UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Lista de Sequências e Séries Complexas

1. Verifique se as sequências abaixo são limitadas e/ou convergentes e determine, se possível, seus limites. Justifique suas afirmações.

   (a) $z_n = e^{-n\pi i/4}$ (b) $z_n = \dfrac{(-1)^n}{n+i}$ (c) $z_n = (1+i)^n$ (d) $z_n = (\dfrac{1+3i}{\sqrt{10}})^n$

2. Decida se as séries abaixo convergem ou divergem e justifique.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n^2-2i}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n}{n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-i}{3n+2i}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}(1+i)^n$

3. Determine o centro e o raio de convergência das seguintes séries de potências e justifique.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(z+i)^n}{n^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n}{n!}(z+2i)^n$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{100n}}{n!} z^n$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} z^{2n}$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n-i)^n z^n$ (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}$ (g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(z-3+2i)^n$ (h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n z^{4n}$

   (i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2+3i}{5-i}\right)^n (z-\pi)^n$ (j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(4n)!}{2^n(n!)^4}(z+\pi i)^n$

4. Determine o raio de convergência das séries de potências abaixo, usando derivação ou integração de séries.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}(z+2i)^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{z}{\pi}\right)^{2n+1}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k}\left(\frac{z}{4}\right)^n$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-7)^n}{n(n+1)(n+2)} z^{2n}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+m}{m} z^n$

5. Determine a série de Taylor ou de MacLaurin da função f dada, no centro z_0 dado, e determine o raio de convergência da mesma.

   (a) $f(z) = e^{-2z}$, $z_0 = 0$ (b) $f(z) = \dfrac{1}{1-z^3}$, $z_0 = 0$ (c) $f(z) = \text{sen } z$, $z_0 = \pi/2$

   (d) $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $z_0 = 1$ (e) $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$, $z_0 = i$ (f) $f(z) = \text{Ln }(1-z)$, $z_0 = i$

   (g) $f(z) = z^6 - z^4 + z^2 - 1$, $z_0 = 1$ (h) $f(z) = e^{-z^2/2}$, $z_0 = 0$