UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Gabarito da 1a. Avaliação de CM005 - 05/Abril/2018

1. Sejam $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; x+2y-z+w = 0\}$ e $V = [(1, 0, 0, 1), (1, 2, 0, 1)]$. Determine bases para $U + V$ e $U \cap V$.

   Solução: Nota-se que se $u = (x, y, z, w) \in U$ então

   $$u = (x, y, x + 2y + w, w) = x \cdot (1, 0, 1, 0) + y \cdot (0, 1, 2, 0) + w \cdot (0, 0, 1, 1)$$

   Tem-se que $\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1), (1, 2, 0, 1)\}$ é um conjunto de geradores de $U + V$; para descartar os vetores L.D. basta considerar a matriz cujas linhas são tais vetores como mostrado a seguir:

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{(L_4 \to L_4 - L_1) \\ (L_5 \to L_5 - L_1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{(L_5 \to L_5 - 2L_2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{(L_4 \to L_4 + L_3) \\ (L_5 \to L_5 + 5L_3)}}{\sim}$$

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \underset{\substack{(L_5 \to L_5 - 3L_4) \\ (L_4 \to 1/2 L_4)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{(L_3 \to L_3 - L_4)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{(L_1 \to L_1 - L_3) \\ (L_2 \to L_2 - 2L_3)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Portanto,

   $$\begin{aligned} U + V &= [(1, 0, 1, 0), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1), (1, 2, 0, 1)] \\ &= [(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)] = \mathbb{R}^4. \end{aligned}$$

   Logo, $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ é uma base de $U + V$.

   Admita que $u = (x, y, x + 2y + w, w) \in U \cap V$; então, deve-se ter:

   $$x \cdot (1, 0, 1, 0) + y \cdot (0, 1, 2, 0) + w \cdot (0, 0, 1, 1) = \alpha \cdot (1, 0, 0, 1) + \beta \cdot (1, 2, 0, 1)$$

   $$\Leftrightarrow (x, y, x + 2y + w, w) = (\alpha + \beta, 2\beta, 0, \alpha + \beta)$$

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = 2\beta = -x \\ x + 2y + w = 0 \Rightarrow 2y = -2x \Rightarrow y = -x \Rightarrow \\ w = \alpha + \beta = x \end{cases}$$

   Logo, tem-se que

   $$u = (x, -x, 0, x) = x \cdot (1, -1, 0, 1),$$

   ou seja, $U \cap V = [(1, -1, 0, 1)]$ e, portanto, $\{(1, -1, 0, 1)\}$ é uma base de $U \cap V$.

2. Sejam $A = \{1+t, t+t^2, t^2+1\}$ e $B = \{1, t, t^2\}$ subconjuntos de $P_2(\mathbb{R})$.

   (a) Mostre que A é base de $P_2(\mathbb{R})$;

   (b) Determine a matriz $[I]_B^A$.

   Solução: (a) Sejam $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tais que

   $a_1 \cdot (1+t) + a_2 \cdot (t+t^2) + a_3 \cdot (t^2+1) = 0 \Rightarrow (a_1+a_3)\cdot 1 + (a_1+a_2)\cdot t + (a_2+a_3)\cdot t^2 = 0\cdot 1 + 0\cdot t + 0\cdot t^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = -a_1 \\ a_1 + a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = -a_1 \\ 2a_1 = 0 \end{cases}$$

   Logo, A é um conjunto L.I. e portanto, A é uma base para o s.e.v. $[A]$. Mas, $dim([A]) = 3 = dim(P_2(\mathbb{R}))$ e assim, conclui-se que $[A] = P_2(\mathbb{R})$ e que A é uma base de $P_2(\mathbb{R})$.

   (b) Tem-se que $1+t = 1\cdot 1 + 1\cdot t + 0\cdot t^2$, e assim, vê-se que $[1+t]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. De modo análogo, vê-se que $[t+t^2]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $[t^2+1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Daí, segue que:

$$[I]_B^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Sejam $f(t) = 1 + t - t^2$ e A, B as bases de $P_2(\mathbb{R})$ da questão acima. Mostre que $[f(t)]_B = [I]_B^A \cdot [f(t)]_A$.

   Solução: Admita que $1 + t - t^2 = f(t) = a_1 \cdot (1+t) + a_2 \cdot (t+t^2) + a_3 \cdot (t^2+1)$; obtem-se daí, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 1 \Rightarrow a_1 = 1 - a_3 \Rightarrow a_1 = \frac{3}{2} \\ a_1 + a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = 1 - a_1 = a_3 \\ a_2 + a_3 = -1 \Rightarrow 2a_3 = -1 \Rightarrow a_3 = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

   Logo, obtem-se que:

$$[f(t)]_A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow [I]_B^A \cdot [f(t)]_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = [f(t)]_B.$$

4. Seja $W = \left\{ X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,|\, X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \right\}$ s.e.v. de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Determine $dim(W)$.

   Solução: Admita que $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; então:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & a \\ c-d & c \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -a & -b \end{pmatrix}.$$

   Portanto,

$$\begin{pmatrix} a-b & a \\ c-d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -a & -b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b = a+c \Rightarrow -b = c \Rightarrow \\ a = b+d \Rightarrow a = -c+d \\ c-d = -a \Rightarrow \\ c = -b \end{cases}$$

   e assim, conclui-se que

$$X = \begin{pmatrix} -c+d & -c \\ c & d \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Daí, segue que

$$W = \left[\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

   e como o conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ é L.I. (já que são dois vetores não-múltiplos), segue que o mesmo é uma base de W. Portanto, $dim(W) = 2$.

5. Seja o espaço vetorial $C[0,1] = \{ f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, f \text{ é contínua} \}$. Mostre que $C[0,1]$ não é finitamente gerado.

   Solução: Considere o espaço vetorial

$$P(\mathbb{R}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n(\mathbb{R}),$$

   onde $P_n(\mathbb{R})$ é o espaço vetorial dos polinômios de grau menor que ou igual a n (para cada $n \in \mathbb{N}$). Daí, para cada n, o espaço vetorial $P_n(\mathbb{R})$ é finitamente gerado (a saber, $P_n(\mathbb{R}) = [1, t, t^2, \cdots, t^n]$); entretanto, como $P(\mathbb{R})$ contém subespaços vetoriais gerados por qualquer quantidade de vetores L.I., conclui-se que $P(\mathbb{R})$ não pode ser finitamente gerado (a rigor, $P(\mathbb{R}) = [1, t, t^2, \cdots, t^n, t^{n+1}, \cdots]$). Como $P(\mathbb{R}) \subset C[0,1]$, conclui-se que $C[0,1]$ não é finitamente gerado.

6. Sejam $W_1 = \{X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid X^t = X\}$ e $W_2 = \{X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid X^t = -X\}$.

(a) Determine $dim(W_1)$ e $dim(W_2)$;

(b) Mostre que $W_1 \oplus W_2 = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Solução: (a) Se $X^t = X$ então

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$W_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

Além disso, tem-se que

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0,$$

ou seja, o conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ é L.I.; portanto, $dim(W_1) = 3$.

Por outro lado, se $X^t = -X$ então

$$X = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

de onde se conclui que

$$W_2 = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Portanto, $dim(W_2) = 1$ (já que W_2 é gerado por um vetor L.I.).

(b) Suponha que $X \in W_1 \cap W_2$; então $X \in W_1$ e $X \in W_2$. Como visto no item anterior, se $X \in W_2$ então $X = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$; agora, para que $X = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ pertença a W_1, deve-se ter $b = -b$ (condição para que X seja matriz simétrica), ou seja $b = 0$. Sendo assim, $X \in W_1 \cap W_2 \Leftrightarrow X = 0 \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Portanto,

$$W_1 \cap W_2 = \{0\} \quad \text{e daí,} \quad dim(W_1 \cap W_2) = 0.$$

Tem-se então, que:

$$dim(W_1 \oplus W_2) = dim(W_1) + dim(W_2) - dim(W_1 \cap W_2) = 3 + 1 - 0 = 4 = dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R})),$$

e portanto, $W_1 \oplus W_2 = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.