<u>**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ**</u>

<u>**Departamento de Matemática**</u>

Gabarito da Avaliação Final de CM044 - 27/06/2019

1. Determine, se possível, uma função anaítica $f(z)$ tal que $\text{Re}(f(z)) = x^3 - 3xy^2 + e^y \cos x$ e $f(0) = 2i$. Expresse f na variável z.

Solução: Seja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ a função procurada; então as partes real e imaginária de f devem satisfazer às equações de *Cauchy-Riemann*: $u_x(x, y) = v_y(x, y)$ e $u_y(x, y) = -v_x(x, y)$ e assim, deve-se ter:

$$u_x(x, y) = 3x^2 - 3y^2 - e^y \text{ sen } x = v_y(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad v(x, y) = \int [3x^2 - 3y^2 - e^y \text{ sen } x]\, dy + \varphi(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad v(x, y) = 3x^2y - y^3 - e^y \text{ sen } x + \varphi(x)$$

Por outro lado, tem-se que:

$$u_y(x, y) = -6xy + e^y \cos x = -v_x(x, y) = -6xy + e^y \cos x - \varphi'(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(x) = M \ (\in \mathbb{R})$$

de onde se conclui que $v(x, y) = 3x^2y - y^3 - e^y \text{ sen } x + M$ e portanto,

$$f(z) = [x^3 - 3xy^2 + e^y \cos x] + i[3x^2y - y^3 - e^y \text{ sen } x + M]$$

$$= [x^3 + 3x^2y + 3xi^2y^2 + i^3y^3] + e^y \cdot e^{-ix} + iM = (x + iy)^3 + e^{-i(x+iy)} + iM = z^3 + e^{-iz} + iM.$$

Logo, $f(0) = 2i$ se, e somente se, $1 + iM = 2i$, ou seja, se, e somente se, $M = 2 + i$.

2. Dada a função $f(z) = \dfrac{z + 1}{z^2 - (1 + i)z + i}$, determine sua série de *Taylor* em $z_0 = 2+i$ e o raio de convergência de tal série.

Solução: Utilizando-se o *Método das Frações Parciais* obtem-se que:

$$f(z) = \frac{z + 1}{z^2 - (1 + i)z + i} = \frac{z + 1}{(z - i)(z - 1)} = \frac{a}{z - 1} + \frac{b}{z - i} = \frac{a(z - i) + b(z - 1)}{(z - i)(z - 1)} = \frac{(a + b)z - ia - b}{(z - i)(z - 1)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a + b = 1 \Rightarrow b = 1 - a \Rightarrow b = 1 - (1 + i) = -i \\ -ia - b = 1 \Rightarrow -ia - (1 - a) = 1 \Rightarrow (1 - i)a = 2 \Rightarrow a = \dfrac{2}{1 - i} = 1 + i \end{cases}$$

Portanto, $f(z) = \dfrac{1 + i}{z - 1} - \dfrac{i}{z - i}$ e assim, segue que:

$$(I) \qquad \frac{1 + i}{z - 1} = \frac{1 + i}{z - (2 + i) + 1 + i} = \frac{1 + i}{1 + i} \cdot \frac{1}{1 - (-\frac{z-(2+i)}{1+i})} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1 + i)^n} (z - (2 + i))^n,$$

para $\left|\frac{z-(2+i)}{1+i}\right| < 1$, ou seja, para $|z - (2 + i)| < |1 + i| = \sqrt{2}$.

$$(II) \qquad \frac{-i}{z - i} = \frac{-i}{z - (2 + i) + 2} = \frac{-i}{2} \cdot \frac{1}{1 - (-\frac{z-(2+i)}{2})} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} i}{2^{n+1}} (z-(2+i))^n,$$

para $\left|\frac{z-(2+i)}{2}\right| < 1$, ou seja, para $|z - (2 + i)| < 2$. Conclui-se de (I) e (II) que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1 + i)^n} (z-(2+i))^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} i}{2^{n+1}} (z-(2+i))^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{(1 + i)^n} - \frac{i}{2^{n+1}}\right] (-1)^n (z-(2+i))^n$$

para $|z - (2 + i)| < \sqrt{2}$.

3. Calcule $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\text{sen }\pi z}{(z+1)^4}\,dz$, onde Γ é a curva $|z-i|=3$, orientada no sentido anti-horário.

Solução: Observa-se que a curva Γ é a circunferência (curva suave, simples e fechada) com centro em i e raio 3, e portanto, o ponto $z_0=-1$ está no interior da região limitada por Γ.

Por sua vez, vê-se que a função $g(z)=\text{sen }\pi z$ é analítica sobre Γ e no interior da região limitada por Γ. Além disso, tem-se que $g'(z)=\pi\cos\pi z$, $g''(z)=-\pi^2\text{ sen }\pi z$ e $g'''(z)=-\pi^3\cos\pi z$.

Portanto, aplicando-se a *Fórmula Integral de Cauchy para Derivadas* conclui-se que:

$$\int_\Gamma \frac{\text{sen }\pi z}{(z+1)^4}\,dz=\frac{2\pi i}{3!}\cdot g'''(-1)=\frac{\pi i}{3}\cdot(\pi^3)=\frac{\pi^4 i}{3}.$$

4. Dada a função $f(z)=\dfrac{z+1}{(z-i)(z-1)}$, use a série de *Laurent* pertinente para determinar o resíduo de f no pólo $z_0=i$.

Solução: Deve-se determinar a série de *Laurent* de f na região $[D(i;R)-\{i\}]$, para algum raio $R>0$ (a ser determinado).

Nota-se que $f(z)=\dfrac{1}{z-i}\cdot\dfrac{z+1}{z-1}$, sendo que $\dfrac{1}{z-i}$ é sua própria série de *Laurent* na região $0<|z-i|<+\infty$, e que $\dfrac{z+1}{z-1}$ é analítica em algum disco $D(i;R)$ (e assim, sua série de *Laurent* será sua série de *Taylor* em tal disco). Daí, segue que:

$$\frac{z+1}{z-1}=\frac{z-1+2}{z-1}=1+\frac{2}{z-1}=1+\frac{2}{(z-i)+(i-1)}=1+\frac{2}{i-1}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{z-i}{i-1})}$$

$$=1+\frac{2}{i-1}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(i-1)^n}(z-i)^n=1+\frac{2}{i-1}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n}{(i-1)^{n+1}}(z-i)^n$$

$$=\frac{i+1}{i-1}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n}{(i-1)^{n+1}}(z-i)^n=-i+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n}{(i-1)^{n+1}}(z-i)^n,$$

para $\left|\dfrac{z-i}{i-1}\right|<1$, ou seja, para $|z-i|<\sqrt{2}$.

Portanto, na região $0<|z-i|<\sqrt{2}$ (ou seja, em $[D(i;\sqrt{2})-\{i\}]$) tem-se que:

$$f(z)=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{z+1}{z-1}=\frac{1}{z-i}\cdot\left[-i+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n}{(i-1)^{n+1}}(z-i)^n\right]$$

$$=\frac{-i}{z-i}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n}{(i-1)^{n+1}}(z-i)^{n-1}.$$

Dado que o resíduo de f em $z_0=i$ é o coeficiente b_1 na série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{(z-i)^n}+\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-i)^n$$

válida em $[D(i;\sqrt{2})-\{i\}]$, conclui-se que $\text{Res}_{z=i}f(z)=-i$.

5. Seja $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = x^2$, para todo $x \in [-\pi, \pi]$. Determine sua série de *Fourier* no intervalo $[-\pi, \pi]$.

   Solução: Nota-se que $f(-x) = (-x)^2 = x^2$, para todo $x \in [-\pi, \pi]$, ou seja, f é uma função par; logo, sua série de *Fourier* é uma série de cossenos (ou seja, os coeficientes b_n são todos nulos). Calculando-se os coeficientes a_n, tem-se que:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{3\pi}\,x^3\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3\pi}\,\pi^3 = \frac{2}{3}\pi^2;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{n}\,\text{sen}\,nx\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\,\text{sen}\,nx\,dx\right]$$

$$= \frac{4}{n\pi}\left[\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right] = \frac{4}{n^2\pi}\left[[\pi(-1)^n - 0] - \frac{1}{n}\,\text{sen}\,nx\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{4(-1)^n}{n^2},$$

   para $n = 1, 2, \cdots$.

   Portanto, o desenvolvimento em série de *Fourier* de f no intervalo $[-\pi, \pi]$ será:

$$f(x) \;=\; \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos nx \;=\; \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx\,.$$

6. (a) Utilize a série de *Fourier* obtida na questão acima para calcular a soma da série

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - + \cdots$$

   Solução: Dado que $f(0) = 0$, segue que:

$$0 = f(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cdot 1 \;\Rightarrow 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12},$$

   ou seja,

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - + \cdots = \frac{\pi^2}{12}.$$

   (b) Utilize a série de *Fourier* obtida na questão acima e a *Identidade de Parseval*

$$\|f\|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

   para calcular a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$.

   Solução: Utilizando-se a série de *Fourier* de f da questão 5, vê-se que:

$$a_0 = \frac{2}{3}\pi^2,\quad a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2} \quad \text{e} \quad b_n = 0,\quad \text{para } n = 1, 2, \cdots.$$

   Por sua vez, tem-se que:

$$\|f\|^2 = \langle f, f\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^4\,dx = \frac{2}{5\pi}x^5 = \frac{2\pi^4}{5}.$$

   Portanto, utilizando-se a *Identidade de Parseval* conlui-se que:

$$\frac{2\pi^4}{5} = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{16}{n^4} \;\Rightarrow\; (\frac{1}{5} - \frac{1}{9})\pi^4 = 8\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

7. Determine uma função $u : [0,4] \times [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ tal que:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, & \text{para todo } (x,t) \in [0,4] \times [0,+\infty); \\ u(0,t) = 0 = u(4,t), & \text{para todo } t \in [0,+\infty); \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = x, & \text{para todo } x \in [0,4] \end{cases}$$

Solução: Sabe-se que uma solução de tal equação é da forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{ sen } \frac{n\pi x}{4}[A_n \cos \frac{n\pi t}{4} + B_n \text{sen } \frac{n\pi t}{4}]$$

pois, neste caso, tem-se que $u(0,t) = 0 = u(4,t)$ para todo $t \in [0,+\infty)$; além disso, deve-se ter

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{ sen } \frac{n\pi x}{4} \cdot A_n = 0, \text{ para todo } x \in [0,4],$$

e assim, deve ser $A_n = 0$, para todo n, ou seja,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{ sen } \frac{n\pi x}{4} B_n \text{sen } \frac{n\pi t}{4}.$$

Daí, segue que:

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{ sen } \frac{n\pi x}{4} B_n \frac{n\pi}{4} \cos \frac{n\pi t}{4}.$$

Logo,

$$u_t(x,0) = x, \quad \forall x \in [0,4] \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \text{ sen } \frac{n\pi x}{4} B_n \frac{n\pi}{4} = x, \quad \forall x \in [0,4], \qquad (*)$$

ou seja, os coeficientes B_n devem ser escolhidos de modo que a série em $(*)$ seja a série de *Fourier* da extensão ímpar $g_I(x)$ da função $g(x) = x$ ao intervalo $[-4,4]$; mais precisamente, deve-se ter:

$$\begin{aligned} B_n \frac{n\pi}{4} = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4} g_I(x) \text{ sen } \frac{n\pi x}{4}\, dx = \frac{2}{4}\int_0^4 g(x) \text{ sen } \frac{n\pi x}{4}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^4 x \text{ sen } \frac{n\pi x}{4}\, dx \\ = \frac{1}{2}\left[-\frac{4x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{4}\Big|_0^4 + \frac{4}{n\pi}\int_0^4 \cos \frac{n\pi x}{4}\, dx \right] \\ = \frac{1}{2}\left[\frac{16(-1)^{n+1}}{n\pi} + (\frac{4}{n\pi})^2 \text{ sen } \frac{n\pi x}{4}\Big|_0^4 \right] = \frac{8(-1)^{n+1}}{n\pi} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad B_n = \frac{32(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2}, \qquad \text{para } n = 1, 2, \cdots.$$

Obtem-se que:

$$u(x,t) = \frac{32}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \text{sen } \frac{n\pi x}{4} \text{ sen } \frac{n\pi t}{4}.$$