UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Departamento de Matemática

Avaliação Final de CM044 - Cálculo IV - Turma A - 04 de Julho de 2017

1. Determine todas as funções analíticas $f(z)$ tais que $\text{Re}(f(z)) = e^{-x} \cos y + 2(x^2 - y^2)$. Expresse tais funções na variável z.

   Solução: Seja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, com $z = x + iy$; deve-se ter:

   $$u_x = -e^{-x} \cos y + 4x = v_y \qquad \text{e} \qquad u_y = -e^{-x} \text{ sen } y - 4y = -v_x;$$

   logo,

   $$v(x,y) = \int v_y \, dy = \int [-e^{-x} \cos y + 4x] dy = -e^{-x} \text{ sen } y + 4xy + \varphi(x)$$
   $$-v_x = -\frac{\partial}{\partial x}(-e^{-x} \text{ sen } y + 4xy + \varphi(x)) = -(e^{-x} \text{ sen } y + 4y + \varphi'(x))$$
   $$\Rightarrow \varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = c \in \mathbb{R} \quad \text{(constante)}$$
   $$v(x,y) = -e^{-x} \text{ sen } y + 4xy + c.$$

   Portanto,

   $$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = e^{-x} \cos y + 2(x^2 - y^2) + i(-e^{-x} \text{ sen } y + 4xy + c)$$
   $$= 2(x^2 + 2xyi - y^2) + e^{-x}(\cos y - i \text{ sen } y) + ic = 2z^2 + e^{-z} + ic, \qquad \text{com } c \in \mathbb{R}.$$

2. Decida se são convergentes as seguintes séries:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+i^n}{2^n+1}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-i)^{2n}}{(2+i)^{3n+1}}$.

   Solução: (a) Nota-se que $\left|\dfrac{1+i^n}{2^n+1}\right| \leq \frac{1+|i|^n}{2^n+1} \leq \frac{2}{2^n+1} \leq \frac{2}{2^n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$; portanto, pelo critério da comparação tem-se:

   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{1+i^n}{2^n+1}\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{2^n} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n},$$

   e esta última série é convergente (já que se trata de uma série geométrica). Portanto, a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+i^n}{2^n+1}$ é absolutamente convergente, sendo, portanto, convergente.

   (b) Pelo teste da razão tem-se que a série em questão é convergente pois:

   $$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{(1-i)^{2n+2}}{(2+i)^{3n+4}}}{\frac{(1-i)^{2n}}{(2+i)^{3n+1}}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|1-i|^{2n+2}}{|2+i|^{3n+4}} \cdot \frac{|2+i|^{3n+1}}{|1-i|^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|1-i|^2}{|2+i|^3} = \frac{2}{5\sqrt{5}} < 1.$$

3. Seja a função $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)(z-i)}$. Escolha um ponto z_0 onde f é analítica e para tal ponto, determine a série de *Taylor* de f em torno de z_0, bem com o raio de convergência de tal série.

   Solução: Dado que f admite pólos simples em $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ e $z_3 = i$, pode-se escolher qualquer $z_0 \in \mathbb{C}$ que seja diferente destes pólos. Digamos que se eleja $z_0 = 1 + i$; então f é analítica em z_0 (pois é um quociente de funções analíticas - e bem definidas - em tal ponto). Daí, usa-se o método das frações parciais para se obter:

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-i)} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-1} + \frac{c}{z-i} = \frac{a(z-1)(z-i) + bz(z-i) + cz(z-1)}{z(z-1)(z-i)}$$
$$= \frac{(a+b+c)z^2 - ((1+i)a + ib + c)z - a}{z(z-1)(z-i)},$$

e portanto, deve-se ter:

$$\begin{cases} a+b+c = 0 \Rightarrow c = -a-b = 1-b \Rightarrow c = 1 - \frac{1-i}{2} = \frac{1+i}{2} \\ (1+i)a + ib + c = 0 \Rightarrow -(1+i) + ib + (1-b) = 0 \Rightarrow b = \frac{i}{i-1} \cdot \frac{(-i-1)}{(-i-1)} = \frac{1-i}{2} \\ -a = 1 \Rightarrow a = -1; \end{cases}$$

Logo,

$$f(z) = \frac{-1}{z} + \frac{1-i}{2} \cdot \frac{1}{z-1} + \frac{1+i}{2} \cdot \frac{1}{z-i}.$$

Mas,

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{z-(1+i)+(1+i)} = -\frac{1}{1+i} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{z-(1+i)}{1+i})}$$
$$= -\frac{1}{1+i}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1+i)^n}(z-(1+i))^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(1+i)^{n+1}}(z-(1+i))^n, \quad (*)$$

para $|z-(1+i)| < |1+i| = \sqrt{2}$;

$$\frac{1-i}{2} \cdot \frac{1}{z-1} = \frac{1-i}{2} \cdot \frac{1}{i+z-(1+i)} = \frac{1-i}{2i} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{z-(1+i)}{i})}$$
$$= \frac{1-i}{2i}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{i}\right)^n (z-(1+i))^n = \frac{1-i}{2i}\sum_{n=0}^{+\infty} i^n (z-(1+i))^n = \frac{1-i}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} i^{n+1}(z-(1+i))^n, \qquad (**)$$

para $|z-(1+i)| < |i| = 1$ e

$$\frac{1+i}{2} \cdot \frac{1}{z-i} = \frac{1+i}{2} \cdot \frac{1}{1+z-(1+i)} = \frac{1+i}{2} \cdot \frac{1}{1-(-(z-(1+i)))}$$
$$= \frac{1+i}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-(1+i))^n, \qquad (***) \qquad \text{para } |z-(1+i)| < 1.$$

Portanto, usando-se $(*)$, $(**)$ e $(***)$ obtem-se que:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{(1+i)^{n+1}} + \frac{1-i}{2}i^{n+1} + \frac{1+i}{2}(-1)^n\right](z-(1+i))^n,$$

para $|z-(1+i)| < 1$.

4. Dada $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)(z-i)}$, determine sua série de *Laurent* na região $1 < |z-i| < \sqrt{2}$.

Solução: Nota-se inicialmente, que a região em questão trata-se da interseção das regiões $1 < |z-i|$ (exterior do disco de centro i e raio 1) e $|z-i| < \sqrt{2}$ (interior do disco de centro i e raio $\sqrt{2}$); logo, deve-se fazer:

$$\frac{1}{z(z-1)(z-i)} = \frac{1}{z-i}\left[\frac{a}{z} + \frac{b}{z-1}\right] = \frac{1}{z-i}\left[\frac{a(z-1)+bz}{z(z-1)}\right] = \frac{1}{z-i}\left[\frac{(a+b)z-a}{z(z-1)}\right],$$

e portanto, deve-se ter $a = -1$ e $b = 1$, ou seja,

$$\frac{1}{z(z-1)(z-i)} = \frac{1}{z-i}\left[-\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}\right].$$

Daí, segue que:

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{z-i+i} = \frac{-1}{z-i}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{i}{z-i})} = \frac{-1}{z-i}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-i}{z-i}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}i^n}{(z-i)^{n+1}} \quad (*)$$

para $|z-i| > |i| = 1$. Além disso,

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{i-1-(-(z-i))} = \frac{1}{i-1}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{z-i}{i-1})} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(i-1)^n}(z-i)^n, \qquad (**)$$

para $|z-i| < |i-1| = \sqrt{2}$. Daí, por $(*)$ e $(**)$ obtem-se que:

$$f(z) = \frac{1}{z-i}\cdot\left\{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}i^n}{(z-i)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(i-1)^n}(z-i)^n\right\} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}i^n}{(z-i)^{n+2}} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(i-1)^n}(z-i)^{n-1},$$

para $1 < |z-i|\sqrt{2}$.

5. Dada $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)(z-i)}$, use sua série de *Laurent* para determinar o resíduo de f em $z_0 = 0$.

Solução: Usando-se frações parciais, tem-se que:

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-i)} = \frac{1}{z}\left[\frac{a}{z-1}+\frac{b}{z-i}\right] = \frac{1}{z}\left[\frac{a(z-i)+b(z-1)}{(z-1)(z-i)}\right] = \frac{1}{z}\left[\frac{(a+b)z-(ai+b)}{(z-1)(z-i)}\right].$$

Para tanto, deve-se ter:

$$\begin{cases} a+b=0 \Rightarrow b=-a \Rightarrow b = -\frac{1+i}{2} \\ ai+b=-1 \Rightarrow a(i-1) = -1 \Rightarrow a = \frac{-1}{i-i} = \frac{-1}{i-1}\cdot\frac{-i-1}{-i-1} \Rightarrow a = \frac{1+i}{2}, \end{cases}$$

ou seja,

$$f(z) = \frac{1}{z}\left[\frac{1+i}{2}\cdot\frac{1}{z-1} - \frac{1+i}{2}\frac{1}{z-i}\right] = \frac{1}{z}\left[\frac{1+i}{2}\cdot\frac{1}{z-1} + \frac{1+i}{2i}\frac{1}{1-\frac{z}{i}}\right]$$

$$= \frac{1}{z}\left[-\frac{1+i}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}z^n + \frac{1+i}{2i}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{i^n}z^n\right] = -\frac{1+i}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}z^{n-1} + \frac{1+i}{2}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{i^{n+1}}z^{n-1}$$

$$= \left(-\frac{1+i}{2} - \frac{1+i}{2}i\right)\frac{1}{z} - \frac{1+i}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}z^{n-1} + \frac{1+i}{2}\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{i^{n+1}}z^{n-1}$$

$$(-i)\cdot\frac{1}{z} - \frac{1+i}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}z^{n-1} + \frac{1+i}{2}\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{i^{n+1}}z^{n-1}, \qquad \text{para } 0 < |z| < 1.$$

Portanto, $\mathrm{Res}_{z=0} f(z) = -i$.

6. Seja a função $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z-1)^2(z-i)}$. Calcule $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz$ onde Γ é a curva (orientada no sentido anti-horário) dada por:

(a) $|z+1| = \dfrac{3}{2}$; (b) $|z-2| = \dfrac{3}{2}$.

Solução: (a) Nota-se que dos pólos de f, apenas os pólos 0 (pólo de ordem 2) e i (pólo de ordem 1) encontram-se no interior da região limitada pela curva Γ em questão. Portanto, pode-se calcular a integral desejada utilizando-se os resíduos de f em tais pontos.

$$\mathrm{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[z^2 f(z)\right] = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z-1)^2(z-i)}\right] = \lim_{z\to 0}\left[-\frac{2(z-1)(z-i)+(z-1)^2}{(z-1)^4(z-i)^2}\right]$$

$$= \lim_{z\to 0}\left[-\frac{2(z-i)+(z-1)}{(z-1)^3(z-i)^2}\right] = 1+2i;$$

$$\mathrm{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i}[(z-i)f(z)] = \lim_{z\to i}\left[\frac{1}{z^2(z-1)^2}\right] = \frac{1}{(-1)(-2i)} = -\frac{i}{2}.$$

Conclui-se que:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi\, i\big(\mathrm{Res}_{z=0} f(z) + \mathrm{Res}_{z=i} f(z)\big) = 2\pi\, i\left(1+2i-\frac{i}{2}\right) = 2\pi\, i\frac{2+3i}{2} = \pi(-3+2i).$$

(b) Neste caso, a curva em questão é a circunferência de centro 2 e raio $\frac{3}{2}$ e portanto, $z=1$ é o único pólo de f que encontra-se no interior da região limitada por Γ; como

$$\mathrm{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dt}[(z-1)f(z)] = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{z^2(z-i)}\right] = \lim_{z\to 1}\left[-\frac{2z(z-i)+z^2}{z^4(z-i)^2}\right]$$

$$= \lim_{z\to 1}\left[-\frac{2(z-i)+z}{z^3(z-i)^2}\right] = -\frac{2(1-i)+1}{(1-i)^2} = -\frac{3-2i}{-2i} = \frac{-2-3i}{2},$$

segue que

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi\, i\cdot \mathrm{Res}_{z=1} f(z) = 2\pi\, i\frac{(-2-3i)}{2} = \pi\, i(-2-3i) = \pi(3-2i).$$

7. Seja a função $f : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $f(x)=1$, se $x\in[-\pi,0)$ e $f(x)=-1$, se $x\in[0,\pi]$. Determine a série de *Fourier* de f no intervalo $[-\pi,\pi]$.

Solução: Dado que f é uma função ímpar, então sua série de *Fourier* é uma série de senos (ou seja, os coeficientes an são todos nulos). Daí, segue-se que:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \mathrm{sen}\ nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\ \mathrm{sen}\ nx\,dx = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{sen}\ nx\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{\cos\, nx}{n}\bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi}\left[(-1)^n-1\right],$$

e portanto,

$$b_{2k} = \frac{2}{2k\pi}\left[(-1)^{2k}-1\right] = 0 \qquad \text{e} \qquad b_{2k-1} = \frac{2}{(2k-1)\pi}\left[(-1)^{2k-1}-1\right] = -\frac{4}{(2k-1)\pi},$$

para $k=1,2,\cdots$.

Logo, a série de *Fourier* no intervalo $[-\pi,\pi]$ será:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_{2k-1}\ \mathrm{sen}\ ((2k-1)x) = -\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4}{(2k-1)\pi}\ \mathrm{sen}\ ((2k-1)x).$$

8. Seja $f : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $f(x)=x$, para todo $x\in[0,\pi]$. Determine a série de *Fourier* de f_P, a extensão par de f, no intervalo $[-\pi,\pi]$.

Solução: Nota-se que deve ser $f_P(x)=-x$, para $x\in[-\pi,0]$, e sendo f_P uma função par, sua série de *Fourier* será uma série de cossenos. Sendo assim, deve-se ter:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_P(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_P(x)\ \cos\ nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\ \cos\ nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\ \cos\ nx\,dx$$

(fazendo $u = x \Rightarrow du = dx$ e $dv = \cos\, nx\, dx \Rightarrow v = \dfrac{\text{sen } nx}{n}$)

$$= \frac{2}{\pi}\left[x\frac{\text{sen } nx}{n}\bigg|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\text{sen } nx}{n}\, dx\right] = \frac{2}{\pi}\left[0 + \frac{\cos\, nx}{n^2}\bigg|_0^\pi\right] = \frac{2}{n^2\pi}\left[(-1)^n - 1\right];$$

Daí, segue que:

$$a_{2k} = \frac{2}{(2k)^2\pi}\left[(-1)^{2k} - 1\right] = 0 \quad\quad e \quad\quad a_{2k-1} = \frac{2}{(2k-1)^2\pi}\left[(-1)^{2k-1} - 1\right] = -\frac{4}{(2k-1)^2\pi},$$

para $k = 1, 2, \cdots$. Logo, a série de *Fourier* será:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{2k-1}\, \cos(2k-1)x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\, \cos(2k-1)x.$$