UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Departamento de Matemática

1a. Avaliação de CM044 - Cálculo IV - Turma B - 19 de Setembro de 2017

1. Considere o conjunto $\mathcal{A} = \{z = x + i\,y \in \mathbb{C} \,|\, y \in \mathbb{Q}\}$.

   (a) Verifique se $\mathcal{A}$ é um conjunto aberto;

   (b) Verifique se $\mathcal{A}$ é um conjunto fechado;

   (c) Determine o conjunto dos pontos de acumulação de $\mathcal{A}$;

   (d) Determine o conjunto dos pontos de fronteira de $\mathcal{A}$.

   Solução:(a) $\mathcal{A}$ não é aberto (pois seus pontos não são pontos interiores). Para ver isto, considere qualquer $z_0 = x_0 + i\,y_0 \in \mathcal{A}$ e qualquer disco aberto $D(z_0; r)$; em seguida, escolha $z_1 = x_0 + i\,y_1$, com $|z_0 - z_1| < r$ e $y_1 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Daí, $z_1 \notin \mathcal{A}$ e $z_1 \in D(z_0; r)$, ou seja, $D(z_0; r)$ não está contido em $\mathcal{A}$ (qualquer que seja o raio $r > 0$) e, portanto, z_0 não é ponto interior de $\mathcal{A}$.

   (b) $\mathcal{A}$ não é fechado pois $\mathcal{A}^c$ não é aberto. De fato, se $z_0 = x_0 + i\,y_0 \in \mathcal{A}^c$ então $y_0 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; sendo assim, para qualquer raio $r > 0$, pode-se escolher $z_1 = x_0 + i\,y_1$, com $y_1 \in \mathbb{Q}$ (ou seja, $z_1 \in \mathcal{A}$) tal que $|z_0 - z_1| < r$, ou seja, $z_1 \in D(z_0; r)$ mas $z_1 \notin \mathcal{A}^c$. Logo, z_0 não é ponto interior de $\mathcal{A}^c$ e $\mathcal{A}^c$ não é aberto (o que mostra que $\mathcal{A}$ não é fechado).

   (c) O conjunto dos pontos de acumulação de $\mathcal{A}$ é $\mathbb{C}$. De fato, para mostrar que qualquer $z_0 \in \mathbb{C}$ é ponto de acumulação de $\mathcal{A}$ deve-se mostrar que para qualquer $r > 0$ tem-se que $[D(z_0; r) - \{z_0\}] \bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$. Admita que $z_0 = x_0 + i\,y_0$; escolha $z_1 = x_0 + i\,y_1$, com $y_1 \in \mathbb{Q}$ e $0 < |y_1 - y_0| < r$ e assim, terá-se que $z_1 \neq z_0$, $|z_1 - z_0| < r$ e $z_1 \in \mathcal{A}$.

   (d) O conjunto do pontos de fronteira de $\mathcal{A}$ é $\mathbb{C}$. De fato, para mostrar a validade desta afirmação, deve-se mostrar que para todo $r > 0$ e todo $z_0 \in \mathbb{C}$ tem-se que $D(z_0; r) \bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$ e $D(z_0; r) \bigcap \mathcal{A}^c \neq \emptyset$. Se $z_0 \in \mathcal{A}$ então $D(z_0; r) \bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$ e como z_0 não é ponto interior de $\mathcal{A}$ então $D(z_0; r)$ não está contido em $\mathcal{A}$, ou seja, $D(z_0; r) \bigcap \mathcal{A}^c \neq \emptyset$. De modo análogo, se $z_0 \in \mathcal{A}^c$ então $D(z_0; r) \bigcap \mathcal{A}^c \neq \emptyset$ e como $\mathcal{A}^c$ não tem pontos interiores, então $D(z_0; r)$ não está contido em $\mathcal{A}^c$. Logo, seja $z_0 \in \mathcal{A}$ ou $z_0 \in \mathcal{A}^c$, tem-se que z_0 é ponto de fronteira de $\mathcal{A}$.

2. Dada a equação $z^3 = -1 + i\sqrt{3}$, localize no plano complexo as distintas raízes de tal equação.

   Solução: Observe que $-1 + i\sqrt{3} = 2\,(-\dfrac{1}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = 2\,(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}) = 2\,e^{i2\pi/3}$. Portanto, escrevendo-se $z = r\,e^{i\alpha}$ deve-se ter:

$$z^3 = -1 + i\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad r^3\,e^{3i\alpha} = 2\,e^{i2\pi/3}$$

$$\Leftrightarrow \quad r^3 = 2 \text{ e } 3\alpha = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi, \text{ com } n = 0, 1, 2$$

$$\Leftrightarrow \quad r = 2^{1/3} \text{ e } \alpha = \frac{2\pi}{9} + \frac{2n\pi}{3}, \text{ com } n = 0, 1, 2.$$

   As distintas raízes da equação são obtidas considerando-se $n = 0, 1, 2$:

$$z_0 = 2^{1/3} e^{i\frac{2\pi}{9}}; \qquad z_1 = 2^{1/3} e^{i(\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3})} = 2^{1/3} e^{i\frac{8\pi}{9}} \qquad \text{e} \qquad z_2 = 2^{1/3} e^{i(\frac{2\pi}{9} + \frac{4\pi}{3})} = 2^{1/3} e^{i\frac{14\pi}{9}}.$$

   Tais raízes estão localizadas na circunferência de centro na origem e raio $2^{1/3}$ e possuem argumentos $\frac{2\pi}{9}$, $\frac{8\pi}{9}$ e $\frac{14\pi}{9}$, respectivamente.

3. Dada a função $f(z) = \overline{z}$, determine o conjunto dos pontos $z_0 \in \mathbb{C}$ tais que:
   (a) f é contínua em z_0;
   (b) f é derivável em z_0.

   Solução: (a) Nota-se que para $z = x + i\,y$, pode-se escrever $f(z) = x - i\,y = u(x,y) + i\,v(x,y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Dado que $u(x,y) = x$ e $v(x,y) = -y$ são funções polinomiais então u e v são contínuas em todo o $\mathbb{R}^2$; portanto, f é contínua em $\mathbb{C}$.

   (b) Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ e vejamos se f é derivável em tal ponto. Dado que, por definição,

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z},$$

   façamos $\Delta z = \Delta x$ e $\Delta z = i\,\Delta y$ e vejamos o que se passa com cada limite; mais precisamente,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + i\,y_0 + \Delta x) - f(x_0 + i\,y_0)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0 - i\,y_0 + \Delta x - x_0 + i\,y_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1;$$

   por outro lado,

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0 + i\,y_0 + i\Delta y) - f(x_0 + i\,y_0)}{i\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x_0 - i\,y_0 - i\Delta y - x_0 + i\,y_0}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1.$$

   Portanto, tal limite não existe e f não é derivável em qualquer $z_0 \in \mathbb{C}$.

4. Determine todas as funções analíticas f tais que $\mathcal{R}e(f(z)) = e^x \cdot (x \cos y - y \operatorname{sen} y)$, onde $z = x + iy$. Expresse tais funções na variável z.

   Solução: Seja $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$; sendo f analítica deve-se ter $u_x(x,y) = v_y(x,y)$ e $u_y(x,y) = -v_x(x,y)$. Como

$$u_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \cdot (x \cos y - y \operatorname{sen} y)\right)$$

$$= e^x \cdot (x \cos y - y \operatorname{sen} y) + e^x \cdot \cos y = e^x \cdot ((x+1) \cos y - y \operatorname{sen} y)$$

   segue que:

$$v(x,y) = \int v_y(x,y) dy = \int e^x \cdot ((x+1) \cos y - y \operatorname{sen} y) dy = e^x \cdot (x+1) \int \cos y - e^x \cdot \int y \operatorname{sen} y\, dy$$

$$= e^x \cdot (x+1) \operatorname{sen} y - e^x \cdot \int y \operatorname{sen} y\, dy = e^x \cdot (x+1) \operatorname{sen} y - e^x \cdot \left[-y \cos y + \int \cos y\, dy\right]$$

$$= e^x \cdot (x+1) \operatorname{sen} y + e^x \cdot [y \cos y - \operatorname{sen} y] + \varphi(x) = e^x \cdot (x \operatorname{sen} y + y \cos y) + \varphi(x).$$

   Por outro lado:

$$v_x(x,y) = e^x \cdot ((x+1) \operatorname{sen} y + y \cos y) + \varphi'(x)$$

$$= -u_y(x,y) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(e^x \cdot (x \cos y - y \operatorname{sen} y)\right)$$

$$= -e^x \cdot (-x \operatorname{sen} y - \operatorname{sen} y - y \cos y) = e^x \cdot ((x+1) \operatorname{sen} y + y \cos y)$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = K \in \mathbb{R} \text{ (constante)}.$$

   Portanto, $v(x,y) = e^x \cdot (x \operatorname{sen} y + y \cos y) + K$; daí, segue que:

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) = e^x \cdot (x \cos y - y \operatorname{sen} y) + i\,e^x \cdot (x \operatorname{sen} y + y \cos y) + i\,K$$

$$= e^x \cdot x(\cos y + i \operatorname{sen} y) + e^x \cdot y\,(-\operatorname{sen} y + i \cos y) + i\,K$$

$$= e^x \cdot x(\cos y + i \operatorname{sen} y) + i\,e^x \cdot y\,(i \operatorname{sen} y + \cos y) + i\,K = (x + i\,y)e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) + i\,K$$

$$= (x + i\,y)e^{x + i\,y} + i\,K = z \cdot e^z + i\,K.$$

5. Sejam a função $f(z) = \dfrac{z-1}{z^2-z-2}$ e Γ a circunferência $|2z-2| = 3$, orientada no sentido anti-horário. Calcule $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz$.

Solução: Note que

$$f(z) = \frac{z-1}{z^2-z-2} = \frac{z-1}{(z+1)(z-2)} = \frac{a}{z+1} + \frac{b}{z-2} = \frac{a(z-2)+b(z+1)}{(z+1)(z-2)} = \frac{(a+b)z+(b-2a)}{(z+1)(z-2)}.$$

Para que tal igualdade ocorra, deve-se ter:

$$\begin{cases} a+b=1 \Rightarrow a+(2a-1)=1 \Rightarrow 3a=2 \Rightarrow a=\frac{2}{3} \\ b-2a=-1 \Rightarrow b=2a-1 \Rightarrow b=\frac{4}{3}-1 \Rightarrow b=\frac{1}{3} \end{cases}$$

Logo, deve ser:

$$f(z) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{z+1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-2}.$$

Além disso, a circunferência Γ pode ser expressa na forma $|z-1| = \frac{3}{2}$, ou seja, Γ é a circunferência com centro em 1 e raio $\frac{3}{2}$; daí, segue que:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \frac{2}{3}\cdot\int_\Gamma \frac{1}{z+1}\,dz + \frac{1}{3}\cdot\int_\Gamma \frac{1}{z-2}\,dz = \frac{2}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot(2\pi\, i) = \frac{2\pi\, i}{3},$$

onde foram usados o *Teorema da Integral de Cauchy* e a *Fórmula Integral de Cauchy*, respectivamente.

6. Sejam a função $f(z) = e^{3z}(z+1)^{-2}$ e a curva Γ dada por $\Gamma(t) = 3\cos t + i\,(1+3\,\mathrm{sen}\; t)$, com $t \in [0, 2\pi]$. Calcule $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz$.

Solução: Inicialmente, observa-se que $|\Gamma(t) - i\,| = |3\,(\cos t + i\;\mathrm{sen}\; t)| = 3$, ou seja, Γ é a circunferência de centro i e raio 3.

Por sua vez, o ponto $z_0 = -1$ está no interior da região limitada pela curva Γ e portanto, pode-se aplicar a *Fórmula Integral de Cauchy para Derivadas* (com $n = 1$), resultando em:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma \frac{e^{3z}}{(z+1)^2}\,dz = \frac{2\pi\, i}{1!}\,\frac{d}{dz}\left(e^{3z}\right)_{z=-1} = 2\pi\, i\left(3\,e^{3z}\right)_{z=-1} = \frac{6\pi\, i}{e^3}.$$