UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Gabarito da 2a. Avaliação de CM005 - 21/Maio/2019

1. Determine, se possível, uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\ker(T) = \mathrm{Im}(T)$.

   Solução: Considere uma base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de $\mathbb{R}^4$ e defina $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ colocando $T(v_1) = (0,0,0,0)$, $T(v_2) = (0,0,0,0)$, $T(v_3) = v_1$ e $T(v_4) = v_2$. Daí, para $v = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot v_3 + \alpha_4 \cdot v_4 \in \mathbb{R}^4$ deve-se ter:

$$\begin{aligned} T(v) &= \alpha_1 \cdot T(v_1) + \alpha_2 \cdot T(v_2) + \alpha_3 \cdot T(v_3) + \alpha_4 \cdot T(v_4) \\ &= \alpha_3 \cdot v_1 + \alpha_4 \cdot v_2 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{Im}(T) = [v_1, v_2]. \end{aligned}$$

   Por outro lado, tem-se que:

$$v \in \mathrm{Ker}(T) \Leftrightarrow T(v) = 0 \Leftrightarrow \alpha_3 \cdot v_1 + \alpha_4 \cdot v_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

   já que se tratam de vetores L.I.; portanto, $v \in \mathrm{Ker}(T) \Leftrightarrow v = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2$, ou seja, $\ker(T) = [v_1, v_2]$.
   [Observe que utilizando, por exemplo, a base canônica de $\mathbb{R}^4$, obtem-se a transformação linear $T(x, y, z, w) = (z, w, 0, 0)$, a qual satisfaz $\ker(T) = [(1,0,0,0), (0,1,0,0)] = \mathrm{Im}(T)$.]

2. Sejam a transformação linear $T : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ dada por $T(f(t)) = f(t) + t \cdot f'(t)$ e $B = \{1+t, t+t^2, 1+t^2\}$ base de $P_2(\mathbb{R})$. Determine a matriz $[T]_B^B$.

   Solução: Tem-se que:

$$T(1+t) = (1+t) + t \cdot (1+t)' = 1 + 2t = \alpha_1 \cdot (1+t) + \alpha_2 \cdot (t+t^2) + \alpha_3 \cdot (1+t^2)$$
$$\Rightarrow 1 + 2t = (\alpha_1 + \alpha_3) \cdot 1 + (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot t + (\alpha_2 + \alpha_3) \cdot t^2$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 1 \Rightarrow (2 - \alpha_2) - \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{2} \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \Rightarrow \alpha_1 = 2 - \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{3}{2} \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = -\alpha_2 \Rightarrow \alpha_3 = -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \therefore \quad [T(1+t)]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix};$$

$$T(t+t^2) = (t+t^2) + t \cdot (t+t^2)' = 2t + 3t^2 = \beta_1 \cdot (1+t) + \beta_2 \cdot (t+t^2) + \beta_3 \cdot (1+t^2)$$
$$\Rightarrow 2t + 3t^2 = (\beta_1 + \beta_3) \cdot 1 + (\beta_1 + \beta_2) \cdot t + (\beta_2 + \beta_3) \cdot t^2$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \beta_1 + \beta_3 = 0 \Rightarrow \beta_3 = -\beta_1 \Rightarrow \beta_3 = \frac{1}{2} \\ \beta_1 + \beta_2 = 2 \Rightarrow \beta_2 = 2 - \beta_1 \Rightarrow \beta_2 = \frac{5}{2} \\ \beta_2 + \beta_3 = 3 \Rightarrow (2 - \beta_1) - \beta_1 = 3 \Rightarrow \beta_1 = -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \therefore \quad \left[T(t+t^2)\right]_B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix};$$

$$T(1+t^2) = (1+t^2) + t \cdot (1+t^2)' = 1 + 3t^2 = \gamma_1 \cdot (1+t) + \gamma_2 \cdot (t+t^2) + \gamma_3 \cdot (1+t^2)$$
$$\Rightarrow 1 + 3t^2 = (\gamma_1 + \gamma_3) \cdot 1 + (\gamma_1 + \gamma_2) \cdot t + (\gamma_2 + \gamma_3) \cdot t^2$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma_1 + \gamma_3 = 1 \Rightarrow \gamma_3 = 1 - \gamma_1 \Rightarrow \gamma_3 = 2 \\ \gamma_1 + \gamma_2 = 0 \Rightarrow \gamma_2 = -\gamma_1 \Rightarrow \gamma_2 = 1 \\ \gamma_2 + \gamma_3 = 3 \Rightarrow -\gamma_1 + 1 - \gamma_1 = 3 \Rightarrow \gamma_1 = -1 \end{cases} \qquad \therefore \quad \left[T(t+t^2)\right]_B = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix};$$

   Daí, segue que:

$$[T]_B^B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Utilize a matriz $[T]_B^B$ da questão 2 para determinar os autovalores de tal transformação.

Solução: Para determinar os autovalores de T deve-se determinar as raízes do polinômio característico $p_T(\alpha)$ de T. Daí, denotando a matriz identidade de ordem 3 por I_d, segue que:

$$p_T(\alpha) = \det\left[[T]_B^B - \alpha \cdot I_d\right] = \det\begin{bmatrix} \frac{3}{2}-\alpha & -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2}-\alpha & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2-\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \left[(\frac{3}{2}-\alpha)(\frac{5}{2}-\alpha)(2-\alpha) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right] - \left[\frac{1}{2}(\frac{3}{2}-\alpha) - \frac{1}{4}(2-\alpha) + \frac{1}{2}(\frac{5}{2}-\alpha)\right]$$

$$= \left[(\frac{15}{4} - 4\alpha + \alpha^2)(2-\alpha)\right] - \left[\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\alpha\right] = \left[(\frac{15}{2} - \frac{15}{4}\alpha - 8\alpha + 4\alpha^2 + 2\alpha^2 - \alpha^3\right] - \left[\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\alpha\right]$$

$$= -\alpha^3 + 6\alpha^2 - 11\alpha + 6.$$

Nota-se que os divisores de 6 são ± 1, ± 2 e ± 3; então, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$ e $\alpha_3 = 3$ são as raízes de $p_T(\alpha)$ e assim, $p_T(\alpha) = -(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)$.

4. Seja a transformação linear $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dada por $T(X) = X + X^t$, para toda $X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Determine o polinômio minimal de T.

Solução: Inicialmente, determina-se a matriz de T com respeito a uma base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, a qual, por simplicidade, escolhe-se a base canônica $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Então, segue que:

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4;$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4;$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4;$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 2 \cdot v_4.$$

Logo, denotando por $p_T(\alpha)$ o polinômio característico de T, obtem-se que:

$$[T]_B^B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad p_T(\alpha) = \det\begin{bmatrix} 2-\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\alpha \end{bmatrix}$$

$$= (2-\alpha) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det\begin{bmatrix} 1-\alpha & 1 & 0 \\ 1 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2-\alpha \end{bmatrix} = (2-\alpha) \cdot \left[(1-\alpha)^2(2-\alpha) - (2-\alpha)\right]$$

$$= (2-\alpha)^2 \cdot \left[(1-\alpha)^2 - 1\right] = (2-\alpha)^2 \cdot \left[-2\alpha + \alpha^2\right] = (2-\alpha)^3 \cdot (-\alpha) = \alpha \cdot (\alpha-2)^3.$$

Portanto, os candidatos a polinômio minimal são:

$$m_1(\alpha) = \alpha \cdot (\alpha-2), \qquad m_2(\alpha) = \alpha \cdot (\alpha-2)^2 \qquad \text{e} \qquad m_3(\alpha) = \alpha \cdot (\alpha-2)^3.$$

Iniciando-se com $m_1(\alpha)$ tem-se que:

$$m_1\left([T]_B^B\right) = \left([T]_B^B\right) \cdot \left([T]_B^B - 2 \cdot I_d\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, dado que $m_1(\alpha)$ tem as mesmas raízes do polinômio característico, anula a matriz de T e é o de menor grau a fazê-lo, conclui-se que é o polinômio minimal de T.

5. Determine os autoespaços de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ associados aos autovalores da transformação linear T dada na questão 4.

Solução: Dado que o polinômio minimal de T é $m_1(\alpha) = (\alpha - 0)^1 \cdot (\alpha - 2)^1$ então T é diagonalizável e assim, as multiplicidades algébrica e geométrica de cada autovalor de T são iguais, ou seja, existe um conjunto com 3 autovetores L.I. associados ao autovalor 2 e existe um autovetor L.I. associado ao autovalor 0. Daí, para $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ segue que:

$$T(X) = 0 \cdot X \quad \Leftrightarrow \quad X + X^t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X^t = -X \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 0 \\ -c = b \\ 2d = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto, o autoespaço V_0 associado ao autovalor 0 é dado por

$$V_0 = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right].$$

$$T(X) = 2 \cdot X \quad \Leftrightarrow \quad X + X^t = 2 \cdot X \quad \Leftrightarrow \quad X^t = X \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = a \\ c = b \\ d = d \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Conclui-se então, que o autoespaço V_2 associado ao autovalor 2 é dado por

$$V_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right].$$

Para verificar que os vetores geradores de V_2 formam um conjunto L.I. faz-se:

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 = 0 = \alpha_2 = \alpha_3.$$

6. Sejam B e C as bases canônicas de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $P_3(\mathbb{R})$, respectivamente, e a transformação linear $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow P_3(\mathbb{R})$ tal que

$$[T]_C^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine a lei de definição de T^{-1}.

Solução: Sabe-se que $\left[T^{-1}\right]_B^C$ é a inversa da matriz $[T]_C^B$; daí, segue que

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & ; & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ; & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & ; & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & ; & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ; & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & ; & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & ; & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ; & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & ; & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & ; & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ; & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & ; & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ; & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & ; & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ; & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ; & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Portanto, obtem-se que

$$\left[T^{-1}\right]_B^C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Utilizando-se a matriz de T^{-1}, vê-se que:

$$T^{-1}(1) = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$T^{-1}(t) = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$T^{-1}(t^2) = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$T^{-1}(t^3) = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sendo assim, para todo $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in P_3(\mathbb{R})$ obtem-se que:

$$T^{-1}(f(t)) = T^{-1}(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) = a_0 \cdot T^{-1}(1) + a_1 \cdot T^{-1}(t) + a_2 \cdot T^{-1}(t^2) + a_3 \cdot T^{-1}(t^3)$$

$$= a_0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 & a_2 \\ a_0 - a_3 & a_1 \end{pmatrix}.$$