UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Departamento de Matemática

1a. Avaliação de CM044 - Cálculo IV - Turma A - 02 de Abril de 2019

1. Considere o conjunto $\mathcal{A} = \{z = x + iy \in \mathbb{C}\,;\ \max\ \{|x|, |y|\} < 1\}$. Determine o conjunto dos pontos de acumulação de $\mathcal{A}$.

   Solução: Nota-se inicialmente, que o conjunto $\mathcal{A}$ é formado pelos pontos do plano complexo que estão no interior do quadrado com vértices em $z_0 = 1 + i$, $z_1 = -1 + i$, $z_2 = -1 - i$ e $z_3 = 1 - i$ e todo ponto de $\mathcal{A}$ é ponto interior; de fato, para cada $z = x + iy \in \mathcal{A}$ escolhendo-se

   $$0 < r \leq\ \min\ \{|z - (1 + iy)|, |z - (-1 + iy)|, |z - (x + i)|, |z - (x - i)|\} < 1,$$

   deve-se ter que para todo $w = a + ib \in D(z; r)$ vale que $\max\ \{|a|, |b|\} < 1$, ou seja, $w \in \mathcal{A}$. [Observe que $|z - w| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < r$ implica $|x - a| < r$ e $|y - b| < r$, e assim, $a \in (x - r, x + r)$ e $b \in (y - b, y + b)$; como $|x \pm r| < 1$ e $|y \pm r| < 1$, segue $|a| < 1$ e $|b| < 1$.] Conclui-se daí, que $D(z; r) \subset \mathcal{A}$, z é ponto interior de $\mathcal{A}$ e portanto, z é ponto de acumulação de $\mathcal{A}$.

   Por sua vez, se z pertence a qualquer aresta do quadrado então todo disco aberto com centro em z e raio R contém infinitos pontos de $\mathcal{A}$ e infinitos pontos de $\mathcal{A}^c$; em particular, $[D(z; R) - \{z\}] \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ e daí, z é ponto de acumulação de $\mathcal{A}$.

   Finalmente, se $z = x + iy$ com $|x| > 1$ ou $|y| > 1$ então escolhendo-se

   $$0 < r \leq\ \min\ \{|z - (1 + iy)|, |z - (-1 + iy)|, |z - (x + i)|, |z - (x - i)|\}$$

   segue, usando a mesma argumentação acima utilizada, que $D(z : r) \subset \mathcal{A}^c$, ou seja, z é ponto interior de $\mathcal{A}^c$ (e portanto, não é ponto de acumulação de $\mathcal{A}$).

   Logo, o conjunto dos pontos de acumulação de $\mathcal{A}$ é o conjunto $\{z = x + iy \in \mathbb{C}\,;\ \max\ \{|x|, |y|\} \leq 1\}$.

2. Escolha uma raíz z_0 da equação $z^4 = 1 + i$ e localize z_0^2 e z_0^3 no plano complexo.

   Solução: Utilizando-se a forma polar, escrevem-se $z = r\ e^{i\alpha}$ e $1 + i = \sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{4}}$; daí, tem-se que:

   $$z^4 = 1 + i \Leftrightarrow r^4 e^{i4\alpha} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} r^4 = 2^{\frac{1}{2}} \\ 4\alpha = \frac{\pi}{4} + 2n\pi, \quad n = 0, 1, 2, 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2^{\frac{1}{8}} \\ \alpha = \frac{\pi}{16} + \frac{n\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$

   Portanto, considerando-se, por exemplo, a raíz $z_0 = 2^{\frac{1}{8}} e^{i\frac{\pi}{16}}$ $(n = 0)$, vê-se que $z_0^2 = 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{8}}$ e $z_0^3 = z_0^2 \cdot z_0 = 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{8}} \cdot 2^{\frac{1}{8}} e^{i\frac{\pi}{16}} = 2^{\frac{3}{8}} e^{i\frac{3\pi}{16}}$.

   Para localizar tais potências no plano complexo basta notar que $|z_0^2| = 2^{\frac{1}{4}}$, $\text{Arg}(z_0^2) = \frac{\pi}{8}$ e que $|z_0^3| = 2^{\frac{3}{8}}$, $\text{Arg}(z_0^3) = \frac{3\pi}{16}$. (Observe as relações entre os módulos e os argumentos de z_0, z_0^2, z_0^3 e $1 + i$, nesta ordem: $2^{\frac{1}{8}} < 2^{\frac{1}{4}} < 2^{\frac{3}{8}} < 2^{\frac{1}{2}}$ e $\frac{\pi}{16} < \frac{\pi}{8} < \frac{3\pi}{16} < \frac{\pi}{4}$.)

3. Seja a função $f(z) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i\dfrac{y^2}{x^2 + y^2}$, para $z \neq 0$, e $f(0) = 0$. Determine o conjunto dos pontos nos quais f é contínua.

   Solução: Fazendo-se

   $$f(z) = u(x, y) + i\ v(x, y), \qquad \text{com} \qquad u(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \text{e} \qquad v(x, y) = \frac{y^2}{x^2 + y^2},$$

   tem-se que f é contínua em $z = x + i\,y$ se, e somente se, u e v são contínuas em (x, y). Nota-se para $(x, y) \neq (0, 0)$ as funções u e v são quocientes de funções contínuas e bem definidadas, e daí, u e v são contínuas em tais pontos. Resta, portanto, analisar a continuidade de u e v em $(0, 0)$.

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$ e $\left|\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq 1$ segue que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = u(0,0),$$

ou seja, u é contínua em $u(0,0)$. Para testar a continuidade de v em $(0,0)$, consideram-se os caminhos $(x,0)$ e $(0,y)$:

$$\lim_{x\to 0} v(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{0^2}{x^2+0^2} = 0;$$

$$\lim_{y\to 0} v(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{0^2+y^2} = 1.$$

Uma vez que os limites sobre os caminhos acima são distintos, conclui-se que v não é contínua em $(0,0)$. Conclui-se portanto, que o conjunto dos pontos de continuidade de f é $\mathbb{C} - \{0\}$.

4. Determine todas as funções analíticas f tais que $Im(f(z)) = e^x \cdot (x \text{ sen } y + y \cos y)$, onde $z = x + iy$. Expresse tais funções na variável z.

Solução: Denotando-se $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$ e utilizando-se as equações de *Cauchy-Riemann*, vê-se que:

$$\begin{aligned} u_x(x,y) = v_y(x,y) &\Rightarrow u_x(x,y) = e^x \cdot (x \cos y + \cos y - y \text{ sen } y) \\ &\Rightarrow u_x(x,y) = e^x \cdot ((x+1) \cos y - y \text{ sen } y) \qquad (a) \\ u_y(x,y) = -v_x(x,y) &\Rightarrow u_y(x,y) = -e^x \cdot (x \text{ sen } y + y \cos y) - e^x \cdot \text{ sen } y \\ &\Rightarrow u_y(x,y) = -e^x \cdot ((x+1) \text{ sen } y + y \cos y) \qquad (b) \end{aligned}$$

De (a) segue que:

$$u(x,y) = \int e^x \cdot ((x+1) \cos y - y \text{ sen } y)\, dx + \varphi(y)$$

$$= \cos y \int e^x (x+1)\, dx - y \text{ sen } y \int e^x\, dx + \varphi(y)$$

$$= \cos y \Big[e^x(x+1) - \int e^x\, dx\Big] - e^x y \text{ sen } y + \varphi(y) = \cos y \big[e^x(x+1) - e^x\big] - e^x y \text{ sen } y + \varphi(y)$$

$$= e^x \cdot [x \cos y - y \text{ sen } y] + \varphi(y)$$

$$\Rightarrow u_y(x,y) = e^x \cdot [-x \text{ sen } y - \text{ sen } y - y \cos y] + \varphi'(y)$$

$$\Rightarrow u_y(x,y) = -e^x \cdot [(x+1) \text{ sen } y + y \cos y] + \varphi'(y)$$

e comparando-se com (b), conclui-se que deve ser $\varphi'(y) = 0$, ou seja, $\varphi(y) = M$, para alguma constante $M \in \mathbb{R}$. Portanto, deve-se ter:

$$f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y) = \big[e^x \cdot (x \cos y - y \text{ sen } y) + M\big] + i\, e^x \cdot (x \text{ sen } y + y \cos y)$$

$$= (x+iy)e^x \cos y + (ix - y)e^x \text{ sen } y + M = (x+iy)e^x \cos y + i(x+iy)e^x \text{ sen } y + M$$

$$= (x+iy)e^x[\cos y + i \text{ sen } y] + M = (x+iy) \cdot e^x \cdot e^{iy} + M = z \cdot e^z + M$$

5. Sejam a função $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z+i)^2}$ e Γ a curva $|z+1| = 2$, orientada no sentido anti-horário. Calcule $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz$.

Solução: Observa-se inicialmente, que a curva Γ em questão é a circunferência com centro em -1 e raio 2. Por sua vez, $g(z) = \dfrac{1}{z-2}$ é analítica sobre Γ e na região interna à mesma curva; portanto, pode-se aplicar a *Fórmula Integral de Cauchy para Derivadas*, obtendo-se:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma \frac{1}{(z-2)(z+i)^2}\,dz = \int_\Gamma \frac{g(z)}{(z+i)^2}\,dz = 2\pi\, i \cdot g'(-i).$$

Dado que $g'(z) = \dfrac{d}{dz}(z-2)^{-1} = -(z-2)^{-2}$, então $g'(-i) = -\dfrac{1}{(-i-2)^2} = -\dfrac{1}{(2+i)^2}$; conclui-se que:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = -\frac{2\pi\, i}{(2+i)^2}.$$

6. Mostre que $\displaystyle\int_\Gamma \cos 2z\,dz = \frac{1-e^4}{2e^2}\,i$, sendo a curva Γ dada por $\Gamma(t) = \cos\, t + i\, \text{sen}\, t$, com $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. (**20 pontos**)

Solução: Nota-se, inicialmente, que as funções $f(z) = \cos\, z$ e $g(z) = 2z$ são analíticas e portanto, a composição $f(g(z)) = \cos\, 2z$ é uma função analítica e $\displaystyle\int_\Gamma f(g(z))\,dz$ depende apenas dos pontos inicial e final de Γ. Por sua vez, a curva Γ em questão é a semi-circunferência com centro na origem, raio igual a 1, com ponto inicial $\Gamma(\frac{\pi}{2}) = i$ e ponto final $\Gamma(\frac{3\pi}{2}) = -i$ (uma curva suave e simples).
Dado que $F(z) = \frac{1}{2}\,\text{sen}\, 2z$ é uma primitiva de $f(g(z))$ conclui-se que:

$$\int_\Gamma f(g(z))\,dz = F(-i) - F(i) = \frac{1}{2}[\text{sen}(-2i) - \text{sen}(2i)] = -\text{sen}(2i) = -\frac{e^{i(2i)} - e^{-i(2i)}}{2i} = -\frac{e^{-2} - e^2}{2i}$$

$$= -\frac{\frac{1}{e^2} - e^2}{2i} = -\frac{1-e^4}{2ie^2} = \frac{1-e^4}{2e^2}\,i.$$