UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Gabarito da 2a. Avaliação de CM044 - Cálculo IV

1. Sejam $f(z) = e^{2z}$, para $z \in \mathbb{C}$ e γ o segmento de reta com ponto inicial em $z_0 = 1$ e ponto final em $z_1 = i$. Calcule $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$ das seguintes formas:

   (a) usando uma parametrização do caminho; **(10 pontos)**

   (b) determinando uma primitiva de f. **(10 pontos)**

   Solução: (a) Tem-se que a equção vetorial do segmento com extremos (inicial e final) em z_0 e z_1 é $\gamma(t) = z_0 + t(z_1 - z_0)$, com $t \in [0,1]$, ou seja, $\gamma(t) = 1 + t(i-1)$, com $t \in [0,1]$; logo, $\gamma'(t) = i - 1$, para todo t. Daí, segue que:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 e^{2(1+t(i-1))}\cdot(i-1)\,dt = (i-1)\int_0^1 e^{2(1+t(i-1))}\,dt$$

$$= (i-1)\frac{1}{2(i-1)}e^{2(1+t(i-1))}\Big|_0^1 = \frac{e^{2i} - e^2}{2}.$$

   (b) Dado que $f(z) = e^{2z}$ é analítica (no plano complexo), já que é uma composição de funções analíticas, tem-se que a integral não depende do caminho γ mas apenas dos pontos inicial e final. Uma primitiva de f é a função $\dfrac{e^{2z}}{2}$ e portanto,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_1^i f(z)\,dz = \frac{e^{2z}}{2}\Big|_1^i = \frac{e^{2i} - e^2}{2}.$$

2. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \operatorname{tg}\left(\frac{z}{2}\right)dz$ onde γ é a curva $|z - 2\pi| = 2$, orientada no sentido horário. **(20 pontos)**

   Solução: Dado que $\operatorname{tg}(\frac{z}{2}) = \dfrac{\operatorname{sen}(\frac{z}{2})}{\cos(\frac{z}{2})}$, então $\operatorname{tg}(\frac{z}{2})$ não está definida nos pontos onde $\cos(\frac{z}{2}) = 0$, ou seja, nos pontos $\frac{z}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi$, com $n \in \mathbb{Z}$, ou ainda, nos pontos $z = \pi(1+2n)$, com $n \in \mathbb{Z}$.

   Além disso, a curva γ em questão é uma circunferência com centro em 2π e de raio 2, e nenhum dos pontos onde $\operatorname{tg}(\frac{z}{2})$ não está definida, está sobre a curva γ ou no interior da região limitada por γ. [Note que a distância dos pontos $z_0 = \pi$ e $z_1 = 3\pi$ ao centro da circunferência é igual a π, e portanto, maior que o raio da mesma.]

   Desta forma, $\operatorname{tg}(\frac{z}{2})$ é analítica sobre a curva γ e no interior da região limitada por γ, pois é um quociente de funções analíticas; pelo Teorema da Integral de *Cauchy* conclui-se que

$$\int_\gamma \operatorname{tg}\left(\frac{z}{2}\right)dz = 0.$$

3. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^4 - \cos z}{(z^2+1)^2}\, dz$ onde γ é a curva $|z+1+i| = 2$, orientada no sentido anti-horário.
(20 pontos)

Solução: Nota-se inicialmente, que $(z^2+1)^2 = [(z-i)(z+i)]^2 = (z-i)^2(z-(-i))^2$. Também, a curva γ em questão é a circunferência de centro em $-1-i$ e raio 2 e o ponto $z_0 = -i$ está no interior da região limitada por γ. Sendo assim, podemos escrever

$$\frac{z^4 - \cos z}{(z^2+1)^2} = \frac{z^4 - \cos z}{[(z-i)(z+i)]^2} = \frac{f(z)}{(z-(-i))^2},$$

onde $f(z) = \dfrac{z^4 - \cos z}{(z-i)^2}$ é analítica sobre γ e na região limitada por γ. Daí, segue que:

$$f'(z) = \frac{(4z^3 + \text{sen } z)(z-i)^2 - 2(z^4 - \cos z)(z-i)}{(z-i)^4} = \frac{(4z^3 + \text{sen } z)(z-i) - 2(z^4 - \cos z)}{(z-i)^3}$$

$$\Rightarrow f'(-i) = \frac{(-2i)(-4i - \text{sen } i) - 2(1 - \cos i)}{8i}$$

$$= \frac{(-i)(-4i - \text{sen } i) - (1 - \cos i)}{4i} = \frac{-5 + \cos i + i \text{ sen } i}{4i}.$$

Logo, podemos aplicar a Fórmula Integral de *Cauchy* para Derivadas (com $n = 1$) para obter:

$$\int_\gamma \frac{z^4 - \cos z}{(z^2+1)^2}\, dz = 2\pi i \cdot f'(-i) = 2\pi i \cdot \frac{-5 + \cos i + i \text{ sen } i}{4i} = \frac{\pi}{2}(-5 + \cos i + i \text{ sen } i).$$

4. (a) Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3+i)^n}{2^{2n}}$ é convergente, sem calcular sua soma; **(10 pontos)**
(b) Calcule sua soma. **(10 pontos)**

Solução: (a) Notamos que

$$\frac{(3+i)^n}{2^{2n}} = \left(\frac{3+i}{2^2}\right)^n \text{ e que } \left|\frac{3+i}{2^2}\right| = \frac{\sqrt{10}}{4} < 1;$$

portanto, trata-se de uma série geométrica de razão $r = \dfrac{3+i}{4}$, com $r < 1$. Logo, a série geométrica é convergente.

(b) Tem-se que:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3+i)^n}{2^{2n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3+i}{4}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{3+i}{4}} = \frac{4}{4-3-i} = \frac{4}{1-i}.$$

5. Calcule a série de *Mac Laurin* de $f(z) = \dfrac{e^z}{1-z}$ e determine o raio de convergência da mesma. **(20 pontos)**

Solução: Sabe-se que

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots, \qquad \text{para } |z| < +\infty \text{ e}$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots, \qquad \text{para } |z| < 1.$$

Daí, segue que

$$f(z) = e^z \cdot \frac{1}{1-z} = \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right) \cdot \left(1 + z + z^2 + z^3 + \cdots\right)$$

$$= 1 + (1+1)z + (1 + 1 + \frac{1}{2!})z^2 + (1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!})z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right) z^n,$$

para $|z| < 1$, ou seja, o raio de convergência da série é igual a 1.

6. Dada a função $f(z) = \dfrac{z}{z+1}$, determine sua série de *Taylor* com centro em $z_0 = 1$ e o raio de convergência de tal série. **(20 pontos)**

Solução: Tem-se que

$$\frac{z}{z+1} = \frac{z+1-1}{z+1} = 1 - \frac{1}{z+1} = 1 - \frac{1}{2 + (z-1)}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - (-\frac{z-1}{2})} = 1 - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (z-1)^n$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} (z-1)^n = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} (z-1)^n.$$

Para $n \geq 1$, tem-se que $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}$ e assim, o raio de convergência da série pode ser assim calculado:

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^{n+2}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^{n+2}}{2^{n+1}} = \lim_{n \to \infty} 2 = 2.$$