<u>**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ**</u>

<u>**Departamento de Matemática**</u>

3a. Avaliação de CM044 - Cálculo IV - Turma A - 28 de Novembro de 2017

1. Dada a função $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 3z + 2}$ determine o *resíduo de* f em cada um dos seus pólos, utilizando a série de *Laurent* desenvolvida no respectivo pólo.

Solução: Nota-se que $z^2 - 3z + 2 = (z-1)(z-2)$ e, portanto, f admite pólos em 1 e 2; daí, segue que:

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{(z-1)-1}$$

$$= \frac{1}{z-1} \cdot \frac{-1}{1-(z-1)} = -\frac{1}{z-1} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (z-1)^n = -\frac{1}{z-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} (z-1)^{n-1},$$

para $0 < |z-1| < 1$. Logo $\mathrm{Res}_{z=1} f(z) = -1$.
Por sua vez, para o pólo 2, fazemos:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-2} \cdot \frac{1}{1-(-(z-2))} = \frac{1}{z-2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (z-2)^n = \frac{1}{z-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (z-2)^{n-1},$$

para $0 < |z-2| < 1$. Logo $\mathrm{Res}_{z=2} f(z) = 1$.

2. Considere a função $f(z) = \dfrac{e^z}{(z-1)^2(z-2)}$.

(a) Utilize a *Fórmula dos Resíduos* para determinar o *resíduo de* f em cada um dos seus pólos;

(b) Utilize o *Teorema dos Resíduos* para calcular $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\; dz$, onde Γ é a curva dada pela equação $|2z-1| = 2$, orientada no sentido anti-horário.

Solução:

(a) Dado que $z_0 = 1$ e $z_1 = 2$ são zeros apenas do denominador da fração $\dfrac{e^z}{(z-1)^2(z-2)}$, conclui-se que esses mesmos dois pontos são pólos de f, de ordens $m = 2$ e $m = 1$, respectivamente. Daí, segue que:

$$\mathrm{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left[(z-1)^2 \cdot f(z)\right] = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left[\frac{e^z}{z-2}\right] = \lim_{z\to 1} \frac{e^z(z-2) - e^z \cdot 1}{(z-2)^2} = \lim_{z\to 1} \frac{e^z(z-3)}{(z-2)^2} = -2e;$$

$$\mathrm{Res}_{z=2} f(z) = \lim_{z\to 2} [(z-2) \cdot f(z)] = \lim_{z\to 2} \frac{e^z}{z-1} = e^2.$$

(b) Observa-se que $|2z-1| = 2 \Leftrightarrow |z - 1/2| = 1$, e daí, vê-se que Γ é a circunferência de centro em $1/2$ e raio 1; apenas o pólo $z_0 = 1$ está na região interna a tal circunferência e pelo *teorema dos resíduos* segue que

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}_{z=1} f(z) = 2\pi i \cdot (-2e) = -4e\pi i.$$

3. Mostre que o conjunto $\mathcal{A} = \{\ \operatorname{sen} x,\ \operatorname{sen} 3x,\ \operatorname{sen} 5x, \dots,\ \operatorname{sen}(2n-1)x, \dots\}$ é linearmente independente (L.I.) em $\mathcal{C}[-\pi,\pi]$.

Solução: Deve-se mostrar que qualquer subconjunto finito de $\mathcal{A}$ é linearmente independente e isto, fica completamente demonstrado se mostrarmos que tal subconjunto finito é ortogonal.

Para tanto, considere o produto interno $< f, g >= \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot g(x)\,dx$ e seja

$$\mathcal{B} = \{\operatorname{sen}(2n_1 - 1)x,\ \operatorname{sen}(2n_2-1)x, \dots,\ \operatorname{sen}(2n_k-1)x\} \subset \mathcal{A},$$

com $k \in \mathbb{N}$.

Daí, para quaisquer i, j, com $i \neq j$ e $1 \leq i, j \leq k$ (e lembrando que $2\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$) deve-se ter:

$$< \operatorname{sen}(2n_i-1)x, \operatorname{sen}(2n_j-1)x >= \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(2n_i-1)x \cdot \operatorname{sen}(2n_j-1)x\,dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(2(n_i-n_j)x) - \cos(2(n_i+n_j-1)x)]\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(2(n_i-n_j)x)}{2(n_i-n_j)} - \frac{\operatorname{sen}(2(n_i+n_j-1)x)}{2(n_i+n_j-1)}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

o que mostra que os elementos de $\mathcal{B}$ são mutuamente ortogonais. Logo, se para alguma escolha de escalares $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tem-se que

$$\alpha_1 \cdot \operatorname{sen}(2n_1-1)x + \alpha_2 \cdot \operatorname{sen}(2n_2-1)x + \cdots + \alpha_k \cdot \operatorname{sen}(2n_k-1)x = 0$$

então, para cada j fixo deve-se ter:

$$0 = \langle 0, \operatorname{sen}(2n_j-1)x\rangle$$

$$= \langle \alpha_1 \cdot \operatorname{sen}(2n_1-1)x + \alpha_2 \cdot \operatorname{sen}(2n_2-1)x + \cdots + \alpha_k \cdot \operatorname{sen}(2n_k-1)x, \operatorname{sen}(2n_j-1)x\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\alpha_i \cdot \langle \operatorname{sen}(2n_i-1)x, \operatorname{sen}(2n_j-1)x\rangle = \alpha_j \cdot \langle \operatorname{sen}(2n_j-1)x, \operatorname{sen}(2n_j-1)x\rangle = \alpha_j\|\operatorname{sen}(2n_j-1)x\|^2 \Rightarrow \alpha_j = 0.$$

Portanto, $\alpha_j = 0$, para $j = 1, 2, \cdots, k$, ou seja, $\mathcal{B}$ é linearmente independente.

4. Dada a função $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1$, para $x \in (0, \pi]$, $f(x) = -1$, para $x \in [-\pi, 0)$ e $f(0) = 0$, determine sua série de *Fourier*.

Solução: Nota-se inicialmente, que f é uma função ímpar. Logo, sua série de *Fourier* será uma série de senos ($a_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$). Tem-se que:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \operatorname{sen}\, nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\ \operatorname{sen}\, nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos\, nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right],$$

para todo $n \in \mathbb{N}$; logo, $b_{2k} = 0$ e $b_{2k-1} = \dfrac{4}{(2k-1)\pi}$, para $k = 1, 2, \cdots$

Logo, a série de *Fourier* de f será

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_{2k-1}\ \operatorname{sen}(2k-1)x = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4}{(2k-1)\pi}\ \operatorname{sen}(2k-1)x = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2k-1}\ \operatorname{sen}(2k-1)x \qquad (*)$$

5. Utilize a série de *Fourier* obtida na questão anterior para determinar a soma da série $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots$.

Solução: Nota-se que para $x = \pi/2$ tem-se que sen $(2k-1)x = (-1)^{k+1}$, para todo $k \in \mathbb{N}$; daí, notando-se que f e f' são contínuas em $x = \pi/2$ (o que garante que a soma da série em $(*)$ seja igual a $f(\pi/2)$), obtem-se que:

$$1 = f(\pi/2) \quad = \quad \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots \quad = \quad \frac{\pi}{4}$$

6. Considere o sistema

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \text{ para todo } (x,t) \in [0,2] \times [0,+\infty) & (i) \\ u(0,t) = 0 = u(2,t), \text{ para todo } t \in [0,+\infty) & (ii) \\ u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = 0, \text{ para todo } x \in [0,2]. & (iii) \end{cases}$$

(a) Determine uma solução $u(x,t)$ para tal sistema;

(b) Mostre que $u(x,t)$ satisfaz às condições (i), (ii) e (iii).

Solução: (a) Dado que $u(x,0) = F(x) = x$ e $u_t(x,0) = 0$, para todo $x \in [0,2]$ então escolhendo-se os coeficientes a_n na forma

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} F_I(x) \text{ sen } \frac{n\pi x}{2}\, dx,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ (e onde F_I denota a extensão ímpar de F ao intervalo $[-2,2]$), tem-se que a função

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ sen } \frac{n\pi x}{2} \;\cos \frac{n\pi t}{2}$$

será solução do problema dado. Sendo assim, deve ser:

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} F_I(x) \text{ sen } \frac{n\pi x}{2}\, dx = \frac{2}{2}\int_{0}^{2} F(x) \text{ sen } \frac{n\pi x}{2}\, dx = \int_{0}^{2} x \text{ sen } \frac{n\pi x}{2}\, dx =$$

$$\left[-\frac{2x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 + \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \cos \frac{n\pi x}{2}\, dx \right] = \frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1} + \frac{4}{(n\pi)^2} \text{ sen } \frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 = \frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1}.$$

Portanto, deve ser

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{ sen } \frac{n\pi x}{2} \;\cos \frac{n\pi t}{2},$$

para todo $(x,t) \in [0,2] \times [0,+\infty)$.

(b) Tem-se que:

$$u_t(x,t) = \frac{4}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{ sen } \frac{n\pi x}{2} \cdot \cos \frac{n\pi t}{2} \right) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n}}{n} \text{ sen } \frac{n\pi x}{2} \cdot \text{ sen } \frac{n\pi t}{2} \cdot \frac{n\pi}{2};$$

$$u_{tt}(x,t) = \frac{4}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n}}{n} \text{ sen } \frac{n\pi x}{2} \cdot \text{ sen } \frac{n\pi t}{2} \cdot \frac{n\pi}{2} \right) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n}}{n} \text{ sen } \frac{n\pi x}{2} \cdot \cos \frac{n\pi t}{2} \cdot (\frac{n\pi}{2})^2;$$

$$u_x(x,t) = \frac{4}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{ sen } \frac{n\pi x}{2} \cdot \cos \frac{n\pi t}{2} \right) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos \frac{n\pi x}{2} \cdot \frac{n\pi}{2} \cdot \cos \frac{n\pi t}{2}$$

$$u_{xx}(x,t) = \frac{4}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos \frac{n\pi x}{2} \cdot \frac{n\pi}{2} \cdot \cos \frac{n\pi t}{2} \right) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n}}{n} \text{ sen } \frac{n\pi x}{2} \cdot (\frac{n\pi}{2})^2 \cdot \cos \frac{n\pi t}{2}$$

Portanto, tem-se que $u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t)$, ou seja, $u(x,t)$ satisfaz (i). Tem-se também que:

$$u(0,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\ \text{sen}\ 0\ \cos\frac{n\pi t}{2} = 0 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\ \text{sen}\ n\pi\ \cos\frac{n\pi t}{2},$$

para todo $t \in [0,+\infty)$, ou seja, $u(x,t)$ satisfaz (ii).
Finalmente,

$$u(x,0) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\ \cos 0 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{2} = F(x),$$

e também,

$$u_t(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n}}{n}\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{2}\cdot\ \text{sen}\ 0\cdot\frac{n\pi}{2} = 0,$$

para todo $x \in [0,2]$, e portanto, $u(x,t)$ satisfaz (iii).