UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Departamento de Matemática

Gabarito da 3a. Avaliação de CM044 - 19/Junho/2018

1. Seja $f : [-\pi, 0) \cup (0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = 2$, se $x \in (0, \pi]$, e $f(x) = -2$, se $x \in [-\pi, 0)$. Determinar a série de *Fourier* de f.

Solução:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} (-2)\,dx + \int_{0}^{\pi} 2\,dx\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{(-2)x\Big|_{-\pi}^{0} + (2)x\Big|_{0}^{\pi}\right\} = \frac{1}{\pi}(-2\pi + 2\pi) = 0;$$

Para $n \geq 1$, tem-se que:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} (-2)\,\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} 2\,\cos nx\,dx\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{(-2)\frac{\text{sen}\ nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} + 2\frac{\text{sen}\ nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right\} = 0.$$

Por outro lado, para todo $n \geq 1$, tem-se também:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} (-2)\ \text{sen}\ nx\,dx + \int_{0}^{\pi} 2\ \text{sen}\ nx\,dx\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{2\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} - 2\frac{\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left\{(1 - (-1)^n) - ((-1)^n - 1)\right\} = \frac{4}{\pi n}(1 - (-1)^n);$$

portanto,

$$b_{2n} = 0 \qquad \text{e} \qquad b_{2n-1} = \frac{8}{\pi(2n-1)}, \qquad \text{para } n \geq 1.$$

Segue daí, que a série procurada é:

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{+\infty} b_{2n-1}\ \text{sen}\ (2n-1)x = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1}\ \text{sen}\ (2n-1)x$$

$$= \frac{8}{\pi}\left\{1 \cdot\ \text{sen}\ x + \frac{1}{3} \cdot\ \text{sen}\ 3x + \frac{1}{5} \cdot\ \text{sen}\ 5x + \cdots\right\}.$$

2. Utilizar a série de *Fourier* de f obtida na questão acima para determinar a soma da série alternada $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Solução: Nota-se, inicialmente, que f' é contínua no ponto $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$; portanto, a soma da série de *Fourier* de f em x_0 coincide com o valor $f(x_0)$. Daí, segue-se que:

$$2 = f(\frac{\pi}{2}) = \frac{8}{\pi}\left\{1 \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{1}{7} \cdot (-1) + \cdots\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

3. Seja a função $f(x)=|x|$, para todo $x\in[-3,3]$. Determinar sua série de *Fourier* no intervalo $[-3,3]$.

Solução: Tem-se que:

$$f(-x)=|-x|=|x|=f(x), \qquad \text{para todo } x\in[-3,3],$$

e, portanto, f é uma função par; logo, sua série de *Fourier* no intervalo em questão é uma série de cossenos (ou seja, $b_n=0$, para todo $n\geq 1$). Tem-se então:

$$a_0=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}|x|\,dx=\frac{2}{3}\int_{0}^{3}x\,dx=\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^3=3;$$

além disso, para $n\geq 1$, tem-se que:

$$a_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}|x|\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx=\frac{2}{3}\int_{0}^{3}x\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx=\frac{2}{3}\left\{\frac{3}{n\pi}\cdot x\cdot\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}\bigg|_0^3-\frac{3}{n\pi}\int_0^3\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}\,dx\right\}$$

$$\left[u=x\Rightarrow du=dx;\qquad dv=\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx\Rightarrow v=\frac{3}{n\pi}\cdot\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}\right]$$

$$=\frac{2}{n\pi}\int_0^3\left(-\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}\right)dx=\frac{2}{n\pi}\cdot\frac{3}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}\bigg|_0^3=\frac{6}{(n\pi)^2}\cdot[(-1)^n-1]=\begin{cases}0, & \text{se } n \text{ é par},\\ -\frac{12}{(n\pi)^2}, & \text{se } n \text{ é ímpar},\end{cases}$$

ou seja,

$$a_{2n}=0 \qquad \text{e} \qquad a_{2n-1}=-\frac{12}{(2n-1)^2\pi^2}, \qquad \text{para todo } n\geq 1.$$

Obtem-se, assim a série de *Fourier* de f:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_{2n-1}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{3}=\frac{3}{2}-\frac{12}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{3}.$$

4. Sejam a função $f(x)=e^x$, para $x\in[0,\pi]$ e $f_P(x)$ a extensão par de f ao intervalo $[-\pi,\pi]$. Determinar a série de *Fourier* de f_I no intervalo $[-\pi,\pi]$.

Solução: Nota-se que $f_P(x)=f(x)$ se $x\in[0,\pi]$ e que $f_P(x)=f(-x)$, se $x\in[-\pi,0]$; logo, f_P é função par e sua série de *Fourier* é uma série de cossenos (ou seja, $b_n=0$ para todo $n\geq 1$).

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_P(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}e^x\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot e^x\bigg|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}(e^{\pi}-1);$$

e para $n\geq 1$:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_P(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}e^x\cos nx\,dx$$

$$\left[u=e^x\Rightarrow du=e^x\,dx;\qquad dv=\cos nx\,dx\Rightarrow v=\frac{1}{n}\operatorname{sen} nx;\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{e^x\cdot\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\bigg|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}e^x\operatorname{sen} nx\,dx=\right\}=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}e^x\cdot(-\operatorname{sen} nx)\,dx=$$

$$\left[u=e^x\Rightarrow du=e^x\,dx;\qquad dv=-\operatorname{sen} nx\,dx\Rightarrow v=\frac{1}{n}\cos nx;\right]$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}\left\{ e^x \cdot \ \cos\, nx\Big|_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cdot \cos\, nx)\, dx \right\}$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}[\, e^\pi \cdot (-1)^n - 1] - \frac{2}{n^2\pi}\int_0^\pi e^x \cdot \cos\, nx)\, dx$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi e^x \cos\, nx\, dx = \frac{1}{n^2}[\, e^\pi \cdot (-1)^n - 1] - \frac{1}{n^2}\int_0^\pi e^x \cdot \cos\, nx\, dx$$

$$\Rightarrow (1 + \frac{1}{n^2})\int_0^\pi e^x \cos\, nx\, dx = \frac{1}{n^2}[\, e^\pi \cdot (-1)^n - 1]$$

$$\Rightarrow \frac{n^2+1}{n^2}\int_0^\pi e^x \cos\, nx\, dx = \frac{1}{n^2}[\, e^\pi \cdot (-1)^n - 1]$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi e^x \cos\, nx\, dx = \frac{1}{n^2+1}[\, e^\pi \cdot (-1)^n - 1]$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{\pi(n^2+1)}[\, e^\pi \cdot (-1)^n - 1], \qquad \text{para todo } n \geq 1.$$

Sendo assim, a série de *Fourier* de f_P será:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\ \cos\, nx = \frac{1}{\pi}(e^\pi - 1) + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{e^\pi \cdot (-1)^n - 1}{n^2+1}\right)\ \cos\, nx$$

5. Seja W o subespaço vetorial de $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$ gerado pelas funções 1 e cos x. Utilizar o produto interno $< f, g >= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x)\, dx$ para calcular $proj_W f$, sendo $f(x) = x^2$, para todo $x \in [-\pi, \pi]$.

Solução: Dado que as funções 1 e cos x são mutuamente ortogonais tem-se que:

$$proj_W f = proj_1 f + proj_{\cos\, x} f = \frac{< f(x), 1 >}{< 1, 1 >}\, 1 + \frac{< f(x), \cos\, x >}{< \cos\, x, \cos\, x >} \cos\, x$$

Tem-se então:

$$< 1, 1 >= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1^2\, dx = \frac{1}{\pi} \cdot x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2;$$

$$< \cos\, x, \cos\, x >= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\, 2x]\, dx = \frac{1}{2\pi}\left\{ x\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}\, \text{sen}\, 2x\Big|_{-\pi}^{\pi} \right\} = \frac{1}{2\pi}(2\pi + 0) = 1;$$

$$< f(x), 1 >=< x^2, 1 >= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot 1\, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{3\pi} \cdot 2\pi^3 = \frac{2\pi^2}{3};$$

$$< f(x), \cos\, x >= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot \cos\, x\, dx = \frac{1}{\pi}\left\{ x^2 \cdot \text{sen}\, x\Big|_{-\pi}^{\pi} - 2\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \text{sen}\, x\, dx \right\}$$

$$[\, u = x^2 \Rightarrow du = 2x\, dx; \qquad dv = \cos\, x\, dx \Rightarrow v = \text{sen}\, x\,]$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \text{sen}\, x\, dx = -\frac{2}{\pi}\left\{ -x \cdot \cos\, x\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos\, x\, dx \right\} = -\frac{2}{\pi}(-\pi \cdot (-1) + (-\pi) \cdot (-1)) = -4;$$

$$[\, u = x \Rightarrow du = dx; \qquad dv = \text{sen}\, x\, dx \Rightarrow v = -\cos\, x\,]$$

e assim, obtem-se que:

$$proj_W f = \frac{< f(x), 1 >}{< 1, 1 >} 1 + \frac{< f(x), \cos\, x >}{< \cos\, x, \cos\, x >} \cos\, x = \frac{\frac{2\pi^2}{3}}{2} \cdot 1 + \frac{-4}{1} \cdot \cos\, x = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos\, x.$$

6. Mostre que o conjunto $\{\ \text{sen}\ x,\ \text{sen}\ 2x, \cdots, \text{sen}\ nx, \cdots\} \subset \mathcal{C}[-\pi, \pi]$ é ortonormal em relação ao produto interno $< f, g >= \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x)\, dx$.

Solução: Deve-se mostrar que tais funções são mutuamente ortogonais e unitárias (ou seja, de norma 1). Para tanto, note-se que para todos $A, B \in \mathbb{R}$, tem-se que

$$\cos\,(A - B) = \cos\, A \cdot \cos\, B + \ \text{sen}\ A \cdot \text{sen}\ B \quad \text{e} \quad \cos\,(A + B) = \cos\, A \cdot \cos\, B - \ \text{sen}\ A \cdot \text{sen}\ B,$$

e, portanto,

$$\cos\,(A - B) - \cos\,(A + B) = 2\ \text{sen}\ A \cdot \text{sen}\ B$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\ A \cdot \text{sen}\ B = \dfrac{1}{2}[\cos\,(A - B) - \cos\,(A + B)] & (I); \\ (\text{sen}\ A)^2 = \dfrac{1}{2}[1 - \cos\,(2A)] & (II) \end{cases}$$

Daí, para todo $m \neq n$, segue que:

$$< \text{sen}\ mx,\ \text{sen}\ nx >= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}\ mx \cdot \text{sen}\ nx\, dx \overset{(I)}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}[\cos\,(m - n)x - \cos\,(m + n)x]\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\text{sen}\ (m - n)x}{m - n} \bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\text{sen}\ (m + n)x}{m + n} \bigg|_{-\pi}^{\pi} \right\} = 0,$$

ou seja, as funções sen mx e sen nx são ortogonais entre si (para $m \neq n$).

Além disso, tem-se que:

$$\|\ \text{sen}\ nx\,\|^2 =< \text{sen}\ nx, \text{sen}\ nx >= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\text{sen}\ nx)^2\, dx \overset{(II)}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}[1 - \cos\,(2nx)]\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ x \bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\text{sen}\ 2nx}{2n} \bigg|_{-\pi}^{\pi} \right\} = \frac{1}{2\pi}(2\pi - 0) = 1 \Rightarrow \|\ \text{sen}\ nx\,\| = 1,$$

para todo $n \geq 1$.