UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Departamento de Matemática

Avaliação Final de CM044 - Cálculo IV - Turma A - 12 de Dezembro de 2017

1. Dada a função $f(z) = \dfrac{\ln\,(2z)}{(3z-1)^3}$, calcular $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz$ onde Γ é a curva $|z+i| = 2$, orientada no sentido anti-horário.

   Solução: Houve um erro nesta questão; a circunferência em questão deveria ter raio menor que 1. Por esta razão, foram atribuídos os **20 pontos** referentes a esta questão a todos os alunos.

2. Dada a função $f(z) = \dfrac{z-2}{1-z^2}$, determine sua série de *Taylor* em torno de $z_0 = i$ e o raio de convergência da mesma.

   Solução: Tem-se que

$$f(z) = \frac{z-2}{1-z^2} = \frac{z-2}{(1-z)(1+z)} = \frac{a}{1-z} + \frac{b}{1+z} = \frac{a(1+z)+b(1-z)}{(1-z)(1+z)} = \frac{(a-b)z+(a+b)}{(1-z)(1+z)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=1 \Rightarrow a=b+1 \Rightarrow a=-\frac{1}{2} \\ a+b=-2 \Rightarrow (b+1)+b=-2 \Rightarrow b=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(z) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+z}.$$

Daí, segue que:

$$(I) \qquad \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-i-z+i} = \frac{1}{(1-i)-(z-i)} = \frac{1}{1-i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-i}{1-i}}$$

$$= \frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(1-i)^n}(z-i)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(1-i)^{n+1}}(z-i)^n,$$

para $\dfrac{|z-i|}{|1-i|} < 1$, ou seja, para $|z-i| < \sqrt{2}$.

$$(II) \qquad \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1+i+z-i} = \frac{1}{1+i}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{z-i}{1+i})}$$

$$= \frac{1}{1+i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1+i)^n}(z-i)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}(z-i)^n,$$

para $\dfrac{|z-i|}{|1+i|} < 1$, ou seja, para $|z-i| < \sqrt{2}$. Logo, por (I) e (II), conclui-se que

$$f(z) = -\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(1-i)^{n+1}}(z-i)^n - \frac{3}{2}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}(z-i)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{3(-1)^{n+1}}{2(1+i)^{n+1}} - \frac{1}{2(1-i)^{n+1}}\right](z-i)^n,$$

para $|z-i| < \sqrt{2}$, ou seja, tal série tem raio de convergência igual a $\sqrt{2}$.

3. Dada a função $f(z) = \dfrac{5}{z^3+z^2-z-1}$, determine $\operatorname{Res}_{z=-1} f(z)$ das seguintes formas:

   (a) Através da série de *Laurent* em $z_0 = -1$;

   (b) Através da *Fórmula dos Resíduos*.

   Solução: (a) Inicialmente, nota-se que $z^3+z^2-z-1 = (z-1)(z^2+2z+1) = (z-1)(z+1)^2$ e portanto,

$$f(z) = \frac{5}{(z-1)(z+1)^2} = \frac{5}{z-1} \cdot \frac{1}{(z+1)^2}.$$

   Dado que $g(z) = (z-1)^{-1}$ é analítica em $z_0 = -1$ tem-se que sua série de *Laurent* é sua série de *Taylor*. Daí, segue que:

$$f(z) = \frac{5}{(z-1)(z+1)^2} = \frac{5}{(z+1)^2} \cdot \frac{1}{z-1} = \frac{5}{(z+1)^2} \cdot \frac{1}{z+1-2}$$

$$= \frac{5}{(z+1)^2} \cdot \frac{1}{(-2)} \cdot \frac{1}{1-\frac{z+1}{2}} = \frac{5}{(z+1)^2} \cdot \frac{1}{(-2)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z+1}{2}\right)^n = -\frac{5}{(z+1)^2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+1)^n}{2^{n+1}}$$

$$= -\frac{5/2}{(z+1)^2} - \frac{5/4}{z+1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(z+1)^{n-2}}{2^{n+1}},$$

   e portanto, conclui-se que $\operatorname{Res}_{z=-1} f(z) = -5/4$.

   (b) Dado que $z_0 = -1$ é pólo de ordem 2 de $f(z)$, a *Fórmula dos Resíduos* neste caso reduz-se a:

$$\operatorname{Res}_{z=-1} f(z) = \frac{1}{(2-1)!} \cdot \lim_{z\to-1} \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}} \left[(z+1)^2 \cdot f(z)\right]$$

$$= \lim_{z\to-1} \frac{d}{dz}\left[\frac{5}{z-1}\right] = -5 \cdot \lim_{z\to-1} \frac{1}{(z-1)^2} = -5/4.$$

4. Seja a função $f(z) = \dfrac{1}{z^2-z-2}$. Para algum z_0 de sua escolha, determine todas as possíveis séries de *Laurent* de f com centro em z_0.

   Solução: Observa-se que $f(z) = \dfrac{1}{z^2-z-2} = \dfrac{1}{(z-2)(z+1)}$ e portanto, 2 e -1 são pólos de f. Logo, escolhendo-se $z_0 = 2$ ou $z_0 = -1$, ou ainda z_0 equidistante de 2 e -1, existirão apenas duas regiões para serem calculadas as séries solicitadas (e em caso contrário, existirão 3 tais regiões). Escolhamos, por simplicidade, $z_0 = 2$; então deve-se ter:

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z+1)} = \frac{1}{(z-2)(z-2+3)} = \frac{1}{z-2} \cdot \frac{1}{3(1-(-\frac{z-2}{3}))}$$

$$= \frac{1}{3(z-2)} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}(z-2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-2)^{n-1},$$

   para $0 < |z-2| < 3$. Por outro lado, deve-se ter também:

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z+1)} = \frac{1}{z-2} \cdot \frac{1}{z-2+3} = \frac{1}{z-2} \cdot \frac{1}{z-2} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{3}{z-2})}$$

$$= \frac{1}{(z-2)^2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n(-1)^n}{(z-2)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n(-1)^n}{(z-2)^{n+2}},$$

   para $3 < |z-2|$.

5. Seja a função $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 0$, se $x \in [-\pi, 0)$ e $f(x) = x^2$, se $x \in [0, \pi]$. Determine sua série de *Fourier* em $[-\pi, \pi]$.

Solução: Tem-se que:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{3\pi}x^3\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{3\pi}[\pi^3 - 0] = \frac{\pi^2}{3};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{x^2 \cdot \frac{\text{sen } nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x(-\text{sen } nx)\,dx\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{0 + \frac{2}{n}\left[x \cdot \frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{2}{n}\left[\pi \cdot \frac{(-1)^n}{n} - \frac{\text{sen } nx}{n^2}\Big|_0^{\pi}\right]\right\} = \frac{2(-1)^n}{n^2};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen } nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,\text{sen } nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left\{-x^2 \cdot \frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\,\cos nx\,dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\pi^2 \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n}\left[x \cdot \frac{\text{sen } nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}(-\text{sen } nx)\,dx\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\pi^2 \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n}\left[0 + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\pi^2 \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n}\left[0 + \frac{1}{n^2}\left[(-1)^n - 1\right]\right]\right\} = \frac{1}{n\pi}\left\{\pi^2(-1)^{n+1} + \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2}\right\}.$$

Portanto, deve-se ter:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\,\cos nx + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n\,\text{sen } nx$$

$$= \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\,\cos nx + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\pi}\left\{\pi^2(-1)^{n+1} + \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2}\right\}\,\text{sen } nx.$$

6. Considere o sistema

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \text{ para todo } (x,t) \in [0,2] \times [0,+\infty) & (i) \\ u(0,t) = 0 = u(2,t), \text{ para todo } t \in [0,+\infty) & (ii) \\ u(x,0) = x, \text{ para todo } x \in [0,2]. & (iii) \end{cases}$$

(a) Determine uma solução $u(x,t)$ para tal sistema;

(b) Mostre que a função $u(x,t)$ dada no item (a) satisfaz às condições (i), (ii) e (iii).

Solução: (a) Sabe-se que uma solução $u(x,t)$ de tal sistema é da forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\,\text{sen } \frac{n\pi x}{2} \cdot e^{-\frac{(n\pi)^2}{4}t},$$

onde a_n deve ser o $n-$ésimo coeficiente da série de *Fourier* da extensão ímpar $f_I$de $f(x) = x$, ao intervalo $[-2, 2]$. Logo, deve ser:

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f_I(x)\,\text{sen } \frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{2}{2}\int_0^2 x\,\text{sen}\frac{n\pi x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left\{-x \cdot \cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2 + \int_0^2 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx\right\} = \frac{2}{n\pi}\left\{2(-1)^{n+1} + \frac{2}{n\pi}\ \mathrm{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2\right\} = \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Logo, deve ser:

$$u(x,t) = 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\ \mathrm{sen}\ \frac{n\pi x}{2} \cdot e^{-\frac{(n\pi)^2}{4}t}.$$

(b) Tem-se que:

$$u_x(x,t) = 4\frac{\partial}{\partial x}\left\{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\ \mathrm{sen}\ \frac{n\pi x}{2} \cdot e^{-\frac{(n\pi)^2}{4}t}\right\}$$

$$= 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \cdot \frac{n\pi}{2} \cdot \cos\frac{n\pi x}{2} \cdot e^{-\frac{(n\pi)^2}{4}t};$$

$$u_{xx}(x,t) = 4\frac{\partial}{\partial x}\left\{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \cdot \frac{n\pi}{2} \cdot \cos\frac{n\pi x}{2} \cdot e^{-\frac{(n\pi)^2}{4}t}\right\}$$

$$= 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n}}{n\pi} \cdot \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 \cdot \mathrm{sen}\ \frac{n\pi x}{2} \cdot e^{-\frac{(n\pi)^2}{4}t};$$

$$u_t(x,t) = 4\frac{\partial}{\partial t}\left\{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\ \mathrm{sen}\ \frac{n\pi x}{2} \cdot e^{-\frac{(n\pi)^2}{4}t}\right\}$$

$$= 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\ \mathrm{sen}\ \frac{n\pi x}{2} \cdot \left(-\frac{(n\pi)^2}{4}\right) \cdot e^{-\frac{(n\pi)^2}{4}t}$$

$$= 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n}}{n\pi}\ \mathrm{sen}\ \frac{n\pi x}{2} \cdot \frac{(n\pi)^2}{4} \cdot e^{-\frac{(n\pi)^2}{4}t} = u_{xx}(x,t),$$

e portanto, $u(x,t)$ satisfaz à condição (i). Além disso, tem-se que:

$$u(0,t) = 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\ \mathrm{sen}\ 0 \cdot e^{-\frac{(n\pi)^2}{4}t} = 0 = 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\ \mathrm{sen}\ n\pi \cdot e^{-\frac{(n\pi)^2}{4}t} = u(2,t),$$

ou seja, $u(x,t)$ satisfaz à condição (ii). Finalmente, $u(x,t)$ verifica (iii) pois

$$u(x,0) = 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\ \mathrm{sen}\ \frac{n\pi x}{2} \cdot e^{0} = f(x) = x,$$

para todo $x \in [0,2]$.