(z) = \dfrac{1+i}{z^2+(1-i)z-i}$. Para um $z_0 \neq 0$ de sua escolha, determinar todas as possíveis séries de *Laurent* de f com centro em z_0.

Solução: Vale notar que se z_0 for distinto dos pólos -1 e i, então existirão 3 regiões distintas (interior de disco, coroa e exterior de disco com centro em z_0) com 3 séries distintas. Por brevidade na resolução, escolhamos, por exemplo, $z_0 = -1$ (o procedimento para $z_0 = i$ é similar); neste caso, obteriam-se as duas seguintes regiões:

$$(I) \quad \{z\in\mathbb{C}; 0<|z-(-1)|<\sqrt{2}\} \qquad \text{e} \qquad (II) \quad \{z\in\mathbb{C}; |z-(-1)|>\sqrt{2}\}.$$

[Note-se que o raio $\sqrt{2}$ é justamente a distância entre os pólos.]

Para a região (I) faz-se:

$$f(z) = -\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-i} = -\frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)-(1+i)} = -\frac{1}{z+1} - \frac{1}{1+i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+1}{1+i}}$$

$$= -\frac{1}{z+1} - \frac{1}{1+i}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(1+i)^n}(z+1)^n = -\frac{1}{z+1} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(1+i)^{n+1}}(z+1)^n.$$

Observe-se que o termo $-\dfrac{1}{z+1}$ é válido na região $|z+1|>0$ enquanto que a série acima é válida no disco $|z+1|<|1+i|=\sqrt{2}$ (e a região (I) é exatamente a interseção destas duas regiões).

Para a região (II) faz-se:

$$f(z) = -\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-i} = -\frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)-(1+i)} = -\frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)}\cdot\frac{1}{1-\frac{1+i}{z+1}}$$

$$= -\frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+i)^n}{(z+1)^n} = -\frac{1}{z+1} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+i)^n}{(z+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1+i)^n}{(z+1)^{n+1}},$$

válido para $|1+i|<|z+1|$, ou seja, válido na regiâo (II).

5. Seja a função $f(z) = \dfrac{4 \cos \pi z}{(2z-1)^2}$. Determinar os pólos de f e seus respectivos resíduos.

Solução: Vê-se que

$$f(z) = \frac{4 \cos \pi z}{(2z-1)^2} = \frac{4 \cos \pi z}{2^2(z-\frac{1}{2})^2} = \frac{\cos \pi z}{(z-\frac{1}{2})^2}$$

e portanto, $z_0 = \frac{1}{2}$ é o único pólo de f. Além disso, z_0 é zero de ordem 1 de $\cos \pi z$ pois $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ e $\frac{d}{dz}\big(\cos \pi z\big)\big(\frac{1}{2}\big) \neq 0$; daí, conclui-se que z_0 é pólo de ordem 1 de f.
Sendo assim, pode-se aplicar a *Fórmula dos Resíduos*:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{z=\frac{1}{2}} f(z) &= \frac{1}{(1-1)!} \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{d^0}{dz^0}\left\{(z-\frac{1}{2})^1 \cdot f(z)\right\} \\
&= \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{\cos \pi z}{z-\frac{1}{2}} = \lim_{z\to\frac{1}{2}} \left\{\frac{-\pi \cdot \mathrm{sen}\ \pi z}{1}\right\} = -\pi.
\end{aligned}$$

6. Seja a função $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x$, se $x \in [0,1]$, e $f(x) = -x+2$, se $x \in [1,2]$. Determinar a série de *Fourier* da função f_I, extensão ímpar de f ao intervalo $[-2,2]$.

Solução: Dado que f_I é função ímpar, sua série de *Fourier* será uma série de senos (ou seja, $a_n = 0$, para $n = 0, 1, \cdots$. Portanto, deve-se ter:

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f_I(x)\ \mathrm{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\,dx = \int_0^2 f(x)\ \mathrm{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\,dx = \int_0^1 x\ \mathrm{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_1^2 (-x+2)\ \mathrm{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \int_0^1 x\ \mathrm{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\,dx - \int_1^2 x\ \mathrm{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\,dx + 2\int_1^2 \mathrm{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$\left[u = x \Rightarrow du = dx;\ dv = \ \mathrm{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\,dx \Rightarrow v = -\frac{2}{n\pi} \cdot\ \cos \frac{n\pi x}{2}\right]$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[\left\{-x \cdot\ \cos \frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1 + \int_0^1 \cos \frac{n\pi x}{2}\right\} - \left\{-x \cdot\ \cos \frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2 + \int_1^2 \cos \frac{n\pi x}{2}\right\} + 2\left\{-\ \cos \frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2\right\}\right]$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[\left\{-\ \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n\pi} \cdot\ \mathrm{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1\right\} - \left\{-2 \cdot\ \cos n\pi +\ \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n\pi}\ \mathrm{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2\right\}\right.$$
$$\left. +2\left\{-\ \cos n\pi +\ \cos \frac{n\pi}{2}\right\}\right]$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[\left\{-\ \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n\pi} \cdot\ \mathrm{sen}\ \frac{n\pi}{2}\right\} - \left\{-2 \cdot\ \cos n\pi +\ \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{2}{n\pi}\ \mathrm{sen}\ \frac{n\pi}{2}\right\} + 2\left\{-\ \cos n\pi +\ \cos \frac{n\pi}{2}\right\}\right]$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[\frac{4}{n\pi}\ \mathrm{sen}\ \frac{n\pi}{2}\right] = \frac{8}{(n\pi)^2}\ \mathrm{sen}\ \frac{n\pi}{2}.$$

Logo, obtem-se que:

$$b_{2k} = 0 \qquad \text{e} \qquad b_{2k-1} = \frac{8(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2\pi^2},\ \text{para } k = 1, 2, \cdots.$$

Portanto, a série de *Fourier* procurada é:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\ \mathrm{sen}\ \frac{n\pi x}{2} = \sum_{k=1}^{+\infty} b_{2k-1}\ \mathrm{sen}\ \frac{(2k-1)\pi x}{2} = 8\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2\pi^2}\ \mathrm{sen}\ \frac{(2k-1)\pi x}{2}.$$