UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Departamento de Matemática

Gabarito da 2a. Avaliação - Cálculo IV - 29/Out/2019

1. Em cada uma das situções abaixo, decida se a série dada é convergente e justifique.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-i)^n}{3^{n+1}}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+i}{2-n}$

Solução: (a) Tomando-se a sequência de somas parciais (s_n), dada por $s_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{(1-i)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n} \frac{(1-i)^n}{3^n}$, para $n = 0, 1, \cdots$, nota-se que $\left|\dfrac{1-i}{3}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{3} < 1$; assim sendo, tem-se que a série $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(1-i)^n}{3^n}$ é uma série geométrica convergente e o mesmo se passa com (s_n). Por definição, tem-se que a série dada é convergente.

(b) Sabe-se que para que uma série seja convergente, o limite do termo geral da série deve ser igual a zero. Para a série em questão, tem-se que

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{n+i}{2-n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1+i/n}{2/n-1}\right| = 1 \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n+i}{2-n} \neq 0,$$

e portanto, a série é divergente.

2. Dada a função $f(z) = \dfrac{z+1}{(z-1)^2}$, com $z \neq 1$, determine sua série de *Taylor* em $z_0 = -1$ e o raio de convergência da mesma.

Solução: Tem-se $f(z) = \dfrac{z+1}{(z-1)^2} = \dfrac{z-1}{(z-1)^2} + \dfrac{2}{(z-1)^2} = \dfrac{1}{z-1} + \dfrac{2}{(z-1)^2}$, para todo $z \neq 1$; é suficiente então obter a série de *Taylor* destas duas parcelas em $z_0 = -1$. Tem-se então:

$$(I) \qquad \frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z+1)-2} = \frac{1}{(-2)} \cdot \frac{1}{1-\frac{z+1}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+1)^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+1)^n}{2^{n+1}},$$

válida na região $\left|\dfrac{z+1}{2}\right| < 1$, ou seja, válida para $|z+1| < 2$.

Para a parcela $g(z) = 2(z-1)^{-2}$, usa-se a definição:

$$\begin{aligned}
g^{(0)}(z) &= 2(z-1)^{-2},\\
g^{(1)}(z) &= -2 \cdot 2 \cdot (z-1)^{-3},\\
g^{(2)}(z) &= 2 \cdot 2 \cdot 3(z-1)^{-4},\\
g^{(3)}(z) &= -2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4(z-1)^{-5},\\
&\ \ \vdots\\
g^{(n)}(z) &= (-1)^n 2(n+1)!(z-1)^{-(n+2)}, \text{ para } n = 0, 1, \cdots.
\end{aligned}$$

Portanto, tem-se que $a_n = \dfrac{g^{(n)}(z_0)}{n!} = \dfrac{(-1)^n 2(n+1)!(-2)^{-(n+2)}}{n!} = \dfrac{n+1}{2^{n+1}}$, para $n = 0, 1, \cdots$, e assim, segue que:

$$(II) \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z+1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} (z+1)^n,$$

para $|z+1| < R$, onde o raio de convergência R é dado por:

$$R = \lim_{n \Rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \Rightarrow +\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n+2}{2^{n+2}}} = \lim_{n \Rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^{n+2}}{n+2} = 2 \cdot \lim_{n \Rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+2} = 2 \cdot \lim_{n \Rightarrow +\infty} \frac{1+1/n}{1+2/n} = 2.$$

Por (I) e (II), conclui-se que

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} (z+1)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} (z+1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^{n+1}} (z+1)^n,$$

para $|z+1| < 2$.

3. Dada a função $f(z) = \dfrac{1}{z^3 - (2+i)z^2 + 2iz}$, determine a parte principal de sua série de *Laurent* em $z_0 = i$.

Solução: Observa-se inicialmente, que a parte principal da série de *Laurent* em z_0 é a parte das potências negativas de $(z - z_0)$, desenvolvida no disco "furado" $0 < |z - z_0| < R$, para algum $R > 0$. Nota-se que:

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - (2+i)z^2 + 2iz} = \frac{1}{z(z^2 - (2+i)z + 2i)} = \frac{1}{z(z-2)(z-i)} = \frac{1}{z-i} \cdot \left[\frac{1}{z(z-2)} \right]$$

e que a função $\dfrac{1}{z(z-2)}$ é analítica em $z_0 = i$ (e portanto, sua série de *Laurent* em z_0 é sua série de *Taylor* em tal ponto). Utilizando-se frações parciais, segue que:

$$\frac{1}{z(z-2)} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-2} = \frac{a(z-2) + bz}{z(z-2)} = \frac{(a+b)z - 2a}{z(z-2)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a + b = 0 \Rightarrow b = -a \Rightarrow b = \frac{1}{2} \\ -2a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Segue daí que:

$$\frac{1}{z(z-2)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-2}$$

Tem-se então:

$$(I) \qquad \frac{1}{z} = \frac{1}{i + (z-i)} = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{1 - (-\frac{z-i}{i})} = \frac{1}{i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-i)^n}{(-i)^n} = \frac{1}{i} \sum_{n=0}^{+\infty} i^n (z-i)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} i^{n-1} (z-i)^n$$

válida para $\left| \dfrac{z-i}{i} \right| < 1$, ou seja, válida para $|z-i| < |i| = 1$.

Por outro lado, tem-se que:

$$(II) \quad \frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-i) + i - 2} = \frac{1}{i-2} \cdot \frac{1}{1 - (-\frac{z-i}{i-2})} = \frac{1}{i-2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(i-2)^n} (z-i)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(i-2)^{n+1}} (z-i)^n$$

válida para $\left| \dfrac{z-i}{i-2} \right| < 1$, ou seja, válida para $|z-i| < |i-2| = \sqrt{5}$.

Dado que $\dfrac{1}{z-i}$ já é sua própria série de *Laurent* na região $0 < |z-i|$, conflui-se, por (I) e (II), que

$$f(z) = \frac{1}{z-i} \left[\frac{1}{z(z-2)} \right] = \frac{1}{2} \frac{1}{z-i} \left[-\frac{1}{z} + \frac{1}{z-2} \right] = \frac{1}{2} \frac{1}{z-i} \left[-\sum_{n=0}^{+\infty} i^{n-1} (z-i)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(i-2)^{n+1}} (z-i)^n \right],$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{z-i} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^n}{(i-2)^{n+1}} - i^{n-1} \right] (z-i)^n = \frac{1}{2} \frac{1}{z-i} \left[\frac{1}{i-2} + i \right] + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^n}{(i-2)^{n+1}} - i^{n-1} \right] (z-i)^{n-1}$$

válida para $0 < |z-i| < 1$. Portanto, a parte principal da série em questão é

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{z-i}\Big[\frac{1}{i-2}+i\Big] = \frac{1-2i}{5}\,\frac{1}{z-i}.$$

4. Dada a função $f(z) = \dfrac{1}{z^3-(2+i)z^2+2iz}$, determine sua série de *Laurent* na região $|z| > 2$.

Solução: Dado que

$$f(z) = \frac{1}{z}\cdot\left[\frac{1}{(z-2)(z-i)}\right]$$

e o termo $\dfrac{1}{z}$ já é sua própria série de *Laurent* na região $|z| > 0$; resta, portanto, determinar a série de *Laurent* de $\dfrac{1}{(z-2)(z-i)}$ na região $|z| > 2$. Para tanto, faz-se:

$$\frac{1}{(z-2)(z-i)} = \frac{a}{z-2}+\frac{b}{z-i} = \frac{a(z-i)+b(z-2)}{(z-2)(z-i)} = \frac{(a+b)z-ia-2b}{(z-2)(z-i)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+b=0 \Rightarrow b=-a \Rightarrow b=\frac{2+I}{5} \\ -ia-2b=1 \Rightarrow -(i-2)a=1 \Rightarrow a=-\frac{1}{i-2}=-\frac{2+i}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(z-2)(z-i)} \quad = \quad \frac{2+i}{5}\left[-\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z-i}\right]$$

Segue daí que:

$$(I) \qquad \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}},$$

válida na região $\left|\dfrac{2}{z}\right| < 1$, ou seja, para $|z| > 2$; e também:

$$(II) \qquad \frac{1}{z-i} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{i}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n}{z^{n+1}},$$

válida na região $\left|\dfrac{i}{z}\right| < 1$, ou seja, para $|z| > |i| = 1$.

Dado que a interseção das regiões $|z| > 0$, $|z| > 2$ e $|z| > 1$ é a região $|z| > 2$, conclui-se, por (I) e (II), que o desenvolvimento em série de *Laurent* em tal região é:

$$f(z) = \frac{2+i}{5}\,\frac{1}{z}\left[-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n}{z^{n+1}}\right] = \frac{2+i}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n-2^n}{z^{n+2}}.$$

5. Sejam a função $f(z) = \dfrac{1}{z^3-(2+i)z^2+2iz}$ e Γ o retângulo com vértices nos pontos $\pm1+2i$ e $\pm1-i$, orientado no sentido anti-horário. Utilize o *Teorema dos Resíduos* para calcular $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz$.

Solução: Nota-se, inicialmente, que a curva Γ em questão é fechada, simples e suave por partes; além disso, apenas os pólos 0 e i estão no interior da região interna à curva Γ. Também, para as funções $g(z) = \dfrac{1}{(z-i)(z-2)}$ e $h(z) = \dfrac{1}{z(z-2)}$, tem-se que g é analítica em 0 e 0 não é zero de g; por sua vez,

h é analítica em i e i não é zero de h. Daí, conclui-se que 0 e i são pólos de ordem 1 de f. Utilizando-se a *Fórmula dos Resíduos*, segue que:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0} z \cdot f(z) = \lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{(z-2)(z-i)} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2};$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i}(z-i) \cdot f(z) = \lim_{z\to i} h(z) = \lim_{z\to i} \frac{1}{z(z-2)} = \frac{1}{i(i-2)} = -\frac{1}{1+2i} = \frac{-1+2i}{5}.$$

Portanto, dado que f é analítica sobre a curva Γ e no interior na região interna à curva Γ, exceto nos pólos 0 e i, conclui-se, aplicando-se o *Teorema dos Resíduos*, que:

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=i} f(z)\right) = 2\pi i(-\frac{i}{2} + \frac{-1+2i}{5}) = 2\pi i \cdot (-\frac{2+i}{10}) = \frac{\pi(1-2i)}{5}.$$

6. Dada $f(z) = \dfrac{\cos z}{(z-\pi)^3}$ determine o resíduo de f no pólo $z_0 = \pi$, das seguintes formas:

(a) através de sua série de *Laurent*;

(b) através da *Fórmula dos Resíduos*.

Solução: (a) Seja $g(z) = \cos z$; tem-se então:

$$\begin{aligned}
g^{(0)}(z) &= \cos z &&\Rightarrow\ g^{(0)}(\pi) = -1\\
g^{(1)}(z) &= -\operatorname{sen} z &&\Rightarrow\ g^{(1)}(\pi) = 0\\
g^{(2)}(z) &= -\cos z &&\Rightarrow\ g^{(2)}(\pi) = 1\\
g^{(3)}(z) &= \operatorname{sen} z &&\Rightarrow\ g^{(3)}(\pi) = 0\\
g^{(4)}(z) &= \cos z &&\Rightarrow\ g^{(4)}(\pi) = -1\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Segue que $g^{(2n)}(\pi) = (-1)^{n+1}$ e $g^{(2n+1)}(\pi) = 0$, para $n = 0, 1, \cdots$, e daí, conclui-se que $a_{2n} = \dfrac{g^{(2n)}(\pi)}{(2n)!} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}$ e $a_{2n+1} = 0$, para $n = 0, 1, \cdots$. Logo, a série de *Taylor* de g em $z_0 = \pi$ é dada por

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}(z-\pi)^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}(z-\pi)^{2n},$$

válida para todo $z \in \mathbb{C}$. Daí, segue que:

$$f(z) = \frac{1}{(z-\pi)^3} \cdot \cos z = \frac{1}{(z-\pi)^3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}(z-\pi)^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}(z-\pi)^{2n-3}$$

$$= \frac{-1}{(z-\pi)^3} + \frac{1/2}{z-\pi} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}(z-\pi)^{2n-3},$$

para $|z-\pi| > 0$. Conclui-se que:

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi} f(z) = b_1 = \frac{1}{2}.$$

(b) Nota-se que $z_0 = \pi$ não é zero de $g(z) = \cos z$ e portanto, $z_0 = \pi$ é pólo de ordem 3 de f; segue que:

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi} f(z) = \frac{1}{2!} \lim_{z\to\pi} \frac{d^2}{dz^2}\Big[(z-\pi)^3 f(z)\Big] = \frac{1}{2} \lim_{z\to\pi} \frac{d^2}{dz^2}\big[\cos z\big] = \frac{1}{2} \lim_{z\to\pi}\big[-\cos z\big] = \frac{1}{2}.$$