UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Departamento de Matemática

Gabarito - 2a. Avaliação de CM044 - Turma A - 19 de Outubro de 2017

1. Decida se é convergente ou divergente a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+i}{3^n}$.

   Solução: Tem-se que:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{n+1+i}{3^{n+1}}}{\frac{n+i}{3^n}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{(n+1)^2+1^2}}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{\sqrt{n^2+1^2}} = \frac{1}{3}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n^2+2n+2}{n^2+1}} = \frac{1}{3}\cdot\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{1+2/n+2/n^2}{1+1/n^2}} = \frac{1}{3} < 1.$$

   Portanto, pelo Critério da Razão tem-se que a série é convergente.

2. Dada a função $f(z) = \dfrac{1+i}{z^2+(1-i)z-i}$, determine sua série de *Taylor* em torno de $z_0 = -i$ e o raio de convergência da mesma.

   Solução: Tem-se que:

$$f(z) = \frac{1+i}{z^2+(1-i)z-i} = \frac{1+i}{(z+1)(z-i)} = \frac{a}{z+1} + \frac{b}{z-i} = \frac{a(z-i)+b(z+1)}{(z+1)(z-i)} = \frac{(a+b)z+(b-a\,i)}{(z+1)(z-i)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \Rightarrow a=-b \Rightarrow a=-1 \\ b-a\,i = 1+i \Rightarrow b+b\,i = 1+i \Rightarrow b(1+i) = 1+i \Rightarrow b=1, \end{cases}$$

   ou seja,

$$f(z) = -\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-i}.$$

   Daí, segue que:

$$-\frac{1}{z+1} = -\frac{1}{z+i-i+1} = -\frac{1}{1-i}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{z+i}{1-i})} = -\frac{1}{1-i}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1-i)^n}(z+i)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(1-i)^{n+1}}(z+i)^n,$$

   para $\left|\dfrac{z+i}{1-i}\right| < 1$, ou seja, para $|z+i| < |1-i| = \sqrt{2}$;

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z+i-2i} = -\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+i}{2i}} = -\frac{1}{2i}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2i}\right)^n(z+i)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2i}\right)^{n+1}(z+i)^n$$

$$= -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{i}{2}\right)^{n+1}(z+i)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+2}i^{n+1}}{2^{n+1}}(z+i)^n,$$

   para $\left|\frac{z+i}{2i}\right| < 1$, ou seja, para $|z+i| < |2i| = 2$. Portanto, deve-se ter:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(1-i)^{n+1}}(z+i)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+2}i^{n+1}}{2^{n+1}}(z+i)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\left[\frac{1}{(1-i)^{n+1}} - \frac{i^{n+1}}{2^{n+1}}\right](z+i)^n,$$

   para $|z+i| < \sqrt{2} = \min\,\{\sqrt{2}, 2\}$.

3. Dada a função $f(z) = \ln(2z+2)$, determine sua série de *Taylor* em torno de $z_0 = 1$ e o raio de convergência da mesma.

Solução: Tem-se que:

$$\begin{array}{ll} f^{(0)}(z) = \ln\,(2z+2) & f^{(1)}(z) = 2\cdot(2z+2)^{-1} \\ f^{(2)}(z) = 2^2(-1)\cdot(2z+2)^{-2} & f^{(3)}(z) = 2^3(1\cdot 2)(2z+2)^{-3} \\ f^{(4)}(z) = 2^4(-1\cdot 2\cdot 3)(2z+2)^{-4} & f^{(5)}(z) = 2^5(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)(2z+2)^{-5} \\ f^{(n)}(z) = 2^n(-1)^{n+1}(n-1)!(2z+2)^{-n}, & \text{para } n = 1, 2, \ldots \end{array}$$

Em particular, para $z = 1$, tem-se que $f^{(n)}(1) = 2^n(-1)^{n+1}(n-1)!(4)^{-n} = \dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{2^n}$, para $n = 1, 2, \ldots$. Daí, segue que

$$a_0 = \frac{f^{(0)}(1)}{0!} = \ln 4 \qquad \text{e} \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{2^n}\cdot\frac{1}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n\cdot n},$$

para $n = 1, 2, \ldots$. Além disso,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{2^n\cdot n}}{\frac{(-1)^{n+2}}{2^{n+1}\cdot(n+1)}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)}{2^n\cdot n}\right| = 2\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n} = 2\cdot\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n}) = 2$$

Portanto, a série de *Taylor* de f em $z_0 = 1$ é dada por

$$\ln 4 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n\cdot n}(z-1)^n,$$

com raio de convergência igual a 2.

4. Dada a função $f(z) = \dfrac{1}{z^2-4}$, determine sua série de *Laurent* em torno de $z_0 = 1$ e na região $1 < |z-1| < 2$.

Solução: Tem-se que:

$$f(z) = \frac{1}{z^2-4} = \frac{1}{(z-2)(z+2)} = \frac{a}{z-2} + \frac{b}{z+2} = \frac{a(z+2)+b(z-2)}{(z-2)(z+2)} = \frac{(a+b)z+2a-2b}{(z-2)(z+2)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 0 \Rightarrow b = -a \Rightarrow b = -\frac{1}{4} \\ 2a-2b = 1 \Rightarrow 2a+2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z-2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z+2}.$$

Daí, obtem-se que:

$$(I) \qquad \frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-1)-1} = \frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}} = \frac{1}{z-1}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(z-1)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(z-1)^{n+1}},$$

para $\left|\frac{1}{z-1}\right| < 1$, ou seja, para $|z-1| > 1$.

$$(II) \qquad \frac{1}{z+2} = \frac{1}{(z-1)+3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{z-1}{3})} = \frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}(z-1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-1)^n, \text{ para } |z-1| < 3.$$

Por (I) e (II) conclui-se que

$$f(z) = \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(z-1)^{n+1}} - \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-1)^n$$

para $1 < |z-1| < 3$ (o que vale, em particular, na região $1 < |z-1| < 2$).

5. Dada a função $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 4}$, determine sua série de *Laurent* em torno de $z_0 = i$ e na região $|z - i| > \sqrt{5}$.

Solução: Utilizando-se a decomposição $f(z) = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{z+2}$, vê-se que:

$$(I) \qquad \frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-i)+i-2} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{i-2}{z-i})} = \frac{1}{z-i} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (i-2)^n}{(z-i)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (i-2)^n}{(z-i)^{n+1}}$$

para $\left|\dfrac{i-2}{z-i}\right| < 1$, ou seja, para $|z-i| > |i-2| = \sqrt{5}$;

$$(II) \qquad \frac{1}{z+2} = \frac{1}{(z-i)+i+2} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{i+2}{z-i})} = \frac{1}{z-i} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (i+2)^n}{(z-i)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (i+2)^n}{(z-i)^{n+1}},$$

para $\left|\dfrac{i+2}{z-i}\right| < 1$, ou seja, para $|z-i| > |i+2| = \sqrt{5}$. Daí, segue que

$$f(z) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{z-2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{z+2} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (i-2)^n}{(z-i)^{n+1}} - \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (i+2)^n}{(z-i)^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left[(i-2)^n - (i+2)^n\right]}{4} \cdot \frac{1}{(z-i)^{n+1}}, \text{ para } |z-i| > |i+2| = \sqrt{5}.$$

6. Dada a função $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)^3 (z-i)}$, determine a parte principal da série de *Laurent* de f em torno de $z_0 = -1$.

Solução: Tem-se que o termo $\dfrac{1}{(z+1)^3}$ já é a sua série de *Laurent* na região $0 < |z+1| < +\infty$; resta, portanto, determinar a série de *Laurent* do termo $\dfrac{1}{z-i}$ (o qual é analítico no ponto $z_0 = -1$). Sendo assim, deve-se ter:

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z+1-(1+i)} = -\frac{1}{1+i} \cdot \frac{1}{1-\frac{z+1}{1+i}} = -\frac{1}{1+i} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+i)^n} (z+1)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+i)^{n+1}} (z+1)^n,$$

para $\left|\dfrac{z+1}{1+i}\right| < 1$, ou seja, para $|z+1| < |1+i| = \sqrt{2}$. Daí, na região $0 < |z+1| < \sqrt{2}$, tem-se que:

$$\frac{1}{(z+1)^3 (z-i)} = \frac{1}{(z+1)^3} \left[-\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+i)^{n+1}} (z+1)^n \right]$$

$$= \frac{1}{(z+1)^3} \left[-\frac{1}{1+i} - \frac{1}{(1+i)^2}(z+1) - \frac{1}{(1+i)^3}(z+1)^2 - \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(1+i)^{n+1}} (z+1)^n \right]$$

$$= \left[-\frac{1}{1+i} \cdot \frac{1}{(z+1)^3} - \frac{1}{(1+i)^2} \cdot \frac{1}{(z+1)^2} - \frac{1}{(1+i)^3} \cdot \frac{1}{z+1} \right] - \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(1+i)^{n+1}} (z+1)^{n-3}.$$

Portanto, a parte principal da série de *Laurent* de f no ponto $z_0 = -1$ é dada por

$$-\frac{1}{1+i} \cdot \frac{1}{(z+1)^3} - \frac{1}{(1+i)^2} \cdot \frac{1}{(z+1)^2} - \frac{1}{(1+i)^3} \cdot \frac{1}{z+1}$$