UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Departamento de Matemática

Gabarito da 1a. Avaliação de CM044 - Cálculo IV - Turma A - 03 de Abril de 2018

1. Considere o conjunto $A = \{\, z \in \mathbb{C}\,;\ |z| = 2 \ \text{ e } |Re(z)| = |Im(z)|\,\}$.

   (a) Expresse todos os pontos de A na forma polar;

   (b) Localize todos os pontos de A no plano complexo.

   Solução:

   (a) Nota-se, inicialmente, que os pontos de A pertencem à circunferência de centro na origem e raio 2; além disso, para $z = x + iy \in A$ deve-se ter $|x| = |y|$, ou seja, $x = \pm y$. Portanto, segue que:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow (\pm y)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm y \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

   Logo, A contém apenas os seguintes quatro pontos: $\sqrt{2}(1+i)$, $\sqrt{2}(-1+i)$, $\sqrt{2}(-1-i)$ e $\sqrt{2}(1-i)$, os quais são expressos na forma polar como $2e^{i\frac{\pi}{4}}$, $2e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $2e^{i\frac{5\pi}{4}}$ e $2e^{i\frac{7\pi}{4}}$, respectivamente.

   (b) Para localizar tais pontos no plano complexo basta determinar a interseção da circunferência de equação $|z| = 2$ com as retas $y = x$ e $y = -x$.

2. Seja z_0 uma raíz da equação $z^4 = 8\sqrt{2}(-1+i)$ localizada no terceiro quadrante do plano complexo. Calcule a potência z_0^2 e a localize graficamente.

   Solução: Tem-se que $|8\sqrt{2}(-1+i)| = 8\sqrt{2}|-1+i| = 16 = 2^4$ e que $\text{Arg}(8\sqrt{2}(-1+i)) = \text{Arg}\,(-1+i) = \dfrac{3\pi}{4}$, de onde se conclui que $8\sqrt{2}(-1+i) = 2^4 e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

   Portanto, utilizando-se a forma polar também para $z (= r\cdot e^{i\alpha})$ obtem-se:

$$z^4 = 8\sqrt{2}(-1+i) \Leftrightarrow r^4 e^{i4\alpha} = 2^4 e^{i\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow r = 2 \text{ e } \alpha = \frac{3\pi}{16} + \frac{n\pi}{2},$$

   para $n = 0, 1, 2, 3$ (obtendo-se assim, apenas as quatro raízes distintas). Logo, para escolher a raíz da equação que está localizada no terceiro quadrante deve-se fazer $n = 2$, obtendo-se a raíz $z_0 = 2e^{i(\frac{3\pi}{16}+\pi)}$. Daí, segue que:

$$z_0^2 = 2^2 \cdot e^{i\frac{3\pi}{8}} \cdot e^{i2\pi}.$$

   Portanto, para sua localização no plano complexo basta notar que $\text{Arg}\,(z_0^2) = \dfrac{3\pi}{8}$ e que $|z_0^2| = 4$.

3. Seja $B = \{z \in \mathbb{C}; z = \dfrac{1}{n} + i\,\dfrac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}\}$. Determine:

   (a) os pontos interiores de B;

   (b) os pontos de fronteira de B;

   (c) os pontos de aderência de B;

   (d) os pontos de acumulação de B.

   Solução:

   (a) Observa-se que os pontos de B estão sobre o gráfico da parábola de equação $y = x^2$; portanto, qualquer disco aberto centrado em qualquer ponto de B não pode estar contido em B, ou seja, B não possui pontos interiores;

   (b) Todo ponto de B é ponto de fronteira de B. De fato, se $z \in B$ então para todo $r > 0$ tem-se que $D(z;r) \cap B \neq \emptyset$ (já que z está nessa interseção) e também $D(z;r) \cap B^c \neq \emptyset$ (já que $D(z;r) \not\subset B$ pois z não é ponto interior de B). Além dos pontos de B, o ponto $z = 0$ é também ponto de fronteira de B pois para todo $r > 0$ tem-se que $D(0;r) \cap B \neq \emptyset$ (basta escolher n suficientemente grande de modo que $|\dfrac{1}{n} + \dfrac{i}{n^2}| < r$) e $D(0;r) \cap B^c \neq \emptyset$ (já que esta interseção contém o ponto $z = 0$). Portanto, $B \cup \{0\}$ é o conjunto dos pontos de fronteira de B (já que todo $z \in B^c$, $z \neq 0$, é ponto interior de B^c).

   (c) Sabe-se que todo ponto de fronteira de um conjunto é ponto de aderência do conjunto, e portanto, os pontos de $B \cup \{0\}$ são pontos aderentes de B. Além disso, qualquer $z \in \mathbb{C}$ que não seja ponto de fronteira de B, é ponto interior de B^c e, portanto, não será ponto de aderência de B.

   (d) Para $z = \dfrac{1}{n} + \dfrac{i}{n^2}$ escolhendo-se $0 < r < \left|(\dfrac{1}{n} + \dfrac{i}{n^2}) - (\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{i}{(n+1)^2})\right|$ terá-se que $D(z;r) \cap B = \{z\}$; logo, nenhum de seus pontos é ponto de acumulação. E dado que todo ponto de acumulação é também ponto de aderência, resta verificar se $z = 0$ é ponto de acumulação de B; mas isto é imediato pois para todo disco $D(0;r)$ existe $z = \dfrac{1}{n} + \dfrac{i}{n^2} \in D(0;r)$, $z \neq 0$, ou seja, $[D(0;r) - \{0\}] \cap B \neq \emptyset$.

4. Seja $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ a função dada por $f(z) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2} - \dfrac{iy^2}{x^2+y^2}$, para $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, e $f(0) = 0$. Determine o conjuntos dos pontos onde f é contínua.

   Solução: Observa-se inicialmente, que para $z \neq 0$, tem-se que $f(z)$ tem em suas partes real e imaginária, quocientes de funções polinomiais bem definidos, sendo portanto, funções contínuas. Resta verificar se f é contínua em $z = 0$. Nota-se então, que a função $v(x,y) = -\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$ (parte imaginária de f) não é contínua em $(x,y) = (0,0)$; de fato, tem-se que:

$$v(x,0) = 0 \Rightarrow \lim_{(x,0)\to(0,0)} v(x,0) = 0$$

$$v(x,x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{(x,0)\to(0,0)} v(x,x) = -\frac{1}{2}$$

   Portanto, não existe o limite de v no ponto $(0,0)$ e daí, v não é contínua em tal ponto (resultando que f não é contínua em $z = 0$). Logo, f é contínua em $\mathbb{C} - \{0\}$.

5. Seja a função $f(z) = |z|$. Determine o conjunto dos pontos onde f é derivável.

Solução: Admita que f é derivável em $z_0 = x_0 + iy_0$; então:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|z_0 + \Delta z| - |z_0|}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta x + i\Delta y \to 0} \frac{\sqrt{(x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2} - \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta x + i\Delta y \to 0} \frac{\sqrt{(x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2} - \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{\Delta x + i\Delta y} \cdot \frac{\sqrt{(x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2} + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{\sqrt{(x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2} + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$$

$$= \lim_{\Delta x + i\Delta y \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2 - x_0^2 - y_0^2}{(\Delta x + i\Delta y)(\sqrt{(x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2} + \sqrt{x_0^2 + y_0^2})}$$

$$= \lim_{\Delta x + i\Delta y \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + (y_0^2 + 2y_0\Delta y + (\Delta y)^2 - x_0^2 - y_0^2}{(\Delta x + i\Delta y)(\sqrt{(x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2} + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$$

$$= \lim_{\Delta x + i\Delta y \to 0} \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 2y_0\Delta y + \Delta y^2}{(\Delta x + i\Delta y)(\sqrt{(x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2} + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$$

Se $\Delta z = \Delta x$ então

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x(\sqrt{(x_0 + \Delta x)^2 + y_0^2} + \sqrt{x_0^2 + y_0^2})} = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}. \qquad (1)$$

Por outro lado, se $\Delta z = i\Delta y$ então

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{2y_0\Delta y + \Delta y^2}{(i\Delta y)(\sqrt{x_0^2 + (y_0 + \Delta y)^2} + \sqrt{x_0^2 + y_0^2})}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{2y_0 + \Delta y}{i(\sqrt{x_0^2 + (y_0 + \Delta y)^2} + \sqrt{x_0^2 + y_0^2})} = -i\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \qquad (2)$$

Portanto, se $z_0 = x_0 + iy_0 \neq 0$ então os limites em (1) e (2) são distintos; logo, f não pode ser derivável em qualquer $z_0 \neq 0$. Por outro lado, em $z_0 = 0$ tem-se que:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(0 + \Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta z|}{\Delta z}.$$

Entretanto, se $\Delta z = \Delta x$ então

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1,$$

ou seja, tal limite não existe. Portanto, f não é diferenciável em qualquer ponto do plano complexo.

6. Determine, se possível, todas as funções analíticas $f(z)$ tais que $Re(f(z)) = (e^x + e^{-x}) \cdot \cos y$ e $f(0) = 2 + i$. Expresse tais eventuais funções na variável z.

Solução: Admita que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, com $u(x, y) = (e^x + e^{-x}) \cdot \cos y$ é analítica; então são satisfeitas as equações de *Cauchy-Riemann*:

$$u_x(x, y) = v_y(x, y) \Rightarrow v_y(x, y) = (e^x - e^{-x}) \cdot \cos y \qquad (1)$$

$$-u_y(x, y) = v_x(x, y) \Rightarrow v_x(x, y) = (e^x + e^{-x}) \cdot \text{sen } y \qquad (2)$$

Integrando-se a igualdade (1) com respeito à variável y, obtem-se que:

$$v(x, y) = (e^x - e^{-x}) \cdot \text{sen } y + c(x), \qquad (3)$$

onde $c(x)$ é uma função que depende apenas da variável x. Por sua vez, derivando-se a equação (3) com respeito à variável x e comparando-se a equação resultante com a equação (2) conclui-se que $c'(x) = 0$, ou seja, $c(x) = M$, onde $M \in \mathbb{R}$ é uma constante. Logo, deve ser

$$v(x, y) = (e^x - e^{-x}) \cdot \text{ sen } y + M$$

e assim,

$$\begin{aligned} f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = (e^x + e^{-x}) \cdot \text{ cos } y + i((e^x - e^{-x}) \cdot \text{ sen } y + M) \\ = e^x(\cos y + i \text{ sen} y) + e^{-x}(\cos y - i \text{ sen } y) + iM = e^x \cdot e^{iy} + e^{-x} \cdot e^{-iy} + iM \\ = e^z + e^{-z} + iM = 2 \cosh z + iM. \end{aligned}$$

Portanto, escolhendo-se $M = 1$, obtem-se que $f(z) = 2 \cosh z + i$ é a única função analítica cuja parte real é a função $u(x, y)$ acima e $f(0) = 2 + i$.