UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Gabarito da 3a. Avaliação de CM005 - 19/Junho/2018

Seja V um espaço vetorial real com produto interno $< \cdot, \cdot >$. Considere as seguintes definições:

(i) (norma de vetor) $\|v\| = \sqrt{< v, v >}$;

(ii) (distância entre vetores) $d(v, w) = \|v - w\|$;

(iii) (ângulo entre vetores não-nulos) $\alpha = \text{arc cos}\left(\dfrac{< v, w >}{\|v\|\|w\|}\right)$

1. Seja $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ munido do produto interno $< (a_{ij}), (b_{ij}) >= a_{11}b_{11} + 2a_{12}b_{12} + 2a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$. Sendo dados $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $(b_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular:

   (a) $d\left((a_{ij}), (b_{ij})\right)$;

   (b) o ângulo entre (a_{ij}) e (b_{ij}).

   (c) a projeção ortogonal de (a_{ij}) sobre (b_{ij}).

   Solução: (a) Tem-se que:

$$(a_{ij}) - (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = C$$

$$\Rightarrow < C, C >= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 + 2 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-1)^2 + (-2)^2 = 15;$$

   logo,

$$d\left((a_{ij}), (b_{ij})\right) = \|(a_{ij}) - (b_{ij})\| = \|C\| = \sqrt{< C, C >} = \sqrt{15}.$$

   (b) Seja α o ângulo entre (a_{ij}) e (b_{ij}); tem-se então:

$$\left\langle (a_{ij}), (b_{ij}) \right\rangle = a_{11}b_{11} + 2a_{12}b_{12} + 2a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = -3;$$

$$\|(a_{ij})\| = \sqrt{\left\langle (a_{ij}), (a_{ij}) \right\rangle} = \sqrt{1^2 + 2 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\|(b_{ij})\| = \sqrt{\left\langle (b_{ij}), (b_{ij}) \right\rangle} = \sqrt{0^2 + 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 + 1^2} = \sqrt{5};$$

$$\Rightarrow \alpha = \text{ arc cos } \frac{\left\langle (a_{ij}), (b_{ij}) \right\rangle}{\|(a_{ij})\| \cdot \|(b_{ij})\|} = \frac{-3}{2 \cdot \sqrt{5}}.$$

   (c)

$$proj_{(b_{ij})}(a_{ij}) = \frac{\left\langle (a_{ij}), (b_{ij}) \right\rangle}{\left\langle (b_{ij}), (b_{ij}) \right\rangle} \cdot (b_{ij}) = -\frac{3}{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

2. Em $\mathbb{R}^3$, considere o produto interno $< (x, y, z), (a, b, c) >= 2xa + yb + 2zc$ e seja $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + y - z = 0\}$. Determinar $W^\perp$.

   Solução: Se $w = (x, y, z) \in W$ então $z = 2x + y$ e portanto, $w = (x, y, 2x + y) = x \cdot (1, 0, 2) + y \cdot (0, 1, 1)$, ou seja, $W = [(1, 0, 2), (0, 1, 1)]$. Daí, $v = (a, b, c) \in W^\perp$ se, e somente se, $v \perp (1, 0, 2)$ e $v \perp (0, 1, 1)$; segue que:

$$< (a, b, c), (1, 0, 2) >= 0 \Leftrightarrow 2 \cdot a \cdot 1 + b \cdot 0 + 2 \cdot c \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow 2a + 4c = 0 \Leftrightarrow a = -2c$$

e

$$< (a,b,c),(0,1,1) >=\Leftrightarrow 2\cdot a\cdot 0+b\cdot 1+2\cdot c\cdot 1=0 \Leftrightarrow b+2c=0 \Leftrightarrow b=-2c.$$

Portanto, $v=(a,b,c)\in W^{\perp}$ se, e somente se, $v=(-2c,-2c,c)=c\cdot(-1,-1,1)$; portanto, $W^{\perp}=[(-1,-1,1)]$.

3. Em $\mathbb{R}^3$, considere o produto interno canônico e seja $u\in\mathbb{R}^3$ um vetor não-nulo (fixo). Seja $T:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por $T(v)=\text{proj}_u v$. Determinar $\ker(T)$ e $\text{Im}(T)$, para o caso em que $u=(1,1,-1)$.

   Solução: Denotando-se $v=(x,y,z)$, tem-se que:

$$T_u(v)=T_{(1,1,-1)}(x,y,z)=\text{proj}_{(1,1,-1)}(x,y,z)=\frac{<(x,y,z),(1,1,-1)>}{<(1,1,-1),(1,1,-1)>}\cdot(1,1,-1)=\frac{x+y-z}{3}\cdot(1,1,-1).$$

   Portanto, $\text{Im}(T)=[(1,1,-1)]$; além disso, $v=(x,y,z)\in\ker(T)$ se, e somente se, $T_{(1,1,-1)}(x,y,z)=(0,0,0)$, ou seja, $x+y-z3\cdot(1,1,-1)=(0,0,0)$, o que ocorre apenas se $x+y-z=0$, ou ainda, se $z=x+y$. Portanto, $v=(x,y,z)\in\ker(T)$ se, e somente se, $v=(x,y,x+y)=x\cdot(1,0,1)+y\cdot(0,1,1)$, de onde se conclui que $\ker(T)=[(1,0,1),(0,1,1)]$.

4. Em $P_1(\mathbb{R})$, considere o produto interno $<f,g>=\int_0^1 f(t)\cdot g(t)\,dt$. Utilizar o processo de *Gram-Schmidt* para construir uma base ortonormal para $P_1(\mathbb{R})$ a partir da base canônica.

   Solução: Para a base canônica $\mathcal{B}=\{1,t\}$ de $P_1(\mathbb{R})$ tem-se que:

$$\langle 1,t\rangle=\int_0^1 1\cdot t\,dt=\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1=\frac{1}{2}\neq 0;$$

   logo, os vetores da base canônica não são mutuamente ortogonais. Defina, inicialmente, $v_1=\frac{1}{\|1\|}$; daí, segue que:

$$\|1\|=\int_0^1 1^2\,dt=t\Big|_0^1=1;$$

   logo, deve ser $v_1=1$. Em seguida, defina $v_2'=t-\text{proj}_{v_1}t$; daí, segue que:

$$v_2'=t-\frac{<t,1>}{<1,1>}\cdot 1=t-\frac{\frac{1}{2}}{1}\cdot 1=t-\frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \|v_2'\|=\sqrt{<v_2',v_2'>}=\sqrt{\int_0^1(t-\frac{1}{2})^2dt}=\sqrt{\left.\frac{(t-\frac{1}{2})^3}{3}\right|_0^1}=\sqrt{\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right)}=\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

   Finalmente, defina $v_2=\frac{v_2'}{\|v_2'\|}=2\sqrt{3}\cdot(t-\frac{1}{2})$; obtem-se assim, que $\mathcal{C}=\{v_1,v_2\}=\left\{1,2\sqrt{3}\cdot(t-\frac{1}{2})\right\}$ é base ortonormal de $P_1(\mathbb{R})$.