UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Departamento de Matemática

Gabarito da Avaliação Final de Cálculo IV - 10/Dez/2019

1. Seja a função $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $u(x, y) = x^2 - y^2 + (e^{-y} + e^y)\ \cos x$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   (a) Determine todas as funções analíticas $f(z)$ tais que $\text{Re}(f(z)) = u(x, y)$; **(10 pontos)**

   (b) Expresse tais funções na variável z; **(05 pontos)**

   (c) Determine a única função analítica $\hat{f}$ tal que $\text{Re}(\hat{f}(z)) = u(x, y)$ e $\hat{f}(0) = 2 + 2i$. **(05 pontos)**

   Solução: (a) Admita que $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ seja uma tal função anaítica; então as partes real e imaginária de f devem satisfazer às equações de *Cauchy-Riemann*:

$$\begin{array}{rrcccl} (I) & u_x(x,y) & = & 2x - (e^{-y} + e^y)\ \text{sen}\ x & = & v_y(x,y) \\ (II) & u_y(x,y) & = & -[2y - (e^y - e^{-y})\ \cos x] & = & -v_x(x,y) \end{array}$$

Daí, segue de (I) que:

$$v(x, y) = \int [2x - (e^{-y} + e^y)\ \text{sen}\ x]\, dy = 2xy - (e^y - e^{-y})\ \text{sen}\ x + \varphi(x)$$

$$\Rightarrow \quad v_x(x, y) = 2y - (e^y - e^{-y})\ \cos x + \varphi'(x) \quad \overset{(II)}{=} \quad 2y - (e^y - e^{-y})\ \cos x$$

$$\Rightarrow \quad \varphi'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = M \in \mathbb{R} \quad (\text{const.}) \quad \Rightarrow \quad v(x, y) = 2xy - (e^y - e^{-y})\ \text{sen}\ x + M$$

Portanto, obtém-se que:

$$f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y) = [x^2 - y^2 + (e^{-y} + e^y)\ \cos x] + i\, [2xy - (e^y - e^{-y})\ \text{sen}\ x + M]$$

onde $M \in \mathbb{R}$ é constante.

(b) Nota-se que:

$$\begin{aligned} f(z) &= [x^2 - y^2 + (e^{-y} + e^y)\ \cos x] + i\, [2xy - (e^y - e^{-y})\ \text{sen}\ x + M] \\ &= [x^2 + 2xy\, i - y^2] + e^{-y}[\ \cos x + i\ \text{sen}\ x] + e^y[\ \cos x - i\ \text{sen}\ x] + i\, M \\ &= (x + i\, y)^2 + e^{i^2 y} \cdot e^{ix} + e^{-i^2 y} \cdot e^{-ix} + i\, M = (x + i\, y)^2 + e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)} + i\, M \\ &= z^2 + e^{i\, z} + e^{-i\, z} + i\, M = z^2 + 2\ \cos\ z + i\, M. \end{aligned}$$

(c) Dado que que qualquer função analítica que possui $u(x, y)$ como parte real é da forma

$$f(z) = z^2 + 2\ \cos\ z + i\, M,$$

segue que $f(0) = 0^2 + 2\ \cos\ 0 + i\, M = 2 + i\, M$. Portanto, para que $\hat{f}(0) = 2 + 2i$, deve-se ter $M = 2$, ou seja, $\hat{f}(z) = z^2 + 2\ \cos\ z + 2i$.

2. Calcule a integral $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\text{sen}\ \pi z}{(z + 1)^4}\, dz$, onde Γ é o quadrado com vértices nos pontos ± 2 e $\pm 2i$, orientado no sentido anti-horário. **(20 pontos)**

   Solução: Nota-se inicialmente, que a curva Γ em questão é fechada, simples e suave por partes; além disso, a função $g(z) = \text{sen}\ \pi z$ é analítica sobre Γ e na região interna a Γ, conclui-se que pode-se aplicar a *Fórnula Integral de Cauchy para Derivadas*:

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \int_\Gamma \frac{g(z)}{(z - (-1))^4}\, dz = \frac{2\pi i}{3!}\, \frac{d^3 g}{dz^3}(-1).$$

Tem-se então:

$$\frac{dg}{dz}(z) = \pi \cos \pi z \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 g}{dz^2}(z) = -\pi^2 \operatorname{sen} \pi z \quad \Rightarrow \quad \frac{d^3 g}{dz^3}(z) = -\pi^3 \cos \pi z \quad \Rightarrow \quad \frac{d^3 g}{dz^3}(-1) = \pi^3.$$

Conclui-se que:

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \frac{2\pi i}{3!} \frac{d^3 g}{dz^3}(-1) = \frac{2\pi^4 i}{3 \cdot 2} = \frac{\pi^4 i}{3}.$$

3. Determine a série de *Taylor* da função $f(z) = \dfrac{z+2}{z^2 - 2z - 3}$ em torno de $z_0 = 1$ e o raio de convergência da mesma. (**20 pontos**)

Solução: Dado que f é um quociente de funções analíticas (pois são funções polinomiais) bem definidas em $z_0 = 1$, vê-se que f admite série de *Taylor* em tal ponto. Para simplificar os cálculos, usa-se o *Método das Frações Parciais*:

$$f(z) = \frac{z+2}{z^2 - 2z - 3} = \frac{z+2}{(z+1)(z-3)} = \frac{a}{z+1} + \frac{b}{z-3} = \frac{a(z-3) + b(z+1)}{(z+1)(z-3)} = \frac{(a+b)z + (-3a+b)}{(z+1)(z-3)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a + b = 1 \ \Rightarrow \ b = 1 - a \ \Rightarrow \ b = \dfrac{5}{4} \\ -3a + b = 2 \ \Rightarrow \ -3a + (1-a) = 2 \ \Rightarrow \ a = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Logo,

$$f(z) = -\frac{1}{4}\frac{1}{z+1} + \frac{5}{4}\frac{1}{z-3}.$$

Daí, segue que:

$$(I) \qquad \frac{1}{z+1} = \frac{1}{(z-1)+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1 - (-\frac{z-1}{2})} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}(z-1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n,$$

válida na região $\left|\dfrac{z-1}{2}\right| < 1$, ou seja, na região $|z-1| < 2$.

Por sua vez, tem-se que:

$$(II) \qquad \frac{1}{z-3} = \frac{1}{(z-1)-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1 - \frac{z-1}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}(z-1)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}(z-1)^n,$$

também válida na região $\left|\dfrac{z-1}{2}\right| < 1$, ou seja, na região $|z-1| < 2$.

De (I) e (II) obtém-se que:

$$f(z) = -\frac{1}{4}\frac{1}{z+1} + \frac{5}{4}\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{2^2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n - \frac{5}{2^2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}(z-1)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+3}}(z-1)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5}{2^{n+3}}(z-1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[(-1)^{n+1} - 5]}{2^{n+3}}(z-1)^n,$$

válida na região $|z-1| < 2$ (ou seja, o raio de convergência da série é $R = 2$).

4. Determine a série de *Laurent* da função $f(z) = \dfrac{1}{z(z-3i)}$, na região $1 < |z - 2i| < 2$. (**20 pontos**)

Solução: Utilizando-se o *Método das Frações Parciais*, obtém-se que:

$$f(z) = \frac{1}{z(z-3i)} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-3i} = \frac{a(z-3i) + bz}{z(z-31)} = \frac{(a+b)z - 3i\,a}{z(z-3i)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \;\Rightarrow\; b=-a \;\Rightarrow\; b=-\dfrac{i}{3} \\ -3i\,a=1 \;\Rightarrow\; a=-\dfrac{1}{3i}=\dfrac{i}{3} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad f(z)=\frac{i}{3}\,\frac{1}{z}-\frac{i}{3}\,\frac{1}{z-3i}.$$

V e-se então, que:

$$(I) \qquad \frac{1}{z}=\frac{1}{(z-2i)+2i}=\frac{1}{2i}\,\frac{1}{1-(-\frac{z-2i}{2i})}=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2i)^n}\,(z-2i)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}}\,(z-2i)^n,$$

válida na região $\left|\dfrac{z-2i}{2i}\right|$, ou seja, na região $|z-2i|<|2i|=2$.

Tem-se também que:

$$(II) \quad \frac{1}{z-3i}=\frac{1}{(z-2i)-i}=\frac{1}{z-2i}\,\frac{1}{1-\frac{i}{z-2i}}=\frac{1}{z-2i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n}{(z-2i)^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n}{(z-2i)^{n+1}},$$

válida na região $\left|\dfrac{i}{z-2i}\right|<1$, ou seja, na região $|z-2i|>|i|=1$.

De (I) e (II), conclui-se que:

$$f(z)=\frac{i}{3}\,\frac{1}{z}-\frac{i}{3}\,\frac{1}{z-3i}=\frac{i}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}}\,(z-2i)^n-\frac{i}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n}{(z-2i)^{n+1}}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i(-1)^n}{3\cdot 2^{n+1}i^{n+1}}\,(z-2i)^n-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^{n+1}}{3(z-2i)^{n+1}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n}{3\cdot 2^{n+1}}\,(z-2i)^n-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^{n+1}}{3(z-2i)^{n+1}},$$

válida na região $1<|z-2i|<2$.

5. Dadas a função $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3-3z^2+2z}$ e a curva $\Gamma:|2-2z|=1$, orientada no sentido anti-horário, use o *Teorema dos Resíduos* para calcular $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz$. **(20 pontos)**

Solução: Vê-se que a curva Γ em questão é dada pela equação $|2(1-z)|=1$, ou seja, $|z-1|=\dfrac{1}{2}$; trata-se, portanto, da circunferência de centro 1 e raio $\dfrac{1}{2}$ (curva simples, fechada e suave).

Além disso, tem-se que:

$$f(z)=\frac{e^z}{z^3-3z^2+2z}=\frac{e^z}{z(z^2-3z+2)}=\frac{e^z}{z(z-1)(z-2)};$$

logo, f é analítica sobre a curva Γ e na região interna à curva Γ, exceto no ponto $z_0=1$. Dado que a função $g(z)=\dfrac{e^z}{z(z-2)}$ é analítica sobre a curva Γ e na região interna à curva Γ e não se anula em $z_0=1$, conclui-se que tal ponto é pólo de ordem 1 de f; sendo assim, utilizando-se a *Fórmula dos Resíduos* obtém-se que:

$$\mathrm{Res}_{z=1}f(z) \;=\; \lim_{z\to 1}[(z-1)\cdot f(z)] \;=\; \lim_{z\to 1}\frac{e^z}{z(z-2)} \;=\; -e.$$

Logo, pelo *Teorema dos Resíduos* obtém-se que:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz=2\,\pi\,i\cdot\mathrm{Res}_{z=1}f(z) \;=\; -2\,e\,\pi\,i.$$

6. Seja $f : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = \cos x$, para todo $x \in (0,\pi]$ e $f(0) = 0$. Calcule a série de *Fourier* da extensão ímpar de f ao intervalo $[-\pi,\pi]$. **(20 pontos)**

Solução: Denotando-se por f_I a extensão ímpar de f, deve-se ter que sua série de *Fourier* é uma série de senos (ou seja, os coeficientes a_n's devem ser nulos).

Para o cálculo dos coeficientes b_n's, utiliza-se as identidades:

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen } (A+B) = \text{sen } A \cos B + \text{ sen } B \cos A \\ \\ \text{sen } (A-B) = \text{sen } A \cos B - \text{ sen } B \cos A \end{array}\right. \Rightarrow \quad \text{sen } A \cos B = \frac{1}{2}\,[\text{ sen } (A+b) + \text{ sen } (A-B)] \qquad (*)$$

Em particular, vê-se que se $A = B$ então sen $A \cos B = \dfrac{1}{2}$ sen $2A$; daí, segue que:

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_I(x) \text{ sen } x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \text{ sen } x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x \text{ sen } x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2} \text{ sen } 2x\,dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \text{sen } 2x\,dx = -\left.\frac{\cos 2x}{2\pi}\right|_0^{\pi} = 0.$$

Para $n > 1$, tem-se que:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_I(x) \text{ sen } nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \text{ sen } nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x \text{ sen } nx\,dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}[\text{ sen } (n+1)x + \text{ sen } (n-1)x]\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\text{ sen } (n+1)x + \text{ sen } (n-1)x]\,dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos (n+1)x}{n+1} - \frac{\cos (n-1)x}{n-1}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left[\left(-\frac{\cos (n+1)\pi}{n+1} - \frac{\cos (n-1)\pi}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^{n-1}}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}\right)\right] = \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{(-1)^{n+2}}{n+1} + \frac{(-1)^{n}}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}\right)\right]$$
$$= \frac{[(-1)^n + 1]}{\pi}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}\right) = \frac{2n\,[\,(-1)^n + 1\,]}{\pi(n+1)(n-1)}.$$

Portanto, $b_{2k-1} = 0$ e $b_{2k} = \dfrac{2\cdot(2k)\cdot 2}{\pi(2k+1)(2k-1)} = \dfrac{8k}{\pi(2k+1)(2k-1)}$, para $k = 1, 2, \cdots$. Conclui-se que a série de *Fourier* procurada é:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_{2n} \text{ sen } 2nx = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(2n-1)(2n+1)} \text{ sen } 2nx$$
$$= \frac{8}{\pi}\left[\frac{1}{1\cdot 3} \text{ sen } 2x + \frac{2}{3\cdot 5} \text{ sen } 4x + \frac{3}{5\cdot 7} \text{ sen } 6x + \frac{4}{7\cdot 9} \text{ sen } 8x + \cdots\right].$$

7. Considere o sistema

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \text{ para todo } (x,t) \in [0,2]\times[0,+\infty) & (i) \\ u(0,t) = 0 = u(2,t), \text{ para todo } t \in [0,+\infty) & (ii) \\ u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = 0, \text{ para todo } x \in [0,2]. & (iii) \end{cases}$$

(a) Determine uma solução $u(x,t)$ para tal sistema; **(10 pontos)**

(b) Mostre que $u(x,t)$, obtida no item (a), satisfaz às condições (i), (ii) e (iii). **(10 pontos)**

Solução: Sabe-se que a solução do sistema dado é da forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \text{sen } \frac{n\pi x}{2}\left[A_n \cos \frac{n\pi t}{2} + B_n \text{ sen } \frac{n\pi t}{2}\right],$$

onde os coeficientes são escolhidos de modo que $u(x,0)=x$ e $u_t(x,0)=0$. Portanto, deve-se ter:

$$x = u(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}\big[A_n \cos 0 + B_n \operatorname{sen} 0\big] = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2},$$

ou seja, os coeficientes A_n's devem ser escolhidos de modo que esta última série seja a série de *Fourier* da extensão ímpar de $f(x)=x$. Logo, deve ser:

$$A_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f_I(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}\, dx = \frac{2}{2}\int_{0}^{2} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}\, dx = \int_{0}^{2} x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}\, dx$$

$$= \left[-\frac{2x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 + \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \cos \frac{n\pi x}{2}\, dx\right] = -\frac{4}{n\pi}(-1)^n + \frac{4}{(n\pi)^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 = \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Além disso, tem-se que:

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}\big[-A_n \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{2} + B_n \frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi t}{2}\big]$$

$$\Rightarrow \quad u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}\big[-A_n \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} 0 + B_n \frac{2}{n\pi} \cos 0\big] = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}$$

Logo, para que $u_t(x,0)=0$, para todo $x \in [0,2]$, deve-se escolher $B_n = 0$, para $n = 1, 2, \cdots$. Desta forma, a solução será:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2} \cos \frac{n\pi t}{2} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2} \cos \frac{n\pi t}{2}.$$

(b) Tem-se que:

$$u_t(x,t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2} \cos \frac{n\pi t}{2}\right] = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{2} \cdot (-\frac{n\pi}{2})$$

$$\Rightarrow u_{tt}(x,t) = -\frac{d}{dt}\left[\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{2} \cdot \frac{n\pi}{2}\right] = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2} \cos \frac{n\pi t}{2} \cdot \left[\frac{n\pi}{2}\right]^2;$$

$$u_x(x,t) = \frac{d}{dx}\left[\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2} \cos \frac{n\pi t}{2}\right] = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos \frac{n\pi x}{2} \cos \frac{n\pi t}{2} \cdot \frac{n\pi}{2}$$

$$\Rightarrow u_{xx}(x,t) = \frac{d}{dx}\left[\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi x}{2} \cos \frac{n\pi t}{2}\right] = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2} \cos \frac{n\pi t}{2} \cdot \left[\frac{n\pi}{2}\right]^2,$$

e, portanto, $u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t)$, para todo (x,t) (ou seja, u satisfaz à condição (i).
Também, tem-se que

$$u(0,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} 0 \cos \frac{n\pi t}{2} = 0 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} n\pi \cos \frac{n\pi t}{2} = u(2,t),$$

e assim, u satisfaz à condição (ii).

$$u(x,0) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2} \cos 0 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2} = f(x) = x,$$

Também,

$$u_t(x,0) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2} \operatorname{sen} 0 \cdot (-\frac{n\pi}{2}) = 0,$$

e assim, u satisfaz às condições iniciais dadas em (iii).