UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ - Departamento de Matemática

Gabarito da 3a. Avaliação de Cálculo IV - Turma B - 27 /Nov /2018

1. Sejam o subespaço vetorial $W = [\cos\,x, \text{sen}\,2x, \text{sen}\,3x] \subset \mathcal{C}[-\pi,\pi]$ e a função $f(x) = x^2$, para $x \in [-\pi,\pi]$. Determinar a projeção ortogonal de f sobre W, considerando o produto interno

$$< f, g >= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot g(x)\,dx. \qquad (\textbf{20 pontos})$$

Solução: Sabe-se que as funções $f_1(x) = \cos\,x$, $f_2(x) = \text{sen}\,2x$ e $f_3(x) = \text{sen}\,3x$ são ortonormais em relação ao produto interno dado; logo,

$$\text{proj}_W f = \text{proj}_{f_1} f + \text{proj}_{f_2} f + \text{proj}_{f_3} f = <f, f_1>\cdot f_1 + <f, f_2>\cdot f_2 + <f, f_3>\cdot f_3.$$

Como f é uma função par e f_2 e f_3 são funções ímpares, resulta que $f\cdot f_2$ e $f\cdot f_3$ são funções ímpares e portanto,

$$<f, f_2>= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot f_2(x)\,dx = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot f_3(x)\,dx =<f, f_3>,$$

$$\Rightarrow \ \text{proj}_W f =<f, f_1>\cdot f_1.$$

Por sua vez,

$$<f, f_1>= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot f_1(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cdot\ \cos\,x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\cdot\ \cos\,x\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[x^2\cdot\text{sen}\,x\Big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} x\ \text{sen}\,x\,dx\right] = \frac{2}{\pi}\left[0 + 2\int_0^{\pi} x\,(-\ \text{sen}\,x)\,dx\right]$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[x\ \cos\,x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\ \cos\,x)\,dx\right] = \frac{4}{\pi}\left[-\pi -\ \text{sen}\,x\Big|_0^{\pi}\right] = -4.$$

Conclui-se que

$$\text{proj}_W f = -4\cdot\ \cos\,x.$$

2. Determinar a série de *Fourier* da função $f(x) = \text{sen}^2 x$, definida no intervalo $[-\pi,\pi]$. (**20 pontos**)

Solução: Nota-se, inicialmente, que f é uma função par; logo, sua série de *Fourier* é uma série de cossenos. Daí, deve-se ter:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}\ ^2 x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \text{sen}^2 x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}[1-\cos\,2x]\,dx = \frac{1}{\pi}\left[x - \frac{1}{2}\cdot\text{sen}\,2x\right]_0^{\pi} = 1.$$

Para $n \neq 2$, deve-se ter:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\text{sen}^2 x\cdot\cos\,nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}[1-\cos\,2x]\cdot\cos\,nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi}\cos\,nx\,dx - \int_0^{\pi}\cos\,2x\cdot\cos\,nx\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\ \text{sen}\ nx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\cos\ (2+n)x + \cos\ (2-n)nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[0 - \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2+n}\ \text{sen}\ (2+n)x + \frac{1}{2-n}\ \text{sen}\ (2-n)x\right\}_0^{\pi}\right] = 0.$$

Por outro lado, se $n = 2$ tem-se que:

$$a_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\text{sen}\ ^2 x\cdot\cos\,2x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}[1-\cos\,2x]\cdot\cos\,2x\,dx = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi}\cos\,2x\,dx - \int_0^{\pi}\cos^2 2x\,dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2}\cdot\text{sen}\,2x\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}[1+\cos\,4x]\,dx\right\} = -\frac{1}{2\pi}\left[x + \frac{\text{sen}\,4x}{4}\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{2\pi}(\pi) = -\frac{1}{2}.$$

Portanto, a série de *Fourier* procurada é:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \ \cos\, nx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ \cos 2x,$$

ou seja, a identidade $\text{sen}^2 x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\ \cos 2x$ já é a série de *Fourier* de $\text{sen}^2 x$.

3. Dada a função $f(x) = e^x$, definida no intervalo $(0, \pi]$, determinar a série de *Fourier* de sua extensão ímpar ao intervalo $[-\pi, \pi]$. **(20 pontos)**

   Solução: Seja f_I a extensão ímpar de f ao intervalo $[-\pi, \pi]$; então, deve-se ter que a série de *Fourier* de f_I é uma série de senos.

   Nota-se que, para $n \geq 1$, tem-se:

$$\int_0^\pi e^x \cdot\ \text{sen}\ nx\, dx = -\frac{e^x}{n}\cos\, nx\Big|_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi e^x \cdot\ \cos\, nx\, dx = \frac{1 - e^\pi(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\int_0^\pi e^x \cdot \cos\, nx\, dx$$

$$= \frac{1 - e^\pi(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\left[\frac{e^x}{n}\ \text{sen}\ nx\Big|_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi e^x \cdot\ \text{sen}\ nx\, dx\right] = \frac{1 - e^\pi(-1)^n}{n} - \frac{1}{n^2}\int_0^\pi e^x \cdot\ \text{sen}\ nx\, dx$$

$$\Rightarrow (1 + \frac{1}{n^2})\int_0^\pi e^x \cdot\ \text{sen}\ nx\, dx = \frac{1 - e^\pi(-1)^n}{n} \ \Rightarrow \int_0^\pi e^x \cdot\ \text{sen}\ nx\, dx = \frac{n(1 - e^\pi(-1)^n)}{n^2 + 1}.$$

   Sendo assim, obtem-se que:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f_I(x) \cdot\ \text{sen}\ nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_I(x) \cdot\ \text{sen}\ nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x) \cdot\ \text{sen}\ nx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^x \cdot\ \text{sen}\ nx\, dx = \frac{2n(1 - e^\pi(-1)^n)}{\pi(n^2 + 1)},$$

   para todo $n \geq 1$. Portanto, a série de *Fourier* procurada é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\ \text{sen}\ nx = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(1 - e^\pi(-1)^n)}{n^2 + 1}\ \text{sen}\ nx.$$

4. Seja a função $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \pi & , \quad \text{se } x \in [-\pi, 0) \\ 0 & , \quad \text{se } x = 0 \\ -\pi & , \quad \text{se } x \in (0, \pi]. \end{cases}$$

   (a) Determinar sua série de *Fourier*; **(10 pontos)**

   (b) Utilizar sua série de *Fourier* para calcular a soma da série $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7}\cdots$. **(10 pontos)**

   Solução: (a) Nota-se, inicialmente, que f é uma função ímpar pois, $f(x) = \pi = -(-\pi) = -f(-x)$, se $x \in [-\pi, 0)$ e $f(-0) = -0 = -f(0)$; portanto, a série de *Fourier* de f é uma série de senos (ou seja, $a_n = 0$, para $n = 0, 1, 2, \cdots$). Daí, deve-se ter:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x) \cdot\ \text{sen}\ nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x) \cdot\ \text{sen}\ nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (-\pi) \cdot\ \text{sen}\ nx\, dx = 2\int_0^\pi (-\ \text{sen}\ nx)\, dx$$

$$= \frac{2}{n}\cos\, nx\Big|_0^\pi = \frac{2}{n}\left[(-1)^n - 1\right] \ \Rightarrow \ \begin{cases} b_{2n} = 0 \qquad (n \geq 1) \\ b_{2n-1} = \dfrac{2}{2n-1}\left[(-1)^{2n-1} - 1\right] = -\dfrac{4}{2n-1} \qquad (n \geq 1). \end{cases}$$

   Portanto, a série de *Fourier* de f será:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_{2n-1}\text{sen}(2n-1)x = -4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\ \text{sen}(2n-1)x.$$

(b) Nota-se que $x = \dfrac{\pi}{2}$ é um ponto de continuidade de f e daí, neste ponto, o valor da série de *Fourier* de f é, justamente, o valor $f(\dfrac{\pi}{2})$; portanto, deve-se ter:

$$-\pi = f(\frac{\pi}{2}) = -4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1}\,\mathrm{sen}(2n-1)\frac{\pi}{2} = -4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \;\;\Rightarrow\;\; \frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\cdots$$

5. Determinar uma função $u : [0,1] \times [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, tal que

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \text{ para } (x,t) \in [0,1] \times [0,+\infty), \\ u_x(0,t) = 0 = u_x(1,t), \text{ para } t \in [0,+\infty), \\ u(x,0) = x - x^2, \text{ para } x \in [0,1]. \end{cases}$$

(**20 pontos**)

Solução: Sabe-se que a solução da equação do calor em questão é da forma

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n(x) \cdot G_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} [A_n \cos n\pi x + B_n \,\mathrm{sen}\, n\pi x] \cdot e^{-(n\pi)^2 t},$$

com $A_n, B_n \in \mathbb{R}$. Para que sejam satisfeitas as condições de fronteira, os coeficientes A_n e B_n devem ser escolhidos de modo que

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(u_n(x,t)\big)_{x=0} = F_n'(0) \cdot G_n(t) = 0 \quad \text{ e } \quad \frac{\partial}{\partial x}\big(u_n(x,t)\big)_{x=1} = F_n'(1) = 0 \cdot G_n(t),$$

para todo $t \geq 0$ e todo $n \geq 0$. Observa-se que para $n = 0$, tem-se $u_0(x,t) = F_0(x) \cdot G_0(t) = A_0 \cdot 1$ e assim, por ser uma função constante, $u_0(x,t)$ já satisfaz às condições de fronteira. Daí, para $n \geq 1$, deve-se escolher A_n e B_n de modo que $F_n'(0) = 0 = F_n'(1)$, ou seja,

$$F_n'(0) = 0 \Rightarrow -A_n n\pi \,\mathrm{sen}\, 0 + B_n n\pi \cos 0 = 0 \Rightarrow B_n = 0$$

$$(\text{ e também, } F_n'(1) = 0 \Rightarrow -A_n n\pi \,\mathrm{sen}\, n\pi + B_n n\pi \cos n\pi = 0 \Rightarrow B_n = 0)$$

para todo $n \geq 1$. Portanto, deve ser $F_n(x) = A_n \cos n\pi x$, para todo $n \geq 0$ e assim, deve ser

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \cos n\pi x \cdot e^{-(n\pi)^2 t}.$$

Daí, vê-se que $u(x,0) = x - x^2 \Leftrightarrow (*) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} A_n \cos n\pi x = x - x^2 = j(x)$, para todo $x \in [0,1]$; portanto, os coeficientes A_n devem ser escolhidos de modo que a série em $(*)$ seja, justamente, a série de *Fourier* de $j_P(x)$, a extensão par de $j(x)$ ao intervalo $[-1,1]$. Daí, segue que:

$$A_0 = \int_{-1}^{1} j_P(x)\,dx = 2\int_0^1 j_P(x)\,dx = 2\int_0^1 j(x)\,dx = 2\int_0^1 (x - x^2)\,dx = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] = \frac{1}{3};$$

$$A_n = \int_{-1}^{1} j_P(x) \cos n\pi x\,dx = 2\int_0^1 j_P(x) \cos n\pi x\,dx = 2\int_0^1 j(x) \cos n\pi x\,dx = 2\int_0^1 (x - x^2) \cos n\pi x\,dx$$

$$= 2\left[\int_0^1 x \cos n\pi x\,dx - \int_0^1 x^2 \cos n\pi x\,dx\right] = 2\,[(I) - (II)].$$

$$(I) = \int_0^1 x \cos n\pi x\,dx = \frac{x}{n\pi}\,\mathrm{sen}\, n\pi x\Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \mathrm{sen}\, n\pi x\,dx = 0 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 (-\,\mathrm{sen}\, n\pi x)\,dx$$

$$= \frac{1}{(n\pi)^2} \cos n\pi x\Big|_0^1 = \frac{1}{(n\pi)^2}\,[(-1)^n - 1].$$

$$(II) = \int_0^1 x^2 \cos n\pi x\, dx = \frac{x^2}{n\pi} \operatorname{sen} n\pi x\Big|_0^1 - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x \operatorname{sen} n\pi x\, dx = 0 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\cdot(-\operatorname{sen} n\pi x)\, dx$$

$$\frac{2}{n\pi}\left[\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos n\pi x\, dx\right] = \frac{2}{n\pi}\left[\frac{1}{n\pi}(-1)^n - \frac{1}{(n\pi)^2}\operatorname{sen} n\pi x\Big|_0^1\right] = \frac{2}{(n\pi)^2}(-1)^n.$$

Portanto, obtem-se que:

$$A_n = 2\,[(I) - (II)] = 2\left[\frac{1}{(n\pi)^2}[(-1)^n - 1] - \frac{2}{(n\pi)^2}(-1)^n\right] = -2\,\frac{1+(-1)^n}{(n\pi)^2} \qquad (n \geq 1)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} A_{2n-1} = 0 \quad (n \geq 1) \\ A_{2n} = -\dfrac{4}{(2n\pi)^2} = -\dfrac{1}{(n\pi)^2} \quad (n \geq 1). \end{cases}$$

Segue daí que

$$u(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_{2n} \cos 2n\pi x \cdot e^{-(2n\pi)^2 t} = \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\cos 2n\pi x \cdot e^{-(2n\pi)^2 t}.$$

6. Determinar uma função $u : [0,2] \times [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, tal que

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \text{ para } (x,t) \in [0,2]\times[0,+\infty), \\ u(0,t) = 0 = u(2,t), \text{ para } t \in [0,+\infty), \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = x \text{ para } x \in [0,2]. \end{cases}$$

(**20 pontos**)

Solução: Sabe-se que a solução da equação de ondas com estas condições de fronteira é da forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(x)\cdot G_n(t) = \sum_{n=1}^{+\infty}[A_n \cos\frac{n\pi t}{2} + B_n \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{2}]\cdot \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2},$$

com $A_n, B_n \in \mathbb{R}$. Para determinar A_n e B_n considera-se que:

$$u(x,0) = 0 = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(x)\cdot G_n(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}\cdot[A_n \cos 0 + B_n \operatorname{sen} 0] = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2},$$

para todo $x \in [0,2]$, de onde se conclui que deve ser $A_n = 0$, para todo $n \geq 1$ (pois esta última série deve ser a série de *Fourier* da função nula). Além disso, como

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{2}\cdot \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2} \quad\Rightarrow\quad u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi t}{2}\cdot \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}$$

e portanto,

$$u_t(x,0) = x \quad\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \frac{n\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2} = x,$$

para todo $x \in [0,2]$. Logo, deve-se escolher os coeficientes B_n de modo que $B_n \dfrac{n\pi}{2}$ seja o n-ésimo coeficiente da série de *Fourier* de $\ell(x) = x$ (extensão ímpar) no intervalo $[-2,2]$. Deve-se ter então:

$$B_n \frac{n\pi}{2} = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}\, dx = \int_0^2 x \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}\, dx = -\frac{2}{n\pi}\, x \cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 + \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \cos\frac{n\pi x}{2} dx$$

$$= \frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1} + \frac{4}{(n\pi)^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 = \frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1} \Rightarrow B_n = \frac{8}{(n\pi)^2}(-1)^{n+1} \qquad (n \geq 1).$$

Conclui-se que deve ser

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}\cdot \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{2} = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}\cdot \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{2}.$$