UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Departamento de Matemática

Gabarito 3a. Avaliação de CM044 - Cálculo IV - Turma A - 20 de Junho de 2017

1. Determine as singularidades de $f(z) = \dfrac{1}{\cos\, z - \text{sen}\, z}$, internas ao disco $|z - \frac{\pi}{2}| < \frac{\pi}{2}$.

   Solução: Nota-se que

$$\cos\, z - \text{sen}\, z = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \Leftrightarrow i\left(\frac{e^{2iz}+1}{e^{iz}}\right) = \frac{e^{2iz}-1}{e^{iz}}$$

$$\Leftrightarrow i\left(e^{2iz}+1\right) = e^{2iz}-1 \Leftrightarrow e^{2iz}(i-1) = -1-i \Leftrightarrow e^{2iz} = \frac{-1-i}{i-1} = i$$

$$\Leftrightarrow e^{2ix-2y} = i \Leftrightarrow (e^{-2y}\cos\, 2x) + i(e^{-2y}\text{sen}\, 2x) = 0 + i \cdot 1$$

$$\begin{cases} e^{-2y}\cos\, 2x = 0 \Leftrightarrow \cos\, 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2}(1+2n) \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4}(1+2n) \quad (n \in \mathbb{Z}) \\ e^{-2y}\text{sen}\, 2x = 1 \Leftrightarrow e^{-2y}\cdot(-1)^n = 1 \Leftrightarrow e^{-2y} = 1 \Leftrightarrow y = 0 \quad (n \text{ par}) \end{cases}$$

   Note-se que sen $\frac{\pi}{2}(1+2n) = (-1)^n$ e para n ímpar a segunda equação não tem solução. Portanto, os zeros da equação $\cos\, z - \text{sen}\, z = 0$ são da forma $z = \frac{\pi}{4}(1+4n)$, com $n \in \mathbb{Z}$.

   Portanto, apenas a singularidade $z_0 = \frac{\pi}{4}$ está no interior do disco $|z - \frac{\pi}{2}| < \frac{\pi}{2}$.

2. Determine a série de *Laurent* de $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2(1-z)}$ na região $0 < |z| < 1$.

   Solução: Tem-se que

$$\frac{e^z}{z^2(1-z)} = \frac{1}{z^2}\cdot e^z \cdot \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z^2}\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)$$

$$= \frac{1}{z^2}\cdot\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right)\cdot\left(1 + z + z^2 + z^3 + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{z^2}\cdot\left(1 + (1+1)z + (1+1+\frac{1}{2!})z^2 + (1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!})z^3 + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{z^2}\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)z^{n-2}.$$

3. Dada a função $f(z) = \dfrac{z^3 - 2iz^2}{(z-i)^2}$, determinar sua série de *Laurent* na região $|z - i| > 0$.

Solução: Observa-se inicialmente que $g(z) = z^3 - 2iz^2$ é um polinômio, o qual deve ser entendido como sendo a sua própria série de *Taylor* em torno de zero; calculemos sua série de *Taylor* em torno de $z_0 = i$. Daí, segue que:

$$g^{(0)}(z) = z^3 - 2iz^2 \Rightarrow g^{(0)}(i) = i; \qquad g'(z) = 3z^2 - 4iz \Rightarrow g'(i) = 1$$
$$g''(z) = 6z - 4i \Rightarrow g''(i) = 2i; \quad g'''(z) = 6 \Rightarrow g'''(i) = 6 \quad \text{e} \quad g^{(n)}(z) = 0, \quad n = 4, 5, \cdots .$$

Portanto, os coeficientes a_n's são:

$$a_0 = \frac{g^{(0)}(i)}{0!} = i; \quad a_1 = \frac{g'(i)}{1!} = 1; \quad a_2 = \frac{g''(i)}{2!} = i; \quad a_3 = \frac{g'''(i)}{3!} = 1 \quad \text{e} \quad a_n = 0, n \geq 4.$$

Logo,

$$\begin{aligned} g(z) = z^3 - 2iz^2 &= a_0 + a_1(z-i) + a_2(z-i)^2 + a_3(z-i)^3 \\ &= i + 1\cdot(z-i) + i\cdot(z-i)^2 + 1\cdot(z-i)^3. \end{aligned}$$

Dado que $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-i)^2}$, segue que:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-i)^2}\cdot[i + 1\cdot(z-i) + i\cdot(z-i)^2 + 1\cdot(z-i)^3] \\ &= \frac{i}{(z-i)^2} + \frac{1}{z-i} + i + (z-i) = \frac{i}{(z-i)^2} + \frac{1}{z-i} + z. \end{aligned}$$

4. Seja a função $f(z) = z\, e^{\frac{1}{z-1}}$.

(a) Determinar a série de *Laurent* de f na região $|z - 1| > 0$;

(b) Calcular $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\, dz$, onde Γ é a curva $|z - 2| = 2$, orientada no sentido anti-horário.

Solução: (a)

$$\begin{aligned} z\, e^{\frac{1}{z-1}} &= z\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!(z-1)^n}\right) = (1 + (z-1))\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!(z-1)^n}\right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!(z-1)^n}\right) + \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!(z-1)^{n-1}}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2(z-1)^2} + \cdots\right) + \left((z-1) + 1 + \frac{1}{2(z-1)} + \frac{1}{3(z-1)^2} + \cdots\right) \end{aligned}$$

(b) Nota-se que o pólo $z_0 = 1$ está no interior da região limitada pela curva Γ; além disso, observa-se pela série de *Laurent* acima que $b_1 = 1 + \frac{1}{2}$ e daí, segue que:

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2\,\pi\, i\, b_1 = 2\,\pi\, i\,\frac{3}{2} = 3\pi\, i.$$

5. Determine todas as possíveis séries de *Laurent* de $f(z) = \dfrac{1}{z+1}$ com centro em $z_0 = i$.

Solução: Dado que f é analítica em $z_0 = i$, segue sua série de *Laurent* no disco $|z-i| < \sqrt{2}$ é sua série de *Taylor*; mais precisamente:

$$f(z) = \frac{1}{z+1} = \frac{1}{1+i+(z-i)} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1}{1-(-\dfrac{z-i}{1+i})}$$

$$= \frac{1}{1+i} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1+i)^n}\,(z-i)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}\,(z-i)^n,$$

para $\left|\dfrac{z-i}{1+i}\right| < 1$, ou seja, para $|z-i| < \sqrt{2}$.

A outra possível série de *Laurent* de $f(z)$ é na região $|z-i| > \sqrt{2}$; para tanto, basta fazer:

$$f(z) = \frac{1}{z+1} = \frac{1}{1+i+(z-i)} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{1-(-\dfrac{1+i}{z-i})}$$

$$= \frac{1}{z-i} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(1+i)^n}{(z-i)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(1+i)^n}{(z-i)^{n+1}},$$

para $\left|\dfrac{1+i}{z-i}\right| < 1$, ou seja, para $|z-i| > \sqrt{2}$.

6. Dada a função $f(z) = \dfrac{z+1}{(z-1)(z-i)}$

(a) Determinar o resíduo de f em cada um de seus pólos;

(b) Usar o Teorema dos Resíduos para calcular $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz$, onde Γ é a curva $|z| = 2$, orientada no sentido anti-horário.

Solução: (a) Observa-se que f admite pólos simples em 1 e i. Usando-se a Fórmula dos Resíduos, obtem-se:

$$\mathrm{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\,f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{z+1}{z-i} = \frac{2}{1-i} = 1+i;$$

$$\mathrm{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to 1}(z-i)\,f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{z+1}{z-1} = \frac{i+1}{i-1} = -i.$$

(b) Tem-se que ambos os pólos encontram-se no interior do disco $|z| < 2$; portanto, usando o Teorema dos Resíduos segue que:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\,\pi\,i\,(\mathrm{Res}_{z=1} f(z) + \mathrm{Res}_{z=i} f(z)) = 2\,\pi\,i[(1+i)+(-i)] = 2\,\pi\,i.$$