UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Departamento de Matemática

Gabarito da 3a. Avaliação de Cálculo IV

1. Sejam o subespaço vetorial $W = [\cos \pi x, \cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x] \subset \mathcal{C}[-1,1]$ e a função $f(x) = x$, para $x \in [-1,1]$. Determinar a projeção ortogonal de f sobre W, considerando o produto interno

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x)\, dx. \qquad \textbf{(20 pontos)}$$

Solução: Sabe-se que as funções $f_1(x) = \cos \pi x$, $f_2(x) = \cos 2\pi x$ e $f_3(x) = \operatorname{sen} 2\pi x$ são ortonormais em relação ao produto interno dado; logo,

$$\operatorname{proj}_W f = \operatorname{proj}_{f_1} f + \operatorname{proj}_{f_2} f + \operatorname{proj}_{f_3} f = <f, f_1> \cdot f_1 + <f, f_2> \cdot f_2 + <f, f_3> \cdot f_3.$$

Como f é uma função ímpar e f_1 e f_2 são funções pares, resulta $f \cdot f_1$ e $f \cdot f_2$ são funções ímpares e portanto,

$$<f, f_1>= \int_{-1}^{1} f(x) \cdot f_1(x)\, dx = 0 = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot f_2(x)\, dx =<f, f_2>,$$

$$\Rightarrow \operatorname{proj}_W f =<f, f_3> \cdot f_3.$$

Por sua vez,

$$<f, f_3>= \int_{-1}^{1} f(x) \cdot f_3(x)\, dx = \int_{-1}^{1} x \cdot \operatorname{sen} 2\pi x\, dx = 2\int_{0}^{1} x \cdot \operatorname{sen} 2\pi x\, dx$$

$$= 2\left[-\frac{x}{2\pi} \cdot \cos 2\pi x \Big|_0^1 + \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \cos 2\pi x\, dx \right] = -\frac{1}{\pi}\left[1 - \frac{1}{2\pi} \cdot \operatorname{sen} 2\pi x \Big|_0^1 \right] = -\frac{1}{\pi}.$$

Conclui-se que

$$\operatorname{proj}_W f = -\frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{sen} 2\pi x.$$

2. Determinar a série de *Fourier* da função $f(x) = \cos^2 x$, definida no intervalo $[-\pi, \pi]$. **(20 pontos)**

Solução: Nota-se, inicialmente, que f é uma função par; logo, sua série de *Fourier* é uma série de cossenos. Daí, deve-se ter:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2 x\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}[1 + \cos 2x]\, dx = \frac{1}{\pi}\left[x + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen} 2x \right]_0^{\pi} = 1;$$

e para $n \neq 2$, deve-se ter:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \cdot \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}[1+\cos 2x] \cdot \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left\{ \int_0^{\pi} \cos nx\, dx + \int_0^{\pi} \cos 2x \cdot \cos nx\, dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{ \frac{1}{n} \cdot \operatorname{sen} nx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} [\cos(2+n)x + \cos(2-n)x]\, dx \right\} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}(2+n)x}{2+n} + \frac{\operatorname{sen}(2-n)x}{2-n} \right]_0^{\pi} = 0.$$

Para $n = 2$, obtem-se que:

$$a_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \cdot \cos 2x\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}[1 + \cos 2x] \cdot \cos 2x\, dx = \frac{1}{\pi}\left\{ \int_0^{\pi} \cos 2x\, dx + \int_0^{\pi} \cos^2 2x\, dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{ \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen} 2x \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} [1 + \cos 4x]\, dx \right\} = \frac{1}{2\pi}\left[x + \frac{\operatorname{sen} 4x}{4} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, a série procurada é $\displaystyle \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx = \frac{a_0}{2} + a_2 \cos 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x.$

3. Dada a função $f(x) = e^x$, definida no intervalo $[0, \pi]$, determinar a série de *Fourier* de sua extensão par ao intervalo $[-\pi, \pi]$. **(20 pontos)**

Solução: Denotando-se por f_P a extensão par de f ao intervalo $[-\pi, \pi]$, deve-se ter:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_P(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_P(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^x\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot e^x\Big|_0^{\pi} = \frac{2[e^{\pi}-1]}{\pi};$$

Para $n \geq 1$, tem-se que:

$$\int_0^{\pi} e^x \cdot \cos nx\,dx = \frac{e^x}{n}\operatorname{sen} nx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} e^x \cdot \operatorname{sen} nx\,dx = 0 + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} e^x \cdot (-\operatorname{sen} nx)\,dx$$

$$= \frac{e^x}{n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n^2}\int_0^{\pi} e^x \cdot (\cos nx)\,dx = \frac{e^{\pi}(-1)^n - 1}{n^2} - \frac{1}{n^2}\int_0^{\pi} e^x \cdot (\cos nx)\,dx$$

$$\Rightarrow (1 + \frac{1}{n^2})\int_0^{\pi} e^x \cdot \cos nx\,dx = \frac{e^{\pi}(-1)^n - 1}{n^2} \Rightarrow \int_0^{\pi} e^x \cdot \cos nx\,dx = \frac{e^{\pi}(-1)^n - 1}{n^2+1}.$$

Daí, para $n \geq 1$, tem-se que:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cdot \cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^x \cdot \cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{e^{\pi}(-1)^n - 1}{(n^2+1)}.$$

Portanto, a série de *Fourier* procurada é:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx = \frac{e^{\pi}-1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}[\frac{e^{\pi}(-1)^n - 1}{n^2+1}] \cos nx.$$

4. Seja a função $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \pi & , \text{ se } x \in [-\pi, 0) \\ 0 & , \text{ se } x = 0 \\ -\pi & , \text{ se } x \in (0, \pi]. \end{cases}$$

(a) Determinar sua série de *Fourier*; **(10 pontos)**

(b) Utilizar sua série de *Fourier* para calcular a soma da série $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\cdots$. **(10 pontos)**

Solução: (a) Nota-se, inicialmente, que f é uma função ímpar pois, $f(x) = \pi = -(-\pi) = -f(-x)$, se $x \in [-\pi, 0)$ e $f(-0) = -0 = -f(0)$; portanto, a série de *Fourier* de f é uma série de senos (ou seja, $a_n = 0$, para $n = 0, 1, 2, \cdots$). Daí, deve-se ter:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \operatorname{sen} nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cdot \operatorname{sen} nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (-\pi) \cdot \operatorname{sen} nx\,dx = 2\int_0^{\pi} (-\operatorname{sen} nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n}[(-1)^n - 1] \Rightarrow \begin{cases} b_{2n} = 0 \quad (n \geq 1) \\ b_{2n-1} = \frac{2}{2n-1}[(-1)^{2n-1} - 1] = -\frac{4}{2n-1} \quad (n \geq 1). \end{cases}$$

Portanto, a série de *Fourier* de f será:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_{2n-1}\operatorname{sen}(2n-1)x = -4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\operatorname{sen}(2n-1)x.$$

(b) Nota-se que $x = \frac{\pi}{2}$ é um ponto de continuidade de f e daí, neste ponto, o valor da série de *Fourier* de f é, justamente, o valor $f(\frac{\pi}{2})$; portanto, deve-se ter:

$$-\pi = f(\frac{\pi}{2}) = -4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\operatorname{sen}(2n-1)\frac{\pi}{2} = -4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\cdots$$

5. Determinar uma função $u : [0,+\infty) \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, tal que

$$\begin{cases} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) = 0, \text{ para } (t,x) \in [0,+\infty) \times [0,1], \\ u_x(t,0) = 0 = u_x(t,1), \text{ para } t \in [0,+\infty), \\ u(0,x) = x^2 - x, \text{ para } x \in [0,1]. \end{cases}$$

(20 pontos)

Solução: Sabe-se que a solução da equação do calor em questão é da forma

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} G_n(t) \cdot F_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n\pi)^2 t} \cdot [A_n \cos n\pi x + B_n \text{ sen } n\pi x],$$

com $A_n, B_n \in \mathbb{R}$. Para que sejam satisfeitas as condições de fronteira, os coeficientes A_n e B_n devem ser escolhidos de modo que

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(u_n(t,x)\big)_{x=0} = G_n(t) \cdot F_n'(0) = 0 \quad \text{ e } \quad \frac{\partial}{\partial x}\big(u_n(t,x)\big)_{x=1} = G_n(t) \cdot F_n'(1) = 0,$$

para todo $t \geq 0$ e todo $n \geq 0$. Observa-se que para $n = 0$, tem-se $u_0(t,x) = G_0(t) \cdot F_0(x) = 1 \cdot A_0$ e assim, por ser uma função constante, $u_0(t,x)$ já satisfaz às condições de fronteira. Daí, para $n \geq 1$, deve-se escolher A_n e B_n de modo que $F_n'(0) = 0 = F_n'(1)$, ou seja,

$$F_n'(0) = 0 \Rightarrow -A_n n\pi \text{ sen } 0 + B_n n\pi \cos 0 = 0 \Rightarrow B_n = 0$$

$$(\text{ e também, } F_n'(1) = 0 \Rightarrow -A_n n\pi \text{ sen } n\pi + B_n n\pi \cos n\pi = 0 \Rightarrow B_n = 0)$$

para todo $n \geq 1$. Portanto, deve ser $F_n(x) = A_n \cos n\pi x$, para todo $n \geq 0$ e assim, deve ser

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \cos n\pi x \cdot e^{-(n\pi)^2 t}.$$

Daí, vê-se que $u(0,x) = x^2 - x \Leftrightarrow (*) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} A_n \cos n\pi x = x^2 - x = j(x)$, para todo $x \in [0,1]$; portanto, os coeficientes A_n devem ser escolhidos de modo que a série em $(*)$ seja, justamente, a série de *Fourier* de $j_P(x)$, a extensão par de $j(x)$ ao intervalo $[-1,1]$. Daí, segue que:

$$A_0 = \int_{-1}^{1} j_P(x)\,dx = 2\int_0^1 j_P(x)\,dx = 2\int_0^1 j(x)\,dx = 2\int_0^1 (x^2 - x)\,dx = 2\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right] = -\frac{1}{3};$$

$$A_n = \int_{-1}^{1} j_P(x) \cos n\pi x\,dx = 2\int_0^1 j_P(x) \cos n\pi x\,dx = 2\int_0^1 j(x) \cos n\pi x\,dx = 2\int_0^1 (x^2 - x) \cos n\pi x\,dx$$

$$= 2\left[\int_0^1 x^2 \cos n\pi x\,dx - \int_0^1 x \cos n\pi x\,dx\right] = 2\,[(I) - (II)].$$

Daí, segue que:

$$(I) = \frac{x^2}{n\pi} \text{ sen } n\pi x\Big|_0^1 - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x \text{ sen } n\pi x\,dx = 0 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x \cdot (-\text{ sen } n\pi x)\,dx$$

$$\frac{2}{n\pi}\left[\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos n\pi x\,dx\right] = \frac{2}{n\pi}\left[\frac{1}{n\pi}(-1)^n - \frac{1}{(n\pi)^2} \text{ sen } n\pi x\Big|_0^1\right] = \frac{2}{(n\pi)^2}(-1)^n;$$

$$(II) = \int_0^1 x \cos n\pi x\,dx = \frac{x}{n\pi} \text{ sen } n\pi x\Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \text{sen } n\pi x\,dx = 0 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 (-\text{ sen } n\pi x)\,dx$$

$$= \frac{1}{(n\pi)^2}\cos n\pi x\Big|_0^1 = \frac{1}{(n\pi)^2}\,[(-1)^n - 1].$$

Daí, segue que:

$$A_n = 2\,[(I)-(II)] = 2\left[\frac{2}{(n\pi)^2}\,(-1)^n - \frac{1}{(n\pi)^2}\,[(-1)^n-1]\right] = 2\,\frac{[(-1)^n-1]}{(n\pi)^2} \qquad (n \geq 1)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} A_{2n} = 0 \quad (n \geq 1) \\ A_{2n-1} = \dfrac{-4}{(2n-1)^2\pi^2} \quad (n \geq 1). \end{cases}$$

Conclui-se que

$$u(t,x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_{2n-1} \cos\,(2n-1)\pi x \cdot e^{-((2n-1)\pi)^2 t} = -\frac{1}{6} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\,(2n-1)\pi x \cdot e^{-((2n-1)\pi)^2 t}.$$

6. Determinar uma função $u : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, tal que

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, \text{ para } (x,y) \in [0,1]\times[0,1], \\ u(0,y) = 0 = u(x,0) = u(1,y), \text{ para } x,\ y \in [0,1], \\ u(x,1) = x - x^2, \text{ para } x \in [0,1]. \end{cases} \qquad \textbf{(20 pontos)}$$

Solução: Pelas condições de fronteira do problema em questão, vê-se que sua solução é da forma

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \operatorname{sen}\, n\pi x \operatorname{senh}\, n\pi y,$$

onde os coeficientes A_n devem ser escolhidos de modo que $u(x,1) = x - x^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \operatorname{sen}\, n\pi x \operatorname{senh}\, n\pi$, ou seja, de modo que $A_n \operatorname{senh}\, n\pi$ seja o n-ésimo coeficiente da série de *Fourier* de $\ell_I(x)$, a extensão ímpar de $\ell(x) = x - x^2$. Portanto, para todo $n \geq 1$ deve-se ter:

$$A_n \operatorname{senh}\, n\pi = \int_{-1}^{1} \ell_I(x) \operatorname{sen}\, n\pi x\, dx = 2\int_0^1 \ell_I(x) \operatorname{sen}\, n\pi x\, dx = 2\int_0^1 \ell(x) \operatorname{sen}\, n\pi x\, dx$$

$$= 2\left[\int_0^1 x \operatorname{sen}\, n\pi x\, dx - \int_0^1 x^2 \operatorname{sen}\, n\pi x\, dx\right] = 2\,[(I)-(II)];$$

$$(I) = \int_0^1 x \operatorname{sen}\, n\pi x\, dx = -\frac{x}{n\pi}\cos\, n\pi x\Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos\, n\pi x\, dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{1}{(n\pi)^2}\operatorname{sen}\, n\pi x\Big|_0^1 = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi};$$

$$(II) = \int_0^1 x^2 \operatorname{sen}\, n\pi x\, dx = -\frac{x^2}{n\pi}\cos\, n\pi x\Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x \cos\, n\pi x\, dx$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{2}{n\pi}\left[\frac{x}{n\pi}\operatorname{sen}\, n\pi x\Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \operatorname{sen}\, n\pi x\, dx\right] = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{2}{n\pi}\left[0 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1(-\operatorname{sen}\, n\pi x)\, dx\right]$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{2}{(n\pi)^2}\int_0^1(-\operatorname{sen}\, n\pi x)\, dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{2}{(n\pi)^3}\cos\, n\pi x\Big|_0^1 = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{2}{(n\pi)^3}\,[(-1)^n - 1];$$

daí, vê-se que $(I)-(II) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n\pi} - \dfrac{(-1)^{n+1}}{n\pi} - \dfrac{2}{(n\pi)^3}\,[(-1)^n-1] = \dfrac{2}{(n\pi)^3}\,[1-(-1)^n]$ e portanto,

$$A_n \operatorname{senh}\, n\pi = \frac{4}{(n\pi)^3}\,[1-(-1)^n] \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A_{2n} \operatorname{senh}\, 2n\pi = 0 \quad (n \geq 1) \\ A_{2n-1} \operatorname{senh}\,(2n-1)\pi = \dfrac{8}{((2n-1)\pi)^3} \quad (n \geq 1). \end{cases}$$

Conclui-se que $A_{2n} = 0$ e $A_{2n-1} = \dfrac{8}{((2n-1)\pi)^3 \operatorname{senh}\,(2n-1)\pi}$, para todo $n \geq 1$; portanto,

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8}{((2n-1)\pi)^3 \operatorname{senh}\,(2n-1)\pi} \operatorname{sen}\,(2n-1)\pi x \operatorname{senh}\,(2n-1)\pi y.$$