UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Departamento de Matemática

Gabarito da Avaliação Final de CM005 - Álgebra Linear - 03/Julho/2018

1. Determinar, se possível, uma transformação linear $T : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ não-nula tal que $\ker(T) \neq \{\emptyset\}$ e $\ker(T) \oplus \operatorname{Im}(T) = P_2(\mathbb{R})$.

   Solução: Para definir uma tal transformação linear é necessário determinar dois subespaços vetoriais não triviais de $P_2(\mathbb{R})$ cuja soma direta seja justamente $P_2(\mathbb{R})$. Por simplicidade de construção, consideremos, por exemplo, os subespaços $[1]$ e $[t, t^2]$. Mostremos inicialmente, que $[1] \cap [t, t^2] = \{0\}$; seja $f(t) \in [1] \cap [t, t^2]$. Então, deve-se ter:

$$f(t) \in [1] \quad \text{e} \quad f(t) \in [t, t^2] \;\Leftrightarrow\; f(t) = \alpha_0 \cdot 1 \quad \text{e} \quad f(t) = \alpha_1 \cdot t + \alpha_2 \cdot t^2 \;\Leftrightarrow\; \alpha_0 \cdot 1 = \alpha_1 \cdot t + \alpha_2 \cdot t^2$$
$$\Leftrightarrow\; \alpha_0 \cdot 1 - \alpha_1 \cdot t - \alpha_2 \cdot t^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; f(t) \equiv 0.$$

   Além disso, $[1] \oplus [t, t^2] = P_2(\mathbb{R})$ pois dado qualquer $f(t) \in P_2(\mathbb{R})$ existem escalares (únicos) $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tais que $f(t) = \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot t + \alpha_2 \cdot t^2$.

   Podemos considerar, por exemplo, $\ker(T) = [1]$ e $\operatorname{Im}(T) = [t, t^2]$ (ou o contrário). Com essa escolha, podemos definir:

$$\begin{aligned} T(1) = 0, \quad T(t) = t, \quad T(t^2) = t^2 \Rightarrow T\left(f(t)\right) &= T(\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot t + \alpha_2 \cdot t^2) \\ &= \alpha_0 \cdot T(1) + \alpha_1 \cdot T(t) + \alpha_2 \cdot T(t^2) = \alpha_1 \cdot t + \alpha_2 \cdot t^2. \end{aligned}$$

2. Seja $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a transformação linear dada por $T(x, y, z, w) = (2x, 2z - y, z, 2w - z)$, para todo $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$.

   (a) Verificar se T é bijetiva; **(10 pontos)**

   (b) Determinar os autovalores de T; **(10 pontos)**

   (c) Determinar os autovetores de T; **(10 pontos)**

   (d) Determinar o polinômio minimal de T; **(10 pontos)**

   Solução: (a) Se $(x, y, z, w) \in \ker(t)$ então

$$T(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow (2x, 2z - y, z, 2w - z) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 2z - y = 0 \Rightarrow y = 0 \\ z = 0 \\ 2w - z = 0 \Rightarrow w = 0 \end{cases}$$

   Portanto, $\ker(T) = \{(0, 0, 0, 0)$, e daí, conclui-se que T é injetiva; logo, a dimensão de $\operatorname{Im}(T)$ é a mesma do domínio de T (que também é a mesma do contra-domínio), ou seja, $\operatorname{Im}(T)$ coincide com o contra-domínio (T é sobrejetiva). Portanto, T é bijetiva.

   (b) Denotando-se por B a base canônica do $\mathbb{R}^4$, tem-se que:

$$\begin{matrix} T(1,0,0,0) = (2,0,0,0) \\ T(0,1,0,0) = (0,-1,0,0) \\ T(0,0,1,0) = (0,2,1,-1) \\ T(0,0,0,1) = (0,0,0,2) \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad [T]_B^B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Denotando-se o polinômio característico de T por $p(\alpha)$ e a matriz identidade de ordem 4 por I_d, deve-se ter:

$$\begin{aligned} p(\alpha) = \det\left([T]_B^B - \alpha \cdot I_d\right) &= \det \begin{bmatrix} 2-\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\alpha & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2-\alpha \end{bmatrix} \\ &= (2-\alpha)\cdot(-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} -1-\alpha & 2 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & -1 & 2-\alpha \end{bmatrix} \\ &= (2-\alpha)\cdot[(-1-\alpha)(1-\alpha)(2-\alpha)] = (\alpha-2)^2(\alpha-1)(\alpha+1) \end{aligned}$$

Como os autovalores de T são as raízes do polinômio característico, conclui-se que $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$ e $\alpha_3 = -1$ são os autovalores de T.

(c) Os autovetores $v = (x, y, z, w)$ de T associados a $\alpha_1 = 2$ satisfazem $T(v) = 2 \cdot v$; logo, deve-se ter:

$$T(v) = 2\cdot v \Leftrightarrow (2x, 2z-y, z, 2w-z) = (2x, 2y, 2z, 2w) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2x \\ 2z - y = 2y \Rightarrow y = \frac{2}{3}z \Rightarrow y = 0 \\ z = 2z \Rightarrow z = 0 \\ 2w - z = 2w \Rightarrow 2w = 2w \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow v = (x, 0, 0, w) = x\cdot(1,0,0,0) + w\cdot(0,0,0,1),$$

e portanto, $V_{\alpha_1} = [(1,0,0,0),(0,0,0,1)]$ é o autoespaço associado ao autovalor $\alpha_1 = 2$.
Para o autovalor $\alpha_2 = 1$ deve-se ter:

$$T(v) = 1\cdot v \Leftrightarrow (2x, 2z-y, z, 2w-z) = (x, y, z, w) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x \Rightarrow x = 0 \\ 2z - y = y \Rightarrow y = z \\ z = z \\ 2w - z = w \Rightarrow w = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow v = (0, z, z, z) = z\cdot(0,1,1,1),$$

e portanto, $V_{\alpha_2} = [(0,1,1,1)]$ é o autoespaço associado ao autovalor $\alpha_2 = 1$.
Para o autovalor $\alpha_3 = -1$ deve-se ter:

$$T(v) = (-1)\cdot v \Leftrightarrow (2x, 2z-y, z, 2w-z) = (-x, -y, -z, -w) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -x \Rightarrow x = 0 \\ 2z - y = -y \Rightarrow z = 0 \\ z = -z \Rightarrow z = 0 \\ 2w - z = -w \Rightarrow w = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow v = (0, y, 0, 0) = y\cdot(0,1,0,0),$$

e portanto, $V_{\alpha_3} = [(0,1,0,0)]$ é o autoespaço associado ao autovalor $\alpha_3 = -1$.

(d) Dado que o polinômio minimal de T deve ser mônico (ou seja, o coeficiente do termo de maior grau é igual a 1), deve dividir o polinômio característico, deve ter as mesmas raízes do polinômio característico e deve ser o polinômio de menor grau que anula a matriz de T, conclui-se que os possíveis candidatos a polinômio minimal de T são:

$$m_1(\alpha) = (\alpha-2)(\alpha-1)(\alpha+1) \qquad \text{e} \qquad m_2(\alpha) = p(\alpha).$$

Então, resta verificar se $m_1(\alpha)$ anula a matriz de T:

$$m_1\left([T]_B^B\right) = \left([T]_B^B - 2\cdot I_d\right)\cdot\left([T]_B^B - I_d\right)\cdot\left([T]_B^B + I_d\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e daí, conclui-se que $m_1(\alpha)$ é o polinômio minimal de T.

3. Seja o produto interno $\langle f, g\rangle = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot g(x)\,dx$, para todos $f, g \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$.

   (a) Calcular $\text{proj}_g f$, sendo $f(x) = x$ e $g(x) = \text{sen } x$;

   (b) Calcular o ângulo α entre $f(x) = x$ e $g(x) = \text{sen } x$;

   (c) Obter uma base ortonormal para o subespaço $[1, x, \text{sen } x]$.

   Solução: (a) Tem-se que:

$$\langle f, g\rangle = \langle x, \text{ sen } x\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \text{ sen } x\,dx = \frac{1}{\pi}\left\{x\cdot(-\cos x)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}(-\cos x)\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{2\pi + \int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{2\pi + \text{ sen } x\Big|_{-\pi}^{\pi}\right\} = 2;$$

$$\langle g, g\rangle = \langle \text{ sen } x, \text{ sen } x\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\text{sen } x\cdot \text{ sen } x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\text{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right]dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[1 - \cos 2x]\,dx == \frac{1}{2\pi}\left[x - \frac{1}{2}\text{ sen } 2x\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi = 1.$$

Logo,

$$\text{proj}_g f \;=\; \frac{\langle f, g\rangle}{\langle g, g\rangle}\cdot g \;=\; \frac{2}{1}\cdot \text{ sen } x \;=\; 2 \text{ sen } x.$$

(b) Tem-se que:

$$\langle f, f\rangle = \langle x, x\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3} \Rightarrow \|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \pi\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Sendo assim, segue-se que:

$$\alpha = \text{arc cos}\left(\frac{\langle\, f\,,\, g\,\rangle}{\|f\|\cdot\|g\|}\right) = \text{arc cos}\left(\frac{2}{\pi\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot 1}\right) = \text{arc cos}\left(\frac{2\sqrt{3}}{\pi\sqrt{2}}\right).$$

(c) Tem-se que:

$$\langle 1, x\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{2\pi}x^2\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

$$\langle 1, \text{ sen } x\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\text{sen } x\,dx = -\frac{1}{2\pi}\cos x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

$$\langle x,\ \text{sen}\ x\rangle = 2.$$

Vê-se então que $x \not\perp$ sen x; sejam $v_1' = 1$, $v_2' =$ sen x e $v_3' = x$, e aplica-se o método de *Gram-Schmidt* ao conjunto $\{v_1', v_2', v_3'\}$ para construir a base desejada.

Dado que

$$\|v_1'\|^2 = \langle v_1', v_1'\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1^2\, dx = \frac{1}{\pi} x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2 \Rightarrow \|v_1'\| = \sqrt{2},$$

define-se $v_1 = \dfrac{1}{\|v_1'\|} \cdot v_1' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Por sua vez, $v_2' \perp v_1'$ e $\|v_2'\| = 1$; define-se $v_2 = \dfrac{1}{\|v_2'\|} \cdot v_2' =$ sen x.

Seja $w = v_3' - \text{proj}_{[v_1, v_2]} v_3' = v_3' - \text{proj}_{v_1} v_3' - \text{proj}_{v_2} v_3'$; segue que:

$$\text{proj}_{v_1} v_3' = \frac{\langle v_3', v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} \cdot v_1 = \frac{0}{1} \cdot v_1 = 0;$$

$$\text{proj}_{v_2} v_3' = \frac{\langle v_3', v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} \cdot v_2 = \frac{\langle x,\ \text{sen}\ x\rangle}{1} \cdot\ \text{sen}\ x = 2\ \text{sen}\ x.$$

$$\Rightarrow w = v_3' - \text{proj}_{v_1} v_3' - \text{proj}_{v_2} v_3' = x - 2\ \text{sen}\ x.$$

Daí, tem-se que:

$$\begin{aligned}\langle w, w\rangle = \langle x - 2\ \text{sen}\ x, x - 2\ \text{sen}\ x\rangle &= \langle x, x\rangle - 4\langle x,\ \text{sen}\ x\rangle + 4\langle\ \text{sen}\ x,\ \text{sen}\ x\rangle \\ &= \frac{2\pi^2}{3} - 4\cdot 2 + 4\cdot 1 = \frac{2\pi^2}{3} - 4 = \frac{2(\pi^2-6)}{3} \\ &\Rightarrow \|w\| = \frac{\sqrt{2(\pi^2-6)}}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Finalmente, define-se

$$v_3 = \frac{1}{\|w\|} \cdot w = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2(\pi^2-6)}}(x - 2\ \text{sen}\ x)$$

e então, tem-se que $\{v_1, v_2, v_3\}$ é a base ortonormal procurada.