UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Departamento de Matemática

Gabarito da Avaliação Final de CM005 - 27/Junho/2019

1. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear dada por $T(f(t)) = \int_0^t f(s)\,ds$, para todo $f(t) \in P_1(\mathbb{R})$ e $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ as bases canônicas de $P_1(\mathbb{R})$ e $P_2(\mathbb{R})$, respectivamente.

(a) Determine as dimensões de $\ker(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$;

(b) Para $f(t) = 2 - t$ mostre que $[T(f(t))]_C = [T]_C^B \cdot [f(t)]_B$;

Solução: (a) Para $f(t) = a_0 + a_1 t \in P_1(\mathbb{R})$ tem-se que:

$$T(f(t)) = \int_0^t f(s)\,ds = \int_0^t f(s)\,ds = \int_0^t [a_0 + a_1 s]\,ds = \left[a_0 s + \frac{a_1}{2}\, s^2\right]_0^t = a_0 t + \frac{a_1}{2}\, t^2$$

e portanto, conclui-se que $\mathrm{Im}(T) = [t, \frac{1}{2}\, t^2] = [t, t^2]$; dado que o conjunto $\left\{t, t^2\right\}$ é linearmente independente, conclui-se que tal conjunto é uma base de $\mathrm{Im}(T)$ e assim, $dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$.

Além disso, tem-se que:

$$f(t) \in \ker(T) \Leftrightarrow T(f(t)) = 0 \Leftrightarrow a_0 t + a_1 \frac{t^{\,2}}{2} = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 \Leftrightarrow a_0 = a_1 = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0.$$

Portanto, $\ker(T) = \{0\}$ e assim, $dim(\ker(T)) = 0$.

(b) Tem-se que $\mathcal{B} = \{1, t\}$ e $\mathcal{C} = \left\{1, t, t^2\right\}$ são as bases canônicas de $P_1(\mathbb{R})$ e $P_2(\mathbb{R})$, respectivamente. Daí, segue que:

$$T(1) = T(1 \cdot 1 + 0 \cdot t) = 1 \cdot t + \frac{0}{2} \cdot t^2 \qquad \Rightarrow \qquad [T(1)]_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$T(t) = T(0 \cdot 1 + 1 \cdot t) = 0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot t^2 \qquad \Rightarrow \qquad [T(t)]_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

e assim, obtem-se a matriz de T com respeito às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$: $\qquad [T]_C^B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$

Por sua vez, para $f(t) = 2 - t$ tem-se que:

$$T(2 - t) = T(2 \cdot 1 - 1 \cdot t) = 2 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot t^2 \qquad \Rightarrow \qquad [T(2 - t)]_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

obtendo-se assim, que:

$$[T]_C^B \cdot [2 - t]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = [T(2 - t)]_C\,.$$

2. Seja $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ a transformação linear dada por $T(X) = X - X^t$, para toda matriz $X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Determine os autovalores de T.

Solução: Utilizando-se a base canônica $\mathcal{B}$ de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, obtem-se que:

$$T\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left[T\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right]_{B} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left[T\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right]_{B} = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left[T\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right]_{B} = \begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left[T\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right]_{B} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Segue daí, que:

$$[T]_{B}^{B} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

O próximo passo é determinar o polinômio característico $p_T(\alpha)$ de T:

$$p_T(\alpha) = \det\begin{bmatrix}-\alpha & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1-\alpha & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1-\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\alpha\end{bmatrix} = -\alpha(-1)^{1+1}\det\begin{bmatrix}1-\alpha & -1 & 0\\ -1 & 1-\alpha & 0\\ 0 & 0 & -\alpha\end{bmatrix} =$$

$$= -\alpha[(-\alpha(1-\alpha)^2 + 0 + 0) - (0 + 0 - \alpha)] = \alpha^2[(1 - 2\alpha + \alpha^2) - 1] = \alpha^3(\alpha - 2),$$

e como os autovalores de T são as raízes do polinômio característico, conclui-se que $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = 2$ são os autovalores de T.

3. Considere a transformação linear T dada na questão 2 acima.

(a) Determine uma base para cada autoespaço de T;

(b) Verifique se $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ pode ser expresso como soma direta de tais autoespaços.

Solução: (a) Para o autovalor $\alpha_1 = 0$, tem-se que:

$$T\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} = 0\cdot\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}$$

e esta última igualdade é válida se, e somente se, $b = c$; logo, os autovetores de T associados ao autovalor $\alpha_1 = 0$ são do tipo

$$X = \begin{bmatrix}a & b\\ b & d\end{bmatrix} = a\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} + b\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} + d\cdot\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad V_0 = \left[\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right].$$

Dado que as 3 matrizes geradoras de V_0 formam um conjunto linearmente independente, segue que essas 3 matrizes constituem uma base de V_0.

Para o autovalor $\alpha_2 = 2$, tem-se que:

$$T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = 2\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{bmatrix} \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{bmatrix}$$

e esta última igualdade é válida se, e somente se, $a = d = 0$ e $b = -c$; logo, os autovetores de T associados ao autovalor $\alpha_2 = 2$ são do tipo

$$X = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} = b\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad V_2 = \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right].$$

Como V_2 é gerado por uma matriz linearmente independente, segue que tal matriz constitui uma base de V_2.

(b) Observa-se que $\dim(V_0) = 3$ e $\dim(V_2) = 1$; além disso, V_0 é o s.e.v. das matrizes simétricas e V_2 é o s.e.v. das matrizes anti-simétricas; logo, $V_0 \cap V_2 = \{0\}$ e $\dim(V_0 \cap V_2) = 0$. Segue disto que:

$$\dim(V_0 + V_2) = \dim(V_0) + \dim(V_2) - \dim(V_0 \cap V_2) = 3 + 1 - 0 = 4 = \dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R})).$$

Portanto, tem-se que $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = V_0 \oplus V_2$.

4. Determine o polinômio minimal da transformação linear T dada na questão 2 acima.

Solução: Dado que o polinômio minimal de T possui as mesmas raízes do polinômio característico e é o polinômio de menor grau que anula a matriz de T, então os candidatos a polinômio minimal são:

$$m_1(\alpha) = \alpha\cdot(\alpha-2), \quad m_2(\alpha) = \alpha^2(\alpha-2) \quad \text{e} \quad m_3 = \alpha^3(\alpha-2).$$

Verifica-se, inicialmente, se $m_1(\alpha)$ anula a matriz de T (e denotando-se por I_4 a matriz identidade de ordem 4):

$$m_1\left([T]_B^B\right) = \left([T]_B^B\right)\cdot\left([T]_B^B - 2\,I_4\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, $m_1(\alpha)$ é o polinômio minimal de T.

5. Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(v) = proj_{(1,1,-1)}v$, para todo $v \in \mathbb{R}^3$.

(a) Mostre que T é transformação linear;

(a) Para $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ determine a expressão de $T(x, y, z)$;

(c) Determine bases ortonormais (no produto interno canônico) de $\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$;

(d) Mostre que $[\mathrm{Ker}(T)]^\perp = \mathrm{Im}(T)$.

Solução: (a) Para todos $v, w \in \mathbb{R}^3$ tem-se que:

$$T(v+w) = proj_u(v+w) = \frac{\langle v+w, u\rangle}{\langle u, u\rangle}\cdot u = \frac{\langle v, u\rangle}{\langle u, u\rangle}\cdot u + \frac{\langle w, u\rangle}{\langle u, u\rangle}\cdot u = proj_u v + proj_u w = T(v) + T(w). \quad (*)$$

Além disso, para todo $v \in \mathbb{R}^3$ e todo $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se que:

$$T(\alpha\cdot v) = proj_u(\alpha\cdot v) = \frac{\langle \alpha\cdot v, u\rangle}{\langle u, u\rangle}\cdot u = \alpha\cdot\frac{\langle v, u\rangle}{\langle u, u\rangle}\cdot u = \alpha\cdot proj_u(v) = \alpha\cdot T(v). \qquad (**)$$

Por $(*)$ e $(**)$ conclui-se que T é transformação linear.

(b) Tem-se que:

$$T(x,y,z) \;=\; proj_u(x,y,z) \;=\; \frac{\big\langle (x,y,z),(1,1,-1)\big\rangle}{\big\langle (1,1,-1),(1,1,-1)\big\rangle} \cdot (1,1,-1)$$

$$= \frac{x+y-z}{3} \cdot (1,1,-1) \;=\; (\frac{x+y-z}{3}, \frac{x+y-z}{3}, \frac{z-x-y}{3}).$$

(c) Dado que $T(v) = \alpha \cdot (1,1,-1)$, para todo $v \in \mathbb{R}^3$, vê-se que $\mathrm{Im}(T) = [(1,1,-1)]$ e devido a que $(1,1,-1)$ é linearmente independente, tem-se que $\{(1,1,-1)\}$ é uma base de $\mathrm{Im}(T)$ e $\{(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})\}$ é base ortonormal de $\mathrm{Im}(T)$.

Além disso, tem-se

$$v = (x,y,z) \in \; \ker(T) \Leftrightarrow (\frac{x+y-z}{3}, \frac{x+y-z}{3}, \frac{z-x-y}{3}) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow z = x+y \Leftrightarrow v = (x,y,x+y) = x \cdot (1,0,1) + y \cdot (0,1,1)$$

Logo, $\ker(T) = [(1,0,1),(0,1,1)]$ e assim, $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ é uma base de $\ker(T)$ (pois são vetores linearmente independentes). Como $\big\langle (1,0,1),(0,1,1)\big\rangle = 1$, tais vetores não são ortogonais entre si. Utilizando-se a projeção ortogonal pode-se construir uma base ortogonal para $\ker(T)$:

$$proj_{(1,0,1)}(0,1,1) = \frac{\big\langle (0,1,1),(1,0,1)\big\rangle}{\big\langle (1,0,1),(1,0,1)} \cdot (1,0,1) = \frac{1}{2} \cdot (1,0,1) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2});$$

Seja

$$v = (0,1,1) - proj_{(1,0,1)}(0,1,1) = (0,1,1) - (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2});$$

então $v \perp (1,0,1)$; daí, tomando-se os versores destes vetores obtem-se uma base ortonormal. Mais precisamente:

$$\mathcal{B} = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}})\}$$

é uma base ortonormal de $\mathrm{Ker}(T)$.

(d) Tem-se que $w = (x,y,z) \in [\ker(T)]^{\perp} \quad \Leftrightarrow \quad (x,y,z) \perp (1,0,1)$ e $(x,y,z) \perp (0,1,1)$

$$\Leftrightarrow \quad x+z=0 \quad \text{e} \quad y+z=0 \quad \Leftrightarrow \quad v = (-z,-z,z) = z \cdot (-1,-1,1).$$

Portanto, $[\ker(T)]^{\perp} = [(-1,-1,1)] = [(1,1,-1)] = \mathrm{Im}(T)$.