UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Gabarito 1a. Avaliação de CM005 - Álgebra Linear - Turma G

1. Seja $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 1 - x = \dfrac{2-y}{2} = z + 1\}$. Verifique se U é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

   Solução: Nota-se inicialmente, que U é a interseção dos planos $\pi_1 : 1 - x = \dfrac{2-y}{2}$ e $\pi_2 : 1 - x = z + 1$, os quais são planos não-paralelos passando pela origem de $\mathbb{R}^3$ (e portanto, são s.e.v. de $\mathbb{R}^3$); logo, U é uma reta passando pela origem de $\mathbb{R}^3$ e assim, é um s.e.v. de $\mathbb{R}^3$. [Note que utilizando-se as equações de π_1 e π_2, obtem-se que:

   $(x, y, z) \in U \Leftrightarrow 2-2x = 2-y$ e $1-x = z+1 \Leftrightarrow 2x = y$ e $-x = z \Leftrightarrow (x, y, z) = (x, 2x, -x) = x\cdot(1, 2, -1)$,

   ou seja, U é o s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ gerado por $(1, 2, -1)$.]

2. Sejam o espaço vetorial real $\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f$ é contínua $\}$ e $B = \{$ sen x, sen $2x$, cos $x\}$. Determine se B é L.I. ou é L.D..

   Solução: Observe que, pela definição, B é L.I. se, e somente se, a igualdade

   $$\alpha_1 \cdot \text{sen } x + \alpha_2 \cdot \text{sen } 2x + \alpha_3 \cdot \cos x = 0 \quad \text{(função nula)}$$

   para todo $x \in \mathbb{R}$, implicar $\alpha_1 = 0 = \alpha_2 = \alpha_3$. Em particular, deve-se ter:

   $$\begin{array}{lcr} x = 0 & \Rightarrow & \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 1 = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} & \Rightarrow & \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 = 0 \\ x = \frac{\pi}{4} & \Rightarrow & \alpha_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 = 0, \\ \alpha_2 = 0. \end{cases}$$

   Portanto, B é L.I..

3. Seja $W = \left\{ X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,|\, X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X \right\}$ o s.e.v. de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Determine uma base de W e $dim(W)$.

   Solução: Seja $X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Daí, segue que:

   $$X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b & a \\ c-d & c \end{bmatrix} \qquad \text{(I)}$$

   $$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ -a & -b \end{bmatrix} \qquad \text{(II)}$$

   Portanto,

   $$\text{(I)} = \text{(II)} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a-b & a \\ c-d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ -a & -b \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b &= a+c \\ a &= b+d \\ c-d &= -a \\ c &= -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b &= c \\ a &= b+d \end{cases}$$

   Logo,

   $$X \in W \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} b+d & b \\ -b & d \end{bmatrix} \Leftrightarrow X = b \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

   e assim, W é o s.e.v. de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ gerado por $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Dado que v_1 e v_2 não são múltiplos entre si (ou seja, são vetores L.I.), segue que $\{v_1, v_2\}$ é uma base de W e, portanto, $\dim(W) = 2$.

4. Sejam os s.e.v. $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; x + 2y - z + w = 0\}$ e $V = [(1, 0, 0, 1), (1, 2, 0, 1)] \subset \mathbb{R}^4$. Determine uma base para $U + V$ e verifique se a soma $U + V$ é direta.

Solução: Inicialmente, nota-se que

$$(x, y, z, w) \in U \Leftrightarrow (x, y, z, w) = (x, y, x + 2y + w, w) = x \cdot (1, 0, 1, 0) + y \cdot (0, 1, 2, 0) + w \cdot (0, 0, 1, 1).$$

Portanto, $U = [v_1, v_2, v_3]$, onde $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 2, 0)$ e $v_3 = (0, 0, 1, 1)$. Por sua vez, $V = [v_4, v_5]$, onde $v_4 = (1, 0, 0, 1)$ e $v_5 = (1, 2, 0, 1)$. Segue daí que $U + V$ é o s.e.v. de $\mathbb{R}^4$ gerado por v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, e assim, realizando-se operações elementares na matriz cujas linhas são dadas pelas coordenadas destes 5 vetores, pode-se obter um conjunto de geradores mais simples para $U + V$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $U + V = [(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)] = \mathbb{R}^4$ e assim, $\dim(U + V) = 4$. Também, $\dim(V) = 2$, já que V é gerado por um par de vetores não-paralelos entre si (L.I.); resta, portanto, determinar $\dim(U)$. Para tanto, sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1 \cdot (1, 0, 1, 0) + \alpha_2 \cdot (0, 1, 2, 0) + \alpha_3 \cdot (0, 0, 1, 1) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = 0 = \alpha_2 = \alpha_3.$$

Logo, $\{v_1, v_2, v_3\}$ é L.I. e portanto, $\dim(U) = 3$. Daí, segue que:

$$\dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U + V) = 3 + 2_4 = 1$$

e assim, $U \cap V \neq \{(0, 0, 0, 0)\}$, ou seja, a soma $U + V$ não é direta.

5. Mostre que o conjunto $D = \{1, 1 - t, (1 - t)^2, 1 - t^3\}$ é uma base de $P_3(\mathbb{R})$.

Solução: Sabe-se que $\dim(P_3\mathbb{R}) = 4$ e, portanto, qualquer conjunto de 4 vetores L.I. de $P_3(\mathbb{R})$ é uma base de tal espaço vetorial. É suficiente então, mostrar que tais vetores são L.I.. Para tanto, sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot (1 - t) + \alpha_3 \cdot (1 - t)^2 + \alpha_4 \cdot (1 - t^3) = 0 \quad \text{(polinômio nulo)}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) \cdot 1 - (\alpha_2 + 2\alpha_3) \cdot t + \alpha_3 \cdot t^2 - \alpha_4 \cdot t^3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + \cdot t^2 + 0 \cdot t^3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = 0 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_1 = 0 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4,$$

ou seja, D é um conjunto L.I. e, portanto, é uma base de $P_3(\mathbb{R})$.

6. Sejam $B = \{1+t, -1+t^2, t-t^2\}$ e $C = \{2-t, 1-t^2, t+t^2\}$ bases de $P_2(\mathbb{R})$. Calcule as matrizes de mudança de base $[I]_C^B$ e $[I]_B^C$.

Solução: Para construir a matriz $[I]_C^B$, denote $v_1 = 1+t$, $v_2 = -1+t^2$, $v_3 = t-t^2$, $w_1 = 2-t$, $w_2 = 1-t^2$ e $w_3 = t+t^2$. Daí, segue que:

$$v_1 = a\cdot w_1 + b\cdot w_2 + c\cdot w_3 \Leftrightarrow 1+t = a\cdot(2-t) + b\cdot(1-t^2) + c\cdot(t+t^2)$$

$$= (2a+b)\cdot 1 + (-a+c)\cdot t + (-b+c)\cdot t^2$$

$$\begin{cases} 2a+b=1 \Rightarrow 2(c-1)+c=1 \Rightarrow c=1 \\ -a+c=1 \Rightarrow a=c-1 \Rightarrow a=0 \\ -b+c=0 \Rightarrow b=c \Rightarrow b=1 \end{cases} \Rightarrow [v_1]_C = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = d\cdot w_1 + e\cdot w_2 + f\cdot w_3 \Leftrightarrow -1+t^2 = d\cdot(2-t) + e\cdot(1-t^2) + f\cdot(t+t^2)$$

$$= (2d+e)\cdot 1 + (-d+f)\cdot t + (-e+f)\cdot t^2$$

$$\begin{cases} 2d+e=-1 \Rightarrow 2f+(f-1)=-1 \Rightarrow f=0 \\ -d+f=0 \Rightarrow d=f \Rightarrow d=0 \\ -e+f=1 \Rightarrow e=f-1 \Rightarrow e=-1 \end{cases} \Rightarrow [v_2]_C = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_3 = g\cdot w_1 + h\cdot w_2 + i\cdot w_3 \Leftrightarrow t-t^2 = g\cdot(2-t) + h\cdot(1-t^2) + i\cdot(t+t^2)$$

$$= (2g+h)\cdot 1 + (-g+i)\cdot t + (-h+i)\cdot t^2$$

$$\begin{cases} 2g+h=0 \Rightarrow h=-2g \Rightarrow h=\frac{4}{3} \\ -g+i=1 \Rightarrow i=1+g \Rightarrow i=\frac{1}{3} \\ -h+i=-1 \Rightarrow 2g+(1+g)=-1 \Rightarrow g=-\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow [v_3]_C = \begin{bmatrix} g \\ h \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Daí, segue que:

$$[I]_C^B = \Big[[v_1]_C\,[v_2]_C\,[v_3]_C\Big] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 1 & -1 & \frac{4}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Para determinar $[I]_B^C$ basta lembrar que $[I]_B^C = \Big[[I]_C^B\Big]^{-1}$; sendo assim, segue que:

$$\left[\begin{array}{ccc;ccc} 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{4}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc;ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & \frac{4}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc;ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc;ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc;ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Portanto, obtem-se que:

$$[I]_B^C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7. Considere o polinômio $f(t) = 1 + 2t - t^2$ e B, C as bases de $P_2(\mathbb{R})$ dadas na questão acima.

(a) Utilizando a definição, calcule $[f(t)]_B$ e $[f(t)]_C$;

(b) Mostre que $[f(t)]_C = [I]_C^B \cdot [f(t)]_B$ e $[f(t)]_B = [I]_B^C \cdot [f(t)]_C$.

Solução: (a) Sejam

$$\left[f(t)\right]_B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \left[f(t)\right]_C = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}.$$

Então, deve-se ter:

$$f(t) = a \cdot v_1 + b \cdot v_2 + c \cdot v_3 \Leftrightarrow 1 + 2t - t^2 = a \cdot (1+t) + b \cdot (-1+t^2) + c \cdot (t - t^2)$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2t - t^2 = (a-b) \cdot 1 + (a+c) \cdot t + (b-c) \cdot t^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1 \Rightarrow b = a - 1 \Rightarrow b = 0 \\ a + c = 2 \Rightarrow c = 2 - a \Rightarrow c = 1 \\ b - c = -1 \Rightarrow (a-1) - (2-a) = -1 \Rightarrow a = 1 \end{cases} \Rightarrow \left[f(t)\right]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$f(t) = g \cdot w_1 + h \cdot w_2 + i \cdot w_3 \Leftrightarrow 1 + 2t - t^2 = g \cdot (2-t) + h \cdot (1-t^2) + i \cdot (t+t^2)$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2t - t^2 = (2g+h) \cdot 1 + (-g+i) \cdot t + (-h+i) \cdot t^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2g + h = 1 \Rightarrow h = 1 - 2g \Rightarrow h = \frac{7}{3} \\ -g + i = 2 \Rightarrow i = 2 + g \Rightarrow i = \frac{4}{3} \\ -h + i = -1 \Rightarrow -(1-2g) + (2+g) = -1 \Rightarrow g = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \left[f(t)\right]_C = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}.$$

(b) Tem-se que:

$$[I]_C^B \cdot [f(t)]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 1 & -1 & \frac{4}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} = \left[f(t)\right]_C;$$

$$[I]_B^C \cdot [f(t)]_C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \left[f(t)\right]_B.$$