<u>UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ</u>

Departamento de Matemática

Gabarito da 2a. Avaliação de CÁLCULO IV - 05/Junho/2018

1. Verifique se é convergente a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n+1}}{\sqrt{2^n}}$ e, em caso afirmativo, calcule sua soma.

Solução: Denotando-se $a_n = \frac{i^{n+1}}{\sqrt{2^n}}$, tem-se que:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\frac{i^{n+2}}{\sqrt{2^{n+1}}}\right|}{\left|\frac{i^{n+1}}{\sqrt{2^n}}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2^n}}{\sqrt{2^{n+1}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1;$$

portanto, pelo *Critério da Razão*, conclui-se que a série é convergente. Além disso, observa-se que o termo geral da série pode ser expresso na forma $\dfrac{i^{n+1}}{\sqrt{2^n}} = i \cdot \left(\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)^n$ e, dado que a série é convergente, tem-se que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n+1}}{\sqrt{2^n}} = i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^n = i \cdot \frac{1}{1 - \frac{i}{\sqrt{2}}} = i \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - i} = i \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - i} \cdot \frac{\sqrt{2} + i}{\sqrt{2} + i} = i \cdot \frac{2 + i\sqrt{2}}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{3} + i\frac{2}{3}.$$

2. Use a *Fórmula Integral de Cauchy para Derivadas* para calcular $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz$, sendo dadas $f(z) = \dfrac{\cos 2\pi z}{(z - \frac{1}{4})^4}$ e a curva $\Gamma(t) = 1 + e^{it}$, com $t \in [0, 2\pi]$.

Solução: Denote $F(z) = \cos 2\pi z$; daí, segue que:

$$F'(z) = -2\pi \text{ sen } 2\pi z\,; \qquad F''(z) = -4\pi^2 \cos 2\pi z\,; \qquad F'''(z) = 8\pi^3 \text{ sen } 2\pi z$$

Como Γ é a circunferência com centro 1 e raio 1, vê-se que o ponto $z_0 = \frac{1}{4}$ está no interior da região limitada por Γ; além disso, F é analítica sobre a curva Γ e também na região limitada por Γ. Portanto, aplicando-se a *Fórmula Integral de Cauchy para Derivadas*:

$$\int_\Gamma \frac{\cos 2\pi z}{(z - \frac{1}{4})^4} = 2\pi i \cdot \frac{F'''(\frac{1}{4})}{3!} = 2\pi i \cdot \frac{8\pi^3 \text{ sen } \frac{\pi}{2}}{6} = \frac{8\pi^4 i}{3}.$$

3. Use o *Teorema dos Resíduos* para calcular $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz$, sendo dadas $f(z) = \dfrac{\cos 2\pi z}{(z - \frac{1}{4})^4}$ e a curva $\Gamma(t) = 1 + e^{it}$, com $t \in [0, 2\pi]$.

Solução: Inicialmente, observa-se que $z_0 = \frac{1}{4}$ é pólo de f e está no interior da região limitada por Γ; em seguida, determina-se a série de *Laurent* de f na região $D(\frac{1}{4}; R) - \{\frac{1}{4}\}$, para algum $R > 0$. Dado que a função $g(z) = \cos 2\pi z$ é analítica no plano complexo, sua série de *Laurent* em $D(\frac{1}{4}; R) - \{\frac{1}{4}\}$ será sua série de *Taylor* nessa mesma região. Tem-se então:

$$\begin{array}{lcl}
g^{(0)}(z) = \cos 2\pi z & \Rightarrow & g^{(0)}(\frac{1}{4}) = 0 \\
g^{(1)}(z) = -2\pi \text{sen } 2\pi z & \Rightarrow & g^{(1)}(\frac{1}{4}) = -2\pi \\
g^{(2)}(z) = -4\pi^2 \cos 2\pi z & \Rightarrow & g^{(2)}(\frac{1}{4}) = 0 \\
g^{(3)}(z) = 8\pi^3 \text{sen } 2\pi z & \Rightarrow & g^{(3)}(\frac{1}{4}) = 8\pi^3 \\
g^{(4)}(z) = 16\pi^4 \cos 2\pi z & \Rightarrow & g^{(4)}(\frac{1}{4}) = 0 \\
g^{(5)}(z) = -32\pi^5 \text{sen } 2\pi z & \Rightarrow & g^{(5)}(\frac{1}{4}) = -32\pi^5 \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

Sendo assim, o desenvolvimento em série de *Taylor* de $g(z)$ em torno de $z_0 = \frac{1}{4}$ será:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(\frac{1}{4})}{n!} (z - \frac{1}{4})^n \qquad \Longrightarrow$$

$$\cos 2\pi z = -\frac{2\pi}{1!} (z - \frac{1}{4})^1 + \frac{8\pi^3}{3!} (z - \frac{1}{4})^3 - \frac{32\pi^5}{5!} (z - \frac{1}{4})^5 + \cdots ,$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, ou seja, para $0 \leq |z - \frac{1}{4}| < +\infty$.

Segue daí, que:

$$\frac{1}{(z-\frac{1}{4})^4} \cdot \cos 2\pi z = \frac{1}{(z-\frac{1}{4})^4} \left\{ -\frac{2\pi}{1!} (z - \frac{1}{4})^1 + \frac{8\pi^3}{3!} (z - \frac{1}{4})^3 - \frac{32\pi^5}{5!} (z - \frac{1}{4})^5 + \cdots \right\}$$

$$= -2\pi \cdot \frac{1}{(z-\frac{1}{4})^3} + \frac{8\pi^3}{3!} \cdot \frac{1}{(z-\frac{1}{4})^1} - \frac{32\pi^5}{5!} (z - \frac{1}{4})^1 + \cdots$$

para $0 < |z - \frac{1}{4}| < +\infty$.

Portanto, $\operatorname{Res}_{z=\frac{1}{4}} f(z) = b_1 = \frac{8\pi^3}{3!}$ e pelo *Teorema dos Resíduos*, obtem-se que:

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z=\frac{1}{4}} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{8\pi^3}{3!} = \frac{8\pi^4 i}{3}.$$

4. Dada a função $f(z) = \ln \dfrac{z+1}{z-1}$, determine sua série de *Taylor* com centro em $z_0 = 2$ e o raio de convergência da mesma.

Solução: Dado que $\ln \dfrac{z+1}{z-1} = \ln(z+1) - \ln(z-1)$, calcula-se a série de *Taylor* de cada uma das parcelas. Daí, denotando-se $g(w) = \ln w$, tem-se que:

$$g^{(0)}(w) = \ln w\,; \quad g^{(1)}(w) = w^{-1}\,; \quad g^{(2)}(w) = -1w^{-2}\,; \quad g^{(3)}(w) = 1 \cdot 2w^{-3}$$
$$g^{(4)}(w) = -1 \cdot 2 \cdot 3w^{-4}\,; \cdots ; \quad g^{(n)}(w) = (-1)^{n+1}(n-1)!w^{-n}, \quad \text{para } n = 1, 2, \cdots$$

Segue daí, que:

$$\frac{d^n}{dz^n}\ln(z+1) = (-1)^{n+1}(n-1)!(z+1)^{-n} \qquad \text{e} \qquad \frac{d^n}{dz^n}\ln(z-1) = (-1)^{n+1}(n-1)!(z-1)^{-n}, \quad \text{para } n = 1, 2, \cdots$$

e para $z = 2$ obtem-se que:

$$\frac{d^n}{dz^n}\ln(3) = (-1)^{n+1}(n-1)!(3)^{-n} \qquad \text{e} \qquad \frac{d^n}{dz^n}\ln(1) = (-1)^{n+1}(n-1)!(1)^{-n}, \quad \text{para } n = 1, 2, \cdots .$$

Portanto, colocando-se $a_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\ln(3)$, para $n = 1, 2, \cdots$ tem-se que:

$$\ln(z+1) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z-2)^n = \ln 3 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\, 3^n} (z-2)^n,$$

com raio de convergência R_1 dado por:

$$R_1 = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{n\,3^n}}{\frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)\,3^{n+1}}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\,3^{n+1}}{n\,3^n} = 3 \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 3 \lim_{n\to+\infty} (1 + \frac{1}{n}) = 3.$$

Por outro lado, colocando-se $b_{_n} = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\ln(1)$, para $n = 1, 2, \cdots$ tem-se que:

$$\ln(z-1) = b_{_0} + \sum_{n=1}^{+\infty} b_{_n}(z-2)^n = \ln 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(z-2)^n,$$

com raio de convergência $R_{_2}$ dado por:

$$R_{_2} = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{n}}{\frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)}{n} = 1.$$

Portanto, o desenvolvimento de $f(z)$ em série de *Taylor* em torno de $z_{_0} = 2$ é dado por:

$$f(z) = \ln 3 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\,3^n}(z-2)^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(z-2)^n = \ln 3 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{[1+3^n]}{3^n}(z-2)^n$$

válido para $|z-2| < 1$ (ou seja, válido no menor dos dois discos concêntricos).

5. Considere a função $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)^2(z-1)}$.

   (a) Calcule sua série de *Laurent* na região $1 < |z| < 2$;

   (b) Calcule $\text{Res}_{_{z=2}} f(z)$, utilizando a *Fórmula dos Resíduos*;

   (c) Calcule $\text{Res}_{_{z=1}} f(z)$, utilizando sua série de *Laurent*.

Solução: (a) Utilizando-se o método das frações parciais, pode-se expressar $f(z)$ como segue:

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{(z-2)^2(z-1)} &= \frac{a}{(z-2)^2} + \frac{b}{z-2} + \frac{c}{z-1} = \frac{a(z-1)+b(z-2)(z-1)+c(z-2)^2}{(z-2)^2(z-1)} \\ &= \frac{(b+c)z^2+(a-3b-4c)z+(-a+2b+4c)}{(z-2)^2(z-1)} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b+c=0 \Rightarrow b=-c \Rightarrow b=-1 \\ a-3b-4c=0 \Rightarrow a=3b+4c=3(-c)+4c=c \Rightarrow a=1 \\ -a+2b+4c=1 \Rightarrow -c-2c+4c=1 \Rightarrow c=1 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \quad f(z) = \frac{1}{(z-2)^2} - \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-1}.$$

Como as funções $\dfrac{1}{(z-2)^2}$ e $\dfrac{1}{z-2}$ são analíticas no disco $|z| < 2$, tem-se que suas respectivas séries de *Laurent* em tal disco corresponde às suas respectivas séries de *Taylor*. Denotando-se $g(z) = (z-2)^{-2}$, segue que:

$$g^{(0)}(z) = (z-2)^{-2}\,;\ g^{(1)}(z) = -2(z-2)^{-3}\,;\ g^{(2)}(z) = 2\cdot 3\cdot(z-2)^{-4}\,;\cdots$$

$$\cdots\,;\ g^{(n)}(z) = (-1)^n(n+1)!(z-2)^{-(n+2)},\ \ \text{para } n = 0,1,2,\cdots$$

$$\Rightarrow\ g^{(n)}(0) = (-1)^n(n+1)!(-2)^{-(n+2)} = \frac{(-1)^n(n+1)!}{(-1)^{(n+2)}2^{(n+2)}} = \frac{(n+1)!}{2^{(n+2)}},\ \ \text{para } n = 0,1,2,\cdots.$$

Portanto, a série de *Taylor* de $g(z)$ em torno de $z_{_0} = 0$ é dada por:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!}\, z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)}{2^{(n+2)}}\, z^n.$$

Nota-se que o raio de convergência de tal série é igual a 2 pois

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)}{2^{(n+2)}}}{\frac{(n+2)}{2^{(n+3)}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)2^{(n+3)}}{(n+2)2^{(n+2)}} = 2\cdot \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = 2.$$

Além disso, tem-se também que:

$$-\frac{1}{z-2} = \frac{1}{2-z} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}},$$

para $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$, ou seja, para $|z| < 2$.

Por sua vez, a função $\dfrac{1}{z-1}$ não é analítica no disco $|z| < 2$, mas o é no exterior do disco fechado $1 < |z|$ e assim, sua série de *Laurent* em tal coroa só apresenta potências negativas de $(z-0)$; mais precisamente,

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+1}},$$

para $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, ou seja, para $1 < |z|$.

Portanto, na interseção das regiões $|z| < 2$ e $1 < |z|$ (ou seja, na região $1 < |z| < 2$) a série de *Laurent* de f (com centro em $z_0 = 0$) assume a forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)}{2^{(n+2)}}\, z^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\, z^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{(n+1)}{2^{(n+2)}} + \frac{1}{2^{n+1}}\right] z^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+1}}.$$

(b) Nota-se que:

$$f(z) = \frac{\frac{1}{z-1}}{(z-2)^2}; \qquad (*)$$

sendo assim, vê-se que $z_0 = 2$ é um zero de ordem 2 do denominador de $(*)$ e não é zero do numerador de $(*)$ e daí, conclui-se que $z_0 = 2$ é pólo de ordem 2 de f. Portanto, pela *Fórmula dos Resíduos*, segue que

$$\mathrm{Res}_{z=2} f(z) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 2}\frac{d^{(2-1)}}{dz^{(2-1)}}\left\{(z-2)^2\cdot f(z)\right\} = \lim_{z\to 2}\frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{z-1}\right\} = \lim_{z\to 2}(-1)\cdot\frac{1}{(z-1)^2} = -1.$$

(c) Inicialmente, observa-se que deve-se determinar a série de *Laurent* de f na região $D(1;R) - \{1\}$ (disco sem o centro) para o maior R possível (a ser determinado), onde f é analítica. Dado que f tem pólos em $z_0 = 1$ e $z_1 = 2$, segue que o maior R possível é $R = 1$ (distância entre os dois pólos). Uma vez que

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2} - \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-1},$$

e

$$\frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} 0\cdot(z-1)^n + \frac{1}{z-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} 0\cdot(z-1)^{(-n)}, \qquad \text{(I)}$$

(série de potências positivas e negativas de $(z-1)$ na região $|z-1|>0$) então esta última série já representa a série de *Laurent* de $\dfrac{1}{z-1}$ nesta mesma região; por outro lado, as funções $(z-2)^{-2}$ e $(z-2)^{-1}$ são analíticas no disco $D(1;1)$ (com centro em 1 e raio 1) e assim, as respectivas séries de *Laurent* de tais funções em tal disco são as suas respectivas séries de *Taylor* neste disco.

Viu-se no item (a) acima que:

$$g^{(n)}(z) = \frac{d^n}{dz^n}[(z-2)^{-2}] = (-1)^n (n+1)!(z-2)^{-(n+2)}, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$\Rightarrow g^{(n)}(1) = (-1)^n (n+1)!(-1)^{-(n+2)} = (n+1)!\,, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \cdots;$$

sendo assim, o desenvolvimento em série de *Taylor* de $(z-2)^2$ no disco $D(1;1)$ será:

$$\frac{1}{(z-2)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{n!}(z-1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(z-1)^n. \qquad \text{(II)}$$

(Nota-se que o raio de convergência de tal série é obtido fazendo-se:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+2}\right) = 1.)$$

Por sua vez, a série de *Taylor* de $(z-2)^{-1}$ no disco $D(1;1)$ pode ser assim obtida:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-1)-1} = -\frac{1}{1-(z-1)} = -\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n, \qquad \text{(III)}$$

a qual é válida para $|z-1|<1$.

Portanto, por (I), (II) e (III), conclui-se que:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(z-1)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n = \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)\,(z-1)^n$$

é a série de *Laurent* de f com centro em 1 e na região $D(1;1)-\{1\}$. Portanto, $z_0 = 1$ é pólo de ordem 1 de f e como $b_1 = 1$ segue que

$$\mathrm{Res}_{z=1} f(z) = 1.$$