UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Departamento de Matemática

Gabarito da 1a. Avaliação de Cálculo IV (CM044 e CMA314)

1. Seja $\mathcal{A} = \{z = x + iy \in \mathbb{C};\ x \cdot y > 0\} \cup \{0\}$.

   (a) Verifique se $\mathcal{A}$ é um conjunto aberto;

   (b) Verifique se $\mathcal{A}$ é um conjunto fechado;

   (c) Verifique se $\mathcal{A}$ é um conjunto conexo por caminhos;

   (a) Determine o conjunto dos pontos de acumulação de $\mathcal{A}$.

   Solução: (a) Nota-se, primeiramente, que $x \cdot y > 0 \Leftrightarrow$ ambos (x e y) são positivos ou ambos são negativos, e portanto, são os pontos $z = x + iy$ que estão nos primeiro e terceiro quadrantes (abertos) que satisfazem a esta desigualdade; logo, o conjunto $\mathcal{A}$ é a união destes dois quadrantes (abertos) com o número 0.

   Vê-se então que o ponto 0 não é ponto interior de $\mathcal{A}$. De fato, para qualquer disco $D(0; r)$, com $r > 0$, pontos da forma $z = x - ix$, com $|z| < r$, estão em tal disco mas não pertencem ao conjunto $\mathcal{A}$. Logo, não existe um disco $D(0; r)$ totalmente contido em $\mathcal{A}$, ou seja, 0 não é ponto interior de $\mathcal{A}$. Portanto, $\mathcal{A}$ não é um conjunto aberto.

   (b) Observa-se que $\mathcal{A}^c$ é a união dos segundo e quarto quadrantes fechados (ou seja, incluindo-se os eixos coordenados), excluindo-se o ponto 0; daí, vê-se que nenhum destes pontos sobre os eixos é ponto interior de $\mathcal{A}^c$. Por exemplo, o ponto $z_0 = 1 + i0 \in \mathcal{A}^c$ mas qualquer disco centrado em z_0 não está contido em $\mathcal{A}^c$; de fato, para qualquer raio $r > 0$, o disco $D(1; r)$ contém o ponto $z = 1 + i\frac{r}{2}$, o qual pertence a $\mathcal{A}$. Logo, como $\mathcal{A}^c$ contém pontos que não são pontos interiores, conclui-se que $\mathcal{A}^c$ não é aberto, e portanto, $\mathcal{A}$ não é fechado.

   (c) $\mathcal{A}$ é conexo por caminhos pois para quaisquer pontos z_0 e z_1 em $\mathcal{A}$ a união do segmento com início em z_0 e término em 0, com o segmento com início em 0 e término em z_1 resulta num caminho totalmente contido em $\mathcal{A}$ e que liga z_0 e z_1.

   (d) Sabe-se que todo ponto interior de um conjunto é ponto de acumulação do conjunto; logo, todos os pontos interiores dos primeiro e terceiro quadrantes (abertos) são pontos de acumularção de $\mathcal{A}$. Também os pontos dos eixos coordenados são pontos de acumulação de $\mathcal{A}$; para ver isto, note que que se z pertence a algum eixo então $z = x$ ou $z = iy$. Para $z = x$, com $x > 0$ e qualquer $r > 0$, a interseção do disco "furado" $[D(z; r) - \{z\}]$ com o conjunto $\mathcal{A}$ é sempre não-vazia (basta ver, por exemplo, que o ponto $x + i\frac{r}{2}$ pertence ao disco "furado"em questão e ao conjunto $\mathcal{A}$). De modo análogo, justifica-se que se $z = x$, com $x < 0$, ou se $z = iy$, com $y \neq 0$, então z é ponto de acumulação de $\mathcal{A}$. Também o ponto $z = 0$ é ponto de acumulação de $\mathcal{A}$ pois para todo $r > 0$, o ponto $\frac{r}{2} + i\frac{r}{2}$ pertence ao disco "furado" $[D(0; r) - \{0\}]$ e ao conjunto $\mathcal{A}$.

   Por outro lado, nenhum ponto dos segundo e quarto quadrantes abertos (ou seja, sem os eixos), pode ser ponto de acumulação de $\mathcal{A}$, pois é ponto interior de $\mathcal{A}^c$. De fato, se $z = x + iy$ pertence a um desses dois quadrantes abertos então escolhendo-se $r \leq \min\{|x|, |y|\}$ tem-se que $D(z; r) \subset \mathcal{A}^c$ e portanto, $[D(z; r) - \{z\}]] \cap \mathcal{A} = \emptyset$.

   Conclui-se que o conjunto dos pontos de acumulação de $\mathcal{A}$ é a união dos primeiro e terceiro quadrantes fechados.

2. Considere a equação $z^4 = 1 + i\sqrt{3}$. Para uma raíz z_0 de sua escolha, calcule e localize no plano complexo as potências z_0^2 e z_0^3.

   Solução: Tem-se que $1 + i\sqrt{3} = 2[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}] = 2[\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}] = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. Daí, para $z = re^{i\alpha}$ tem-se que:

$$z^4 = 1 + i\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad r^4 e^{i4\alpha} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r = 2^{\frac{1}{4}} \\ 4\alpha = \frac{\pi}{3} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r = 2^{\frac{1}{4}} \\ \alpha = \frac{\pi}{12} + \frac{n}{2}\pi,\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Portanto, as quatro distintas raízes de tal equação são obtidas considerando-se $n = 0, 1, 2, 3$:

$$z_0 = 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{12}}, \quad z_1 = 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{7\pi}{12}}, \quad z_2 = 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{13\pi}{12}} \quad \text{e} \quad z_3 = 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{19\pi}{12}}.$$

Escolhendo-se a raíz $z_0 = 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{12}}$ para o cáculo das potências z_0^2 e z_0^3 obtém-se que:

$$z_0^2 = 2^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{6}} \qquad \text{e} \qquad z_0^3 = 2^{\frac{3}{4}} e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Observe que:

$$0 < \frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1 \quad \Rightarrow \quad 2^0 < |z_0^2| = 2^{\frac{1}{2}} < 2^{\frac{3}{4}} = |z_0^3| < 2^1.$$

Portanto, para localizar tais potências no plano complexo, basta notar que z_0^2 está na circunferência com centro na origem com raio $2^{\frac{1}{2}}$, e $\text{Arg}(z_0^2) = \frac{\pi}{6}$, e que z_0^3 está na cinrcunferência com centro na origem com raio $2^{\frac{3}{4}}$, e $\text{Arg}(z_0^3) = \frac{\pi}{4}$.

3. Seja a função $f(z) = |z|$, com $z \in \mathbb{C}$. Determine, se possível, os pontos $z_0 \in \mathbb{C}$ tais que existe $f'(z_0)$.

Solução: Suponha que f seja derivável em $z_0 = x_0 + iy_0 \neq 0$; então:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|z_0 + \Delta z| - |z_0|}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta x + i\Delta y \to 0} \frac{|(x_0 + \Delta x) + i(y_0 + \Delta y)| - |x_0 + iy_0|}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{\sqrt{(x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2} - \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{\Delta x + i\Delta y} \end{aligned}$$

Em particular, para $\Delta z = \Delta x + i0$ deve-se ter:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(x_0 + \Delta x)^2 + y_0^2} - \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{(x_0 + \Delta x)^2 + y_0^2} + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{\sqrt{(x_0 + \Delta x)^2 + y_0^2} + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(x_0 + \Delta x)^2 + y_0^2] - [x_0^2 + y_0^2]}{\Delta x(\sqrt{(x_0 + \Delta x)^2 + y_0^2} + \sqrt{x_0^2 + y_0^2})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x(\sqrt{(x_0 + \Delta x)^2 + y_0^2} + \sqrt{x_0^2 + y_0^2})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0 + \Delta x}{\sqrt{(x_0 + \Delta x)^2 + y_0^2} + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}.$$

Por sua vez, para $\Delta z = 0 + i\Delta y$ deve-se ter:

$$f'(z_0) = \lim_{i\Delta y \to 0} \frac{\sqrt{x_0^2 + (y_0 + \Delta y)^2} - \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{i\Delta y} \cdot \frac{\sqrt{x_0^2 + (y_0 + \Delta y)^2} + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{\sqrt{x_0^2 + (y_0 + \Delta y)^2} + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[x_0^2 + (y_0 + \Delta y)^2] - [x_0^2 + y_0^2]}{i\Delta y(\sqrt{x_0^2 + (y_0 + \Delta y)^2} + \sqrt{x_0^2 + y_0^2})} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{2y_0 \Delta y + (\Delta y)^2}{i\Delta y(\sqrt{x_0^2 + (y_0 + \Delta y)^2} + \sqrt{x_0^2 + y_0^2})}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{2y_0 + \Delta y}{\sqrt{x_0^2 + (y_0 + \Delta y)^2} + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \frac{y_0}{i\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \frac{-iy_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}.$$

Portanto, deve ser $x_0 = -iy_0$, ou seja, $x_0 + iy_0 = 0$; mas isso não é possível já que estamos admitindo $z_0 \neq 0$. Sendo assim, f não é derivável em $z_0 \neq 0$. Resta, portanto, verificar se existe $f'(0)$. Para tanto, faz-se:

$$f'(0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(0 + \Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta z| - |0|}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta z|}{\Delta z}.$$

Entretanto, observa-se que tal limite não existe pois para $\Delta z = \Delta x$, com $x > 0$, tem-se que:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta z|}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

enquanto que para $\Delta z = \Delta x$, com $x < 0$, tem-se que:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta z|}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Conclui-se que f não é derivável em qualquer ponto $z_0 \in \mathbb{C}$.

4. Seja a função $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, com $u(x,y) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e $v(x,y) = \dfrac{y^2}{x^2+y^2}$, se $(x,y) \neq (0,0)$, e $f(0) = 0$. Determine o conjunto dos pontos de continuidade de u, v e f.

   Solução: Nota-se que, para $(x,y) \neq (0,0)$, $u(x,y)$ é um quociente (bem definido) de funções contínuas sendo, portanto, uma função contínua nesses pontos. Para analisar a continuidade de u no ponto $(0,0)$ observa-se que:

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1,$$

   ou seja, $g(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ é uma função limitada; além disso, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$. Daí, conclui-se que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot g(x,y) = 0 = u(0,0).$$

   Portanto, u é contínua em todo o $\mathbb{R}^2$.

   Por sua vez, observa-se que, para $(x,y) \neq (0,0)$, $v(x,y)$ é um quociente (bem definido) de funções contínuas, sendo então, uma função contínua nesses pontos. Em $(0,0)$, v não é contínua pois não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} v(x,y)$; para ver isto, basta notar que:

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} v(x,0) = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{0^2}{x^2+0^2} = 0 \quad \text{ e } \quad \lim_{(0,y)\to(0,0)} v(0,y) = \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{0^2+y^2} = 1.$$

   Logo, v é contínua em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

   Finalmente, tem-se que f é contínua em $z = x+iy$ se, e somente se, u e v são contínuas em (x,y); dado que o maior conjunto onde u e v são ambas contínuas é $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, conclui-se que f é contínua em $\mathbb{C} - \{0\}$.

5. Determine, se possível, uma função analítica $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ tal que $f(i\,\pi) = -(1 + i\pi^3)$ e $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + e^x \cos y$.

   Solução: Suponha que exista uma função analítica $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$; então devem ser satisfeitas as equações de *Cauchy-Riemann*:

$$u_x(x,y) = v_y(x,y) \quad \Rightarrow \quad v_y(x,y) = 3x^2 - 3y^2 + e^x \cos y \qquad (*)$$

$$u_y(x,y) = -v_x(x,y) \quad \Rightarrow \quad v_x(x,y) = -[-6xy - e^x \operatorname{sen} y] = 6xy + e^x \operatorname{sen} y \qquad (**)$$

   De $(*)$ segue que:

$$v(x,y) = \int (3x^2 - 3y^2 + e^x \cos y)\,dy + \varphi(x) = 3x^2y - y^3 + e^x \operatorname{sen} y + \varphi(x)$$

$$\Rightarrow \quad v_x(x,y) = 6xy + e^x \cos y + \varphi'(x) \quad \overset{(**)}{\Rightarrow} \quad \varphi'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = M (\in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \quad v(x,y) = 3x^2y - y^3 + e^x \operatorname{sen} y + M.$$

   Logo, deve ser:

$$f(z) = [x^3 - 3xy^2 + e^x \cos y] + i\,[3x^2y - y^3 + e^x \operatorname{sen} y] + i\,M.$$

   Daí, segue que:

$$f(i\pi) = f(0 + i\pi) = [0^3 - 3 \cdot 0 \cdot \pi^2 + e^0 \cos \pi] + i\,[3 \cdot 0^2 \cdot \pi - \pi^3 + e^0 \operatorname{sen} \pi] + i\,M = -(1 + i\,\pi^3) + i\,M.$$

   Portanto, para que f esteja nas condições do enunciado, basta tomar $M = 0$.

6. Sejam $f(z) = \dfrac{z+2}{z^3(z-i)^2}$, definida para $z \in \mathbb{C}\backslash\{0, i\}$, e $\Gamma(t) = (-1 + 2\ \cos\ t) + i(1 +\ \text{sen}\ t)$, com $t \in [0, 2\pi]$.

   Calcule $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\ dz$.

   Solução: Inicialmente, nota-se que denotando-se $\Gamma(t) = x(t) + i\, y(t)$, tem-se que:

$$x(t) = -1 + 2\ \cos\ t \quad \text{e} \quad y(t) = 1 +\ \text{sen}\ t, \quad \text{ou seja,} \quad \frac{x(t)-(-1)}{2} = \cos\ t \quad \text{e} \quad \frac{y(t)-1}{1} = \text{sen}\ t$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(x(t)-(-1))^2}{2^2} + \frac{(y(t)-1)^2}{1^2} = 1.$$

   Logo, a curva Γ em questão trata-se da elipse com centro no ponto $-1 + i \cdot 1$, semi-eixo maior (horizontal) medindo 2 u.c. e semi-eixo menor (vertical) medindo 1 u.c.. Para verificar a localização dos pontos 0 e i em relação à elipse, nota-se que

$$\frac{(0-(-1))^2}{2^2} + \frac{(0-1)^2}{1^2} = \frac{5}{4} > 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{(0-(-1))^2}{2^2} + \frac{(1-1)^2}{1^2} = \frac{1}{4} < 1,$$

   ou seja, o ponto 0 está na região externa à curva Γ e o ponto i está na região interna à curva Γ. Além disso, vê-se que Γ é uma curva simples, fechada, orientada no sentido anti-horário, e a função $g(z) = \dfrac{z+2}{z^3}$ é analítica sobre Γ e na região interna a Γ. Nestas condições, utilizando-se a *Fórmula Integral de Cauchy para Derivadas*, obtém-se que:

$$\int_\Gamma f(z)\ dz = \int_\Gamma \frac{g(z)}{(z-i)^2}\ dz = \frac{2\pi i}{1!} \cdot g'(i).$$

   Dado que

$$g'(z) = \frac{1 \cdot z^3 - (z+2)\cdot(3z^2)}{z^6} = \frac{z^3 - 3z^3 - 6z^2}{z^6} = -2\,\frac{z+3}{z^4} \qquad \Rightarrow \qquad g'(i) = -2(3+i).$$

   Conclui-se que:

$$\int_\Gamma f(z)\ dz = -4\pi i(3+i) = 4\pi(1-3i).$$