UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Departamento de Matemática

1a. Avaliação de CM044 - Cálculo IV - Turma A - 14 de Setembro de 2017

1. Considere o conjunto $\mathcal{A} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \,|\, x \in \mathbb{Q} \text{ ou } y \in \mathbb{Q}\}$.

   (a) Verifique se $\mathcal{A}$ é um conjunto aberto;

   (b) Verifique se $\mathcal{A}$ é um conjunto fechado;

   (c) Determine o conjunto dos pontos de acumulação de $\mathcal{A}$;

   (d) Determine o conjunto dos pontos de fronteira de $\mathcal{A}$.

   Solução: (a) $\mathcal{A}$ não é aberto (pois seus pontos não são pontos interiores). Para ver isto, considere $z_0 = x_0 + i\, y_0 \in \mathcal{A}$ e qualquer disco aberto $D(z_0; r)$; em seguida, escolha $z_1 = x_1 + i\, y_1$, com $|z_0 - z_1| < r$ e $x_1, y_1 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Daí, $z_1 \notin \mathcal{A}$ mas $z_1 \in D(z_0; r)$, ou seja, $D(z_0; r)$ não está contido em $\mathcal{A}$ (qualquer que seja o raio $r > 0$) e, portanto, z_0 não é ponto interior de $\mathcal{A}$.

   (b) $\mathcal{A}$ não é fechado pois $\mathcal{A}^c$ não é aberto. De fato, se $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathcal{A}^c$ então x_0 e $y_0 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; sendo assim, para qualquer raio $r > 0$, pode-se escolher $z_1 = x_1 + i\, y_1$, com x_1 ou $y_1 \in \mathbb{Q}$ (ou seja, $z_1 \in \mathcal{A}$) tal que $|z_0 - z_1| < r$, ou seja, $z_1 \in D(z_0; r)$ mas $z_1 \notin \mathcal{A}^c$. Logo, z_0 não é ponto interior de $\mathcal{A}^c$ e $\mathcal{A}^c$ não é aberto.

   (c) O conjunto dos pontos de acumulação de $\mathcal{A}$ é $\mathbb{C}$. De fato, para mostrar que qualquer $z_0 \in \mathbb{C}$ é ponto de acumulação de $\mathcal{A}$ deve-se mostrar que para qualquer $r > 0$ tem-se que $[D(z_0; r) - \{z_0\}] \bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$. Admita que $z_0 = x_0 + i\, y_0$ e $x_0 \in \mathbb{Q}$; escolha $z_1 = x_0 + iy_1$, com $0 < |y_1 - y_0| < r$ e assim, terá-se que $z_1 \neq z_0$, $|z_1 - z_0| < r$ e $z_1 \in \mathcal{A}$. O caso em que $y_0 \in \mathbb{Q}$ é tratado de forma similar.

   (d) O conjunto do pontos de fronteira de $\mathcal{A}$ é $\mathbb{C}$. De fato, para mostrar a validade desta afirmação, deve-se mostrar que para todo $r > 0$ e todo $z_0 \in \mathbb{C}$ tem-se que $D(z_0; r) \bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$ e $D(z_0; r) \bigcap \mathcal{A}^c \neq \emptyset$. Se $z_0 \in \mathcal{A}$ então $D(z_0; r) \bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$ e como z_0 não é ponto interior de $\mathcal{A}$ então $D(z_0; r)$ não está contido em $\mathcal{A}$, ou seja, $D(z_0; r) \bigcap \mathcal{A}^c \neq \emptyset$. De modo análogo, se $z_0 \in \mathcal{A}^c$ então $D(z_0; r) \bigcap \mathcal{A}^c \neq \emptyset$ e como $\mathcal{A}^c$ não tem pontos interiores, então $D(z_0; r)$ não está contido em $\mathcal{A}^c$.

2. Escolha uma raíz z_0 da equação $z^4 = 1 + i\sqrt{3}$ e para tal escolha, localize z_0 e z_0^2 no plano complexo.

   Solução: Observe que $1 + i\sqrt{3} = 2\,(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2\,(\cos\,\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}) = 2\,e^{i\pi/3}$. Portanto, escrevendo-se $z = r\,e^{i\alpha}$ deve-se ter:

$$z^4 = 1 + i\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad r^4\,e^{4i\alpha} = 2\,e^{i\pi/3}$$

$$\Leftrightarrow \quad r^4 = 2 \text{ e } 4\alpha = \frac{\pi}{3} + 2n\pi, \text{ com } n = 0, 1, 2, 3$$

$$\Leftrightarrow \quad r = 2^{1/4} \text{ e } \alpha = \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}, \text{ com } n = 0, 1, 2, 3$$

   Façamos $z_0 = 2^{1/4} e^{i\pi/12}$; então $|z_0| = 2^{1/4}$ e $\text{Arg}(z_0) = \frac{\pi}{12}$ e para tal escolha de z_0, tem-se que $|z_0^2| = 2^{1/2}$ e $\text{Arg}(z_0^2) = \frac{\pi}{6}$, ou seja, $z_0^2 = 2^{1/2} e^{i\pi/6}$. Conhecendo-se seus módulos e argumentos, localizam-se então z_0 e z_0^2 no plano complexo.

3. Dada a função $f(z) = \overline{z}$, determine o conjunto dos pontos $z_0 \in \mathbb{C}$ tais que:

(a) f é contínua em z_0;

(b) f é derivável em z_0.

Solução: (a) Nota-se que para $z = x + iy$, pode-se escrever $f(z) = x - i\,y = u(x, y) + i\,v(x, y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dado que $u(x, y) = x$ e $v(x, y) = -y$ são funções polinomiais então u e v são contínuas em todo o $\mathbb{R}^2$; portanto, f é contínua em $\mathbb{C}$.

(b) Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ e vejamos se f é derivável em tal ponto. Dado que, por definição,

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z},$$

façamos $\Delta z = \Delta x$ e $\Delta z = i\,\Delta y$ e vejamos o que se passa com cada limite; mais precisamente,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + i\,y_0 + \Delta x) - f(x_0 + i\,y_0)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0 - i\,y_0 + \Delta x - x_0 + i\,y_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1;$$

por outro lado,

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0 + i\,y_0 + i\Delta y) - f(x_0 + i\,y_0)}{i\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x_0 - i\,y_0 - i\Delta y - x_0 + i\,y_0}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1.$$

Portanto, tal limite não existe e f não é derivável em qualquer $z_0 \in \mathbb{C}$.

4. Determine todas as funções analíticas f tais que $\mathcal{R}e(f(z)) = e^x \cdot (x \text{ cos } y - y \text{ sen } y)$, onde $z = x + iy$. Expresse tais funções na variável z.

Solução: Seja $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$; sendo f analítica deve-se ter $u_x(x, y) = v_y(x, y)$ e $u_y(x, y) = -v_x(x, y)$. Como

$$u_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \cdot (x \text{ cos } y - y \text{ sen } y)\right)$$

$$= e^x \cdot (x \text{ cos } y - y \text{ sen } y) + e^x \cdot \text{ cos } y = e^x \cdot ((x + 1) \text{ cos } y - y \text{ sen } y)$$

segue que:

$$v(x, y) = \int v_y(x, y) dy = \int e^x \cdot ((x + 1) \text{ cos } y - y \text{ sen } y) dy = e^x \cdot (x + 1) \int \text{ cos } y - e^x \cdot \int y \text{ sen } y\, dy$$

$$= e^x \cdot (x + 1) \text{ sen } y - e^x \cdot \int y \text{ sen } y\, dy = e^x \cdot (x + 1) \text{ sen } y - e^x \cdot \left[-y \text{ cos } y + \int \text{cos } y\, dy\right]$$

$$= e^x \cdot (x + 1) \text{ sen } y + e^x \cdot [y \text{ cos } y - \text{sen } y] + \varphi(x) = e^x \cdot (x \text{ sen } y + y \text{ cos } y) + \varphi(x).$$

Por outro lado:

$$v_x(x, y) = e^x \cdot ((x + 1) \text{ sen } y + y \text{ cos } y) + \varphi'(x)$$

$$= -u_y(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(e^x \cdot (x \text{ cos } y - y \text{ sen } y)\right)$$

$$= -e^x \cdot (-x \text{ sen } y - \text{ sen } y - y \text{ cos } y) = e^x \cdot ((x + 1) \text{ sen } y + y \text{ cos } y)$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = K \in \mathbb{R} \text{ (constante)}.$$

Portanto, $v(x, y) = e^x \cdot (x \text{ sen } y + y \text{ cos } y) + K$; daí, segue que:

$$f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y) = e^x \cdot (x \text{ cos } y - y \text{ sen } y) + i\,e^x \cdot (x \text{ sen } y + y \text{ cos } y) + i\,K$$

$$= e^x \cdot x(\text{ cos } y + i \text{ sen } y) + e^x \cdot y\,(- \text{ sen } y + i \text{ cos } y) + i\,K$$

$$= e^x \cdot x(\text{ cos } y + i \text{ sen } y) + i\,e^x \cdot y\,(i \text{ sen } y + \text{ cos } y) + i\,K = (x + i\,y)e^x(\text{ cos } y + i \text{ sen } y) + i\,K$$

$$= (x + i\,y)e^{x + i\,y} + i\,K = z \cdot e^z + i\,K.$$

5. Sejam a função $f(z) = \dfrac{z-2}{z^2-2z-3}$ e Γ a circunferência $|2z-3| = 4$, orientada no sentido anti-horário. Calcule $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz$.

Solução: Nota-se incialmente, que:

$$f(z) = \frac{z-2}{z^2-2z-3} = \frac{z-2}{(z+1)(z-3)} = \frac{a}{z+1} + \frac{b}{z-3} = \frac{a(z-3)+b(z+1)}{(z+1)(z-3)} = \frac{(a+b)z+(b-3a)}{(z+1)(z-3)}.$$

Deve-se ter então:

$$\begin{cases} a+b = 1 \Rightarrow a + (3a-2) = 1 \Rightarrow 4a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4}, \\ b - 3a = -2 \Rightarrow b = 3a-2 \Rightarrow b = \frac{9}{4} - 2 \Rightarrow b = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Portanto,

$$f(z) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{z+1} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z-3}.$$

Por sua vez, a circunferência Γ pode ser expressa na forma $2|z-\frac{3}{2}| = 4$, ou ainda, $|z-\frac{3}{2}| = 2$; trata-se portanto, da circunferência de centro $\frac{3}{2}$ e raio 2. Daí, segue-se que:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \frac{3}{4}\int_\Gamma \frac{1}{z+1}\,dz + \frac{1}{4}\int_\Gamma \frac{1}{z-3}\,dz = \frac{3}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot(2\pi i) = \frac{\pi i}{2}.$$

[Note que $\displaystyle\int_\Gamma \frac{1}{z+1}\,dz = 0$ pelo *Teorema da Integral de Cauchy* e $\displaystyle\int_\Gamma \frac{1}{z-3}\,dz = 2\pi i$ devido à *Fórmula Integral de Cauchy*.]

6. Sejam a função $f(z) = e^{z^2}(z+i)^{-3}$ e a curva Γ dada por $\Gamma(t) = 1+2e^{it}$, com $t \in [0, 2\pi]$. Calcule $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz$.

Solução: Tem-se que $|\Gamma(t) - 1| = |2e^{it}| = 2$, ou seja, Γ é a circunferência de centro 1 e raio 2; como $z_0 = -i$ está no interior da região limitada por Γ, pode-se aplicar a *Fórmula Integral para Derivadas* (com $n = 2$):

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \frac{e^{z^2}}{(z+i)^3}\,dz &= \frac{2\pi i}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left(e^{z^2}\right)_{z=-i} = \pi i \frac{d}{dz}\left(2z\,e^{z^2}\right)_{z=-i} \\ &= 2\pi i\left((1+2z^2)\,e^{z^2}\right)_{z=-i} = -\frac{2\pi i}{e}. \end{aligned}$$