UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Departamento de Matemática

Gabarito da 3a. Avaliação de CM044 - 03/Dez/2019

1. Sejam as funções $f, g \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$, dadas por $f(x) = \cos^2 x$ e $g(x) = 1$, para todo $x \in [-\pi, \pi]$. Calcule a medida α do ângulo entre f e g.

   Solução: Sabe-se que $\alpha = \text{arc cos}\, \dfrac{\langle f, g\rangle}{\|f\|\ \|g\|}$. Daí, como $\langle 1,\, \cos 2x\rangle = 0$, $\langle \cos 2x, \cos 2x\rangle = 1$ e f e g são funções pares, segue que:

$$\langle g, g\rangle = \langle 1, 1\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1^2\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} dx = \frac{2}{\pi}\, x\Big|_0^{\pi} = 2 \quad \Rightarrow \quad \|g\| = \sqrt{\langle g, g\rangle} = \sqrt{2}\,;$$

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \cdot 1\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2 x\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \big[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\big]\, dx = \frac{1}{\pi}\Big[x + \frac{1}{2}\text{ sen } 2x\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\,\pi = 1\,;$$

$$\langle f, f\rangle = \langle \cos^2 x, \cos^2 x\rangle = \Big\langle \frac{1 + \cos 2x}{2}, \frac{1 + \cos 2x}{2}\Big\rangle = \frac{1}{4}\Big[\langle 1, 1\rangle + 2\langle 1, \cos 2x\rangle + \langle \cos 2x, \cos 2x\rangle\Big]$$

$$\frac{1}{4}\Big[2 + 2\cdot 0 + 1\Big] = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\frac{3}{4}}\,.$$

   Portanto, tem-se que:

$$\alpha = \text{arc cos}\, \frac{\langle f, g\rangle}{\|f\|\ \|g\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,.$$

2. Seja o subespaço vetorial $\mathcal{W} \subset \mathcal{C}[-\pi, \pi]$. dado por $\mathcal{W} = \big[1,\ \cos^2 x\big]$. Determine uma base ortogonal para $\mathcal{W}$.

   Solução: Da questão anterior, vê-se que as funções $g(x) = 1$ e $f(x) = \cos^2 x$ não são mutuamente ortogonais (já que o produto interno de f e g não é zero). Todavia, sabe-se que para quaisquer vetores não nulos v_1 e v_2, o vetor $v_2 - proj_{v_1} v_2$ é ortogonal ao vetor v_1; desta forma, o conjunto de vetores $\{g, f - proj_g f\}$ é ortogonal e gera o subespaço $\mathcal{W}$ (sendo, portanto, uma base ortogonal deste subespaço). Sendo assim, obtém-se que:

$$proj_g f = \frac{\langle f, g\rangle}{\langle g, g\rangle}\cdot g = \frac{1}{2}\cdot 1$$

   e assim, $f - proj_g f = \cos^2 - \frac{1}{2}$; portanto, $\big\{1, \cos^2 x - \frac{1}{2}\big\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{W}$.

3. Seja $h \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$ a função dada por $h(x) = |x|$, para todo $x \in [-\pi, \pi]$. Calcule $proj_{\mathcal{W}} h$, onde $\mathcal{W} = \big[1,\ \cos^2 x\big]$.

   Solução: Dado que $\{1, \cos^2 x\}$ não é base ortogonal de $\mathcal{W}$, deve-se utilizar a base ortogonal $\Big\{g, \hat{f}\Big\}$, onde $g(x) = 1$ e $\hat{f}(x) = \cos^2 - \dfrac{1}{2}$, para todo $x \in [-\pi, \pi]$ para obter-se:

$$proj_{\mathcal{W}} h = proj_g h + proj_{\hat{f}} h\,.$$

Daí, notando-se que $\cos^2 x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cos 2x$, faz-se então:

$$\langle h, g\rangle = \langle |x|, 1\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cdot 1\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\, dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi} = \pi;$$

$$\langle h, \hat{f}\rangle = \langle |x|, \cos^2 x - \frac{1}{2}\rangle = \langle |x|, \frac{1}{2}\cos 2x\rangle = \frac{1}{2}\langle |x|, \cos 2x\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\ \cos 2x\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x\cdot\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\bigg|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\, dx\right] = \frac{1}{\pi}\,\frac{\cos 2x}{4}\bigg|_0^{\pi} = 0\,.$$

Obtém-se que:

$$proj_{\mathcal{W}} h = proj_g h + proj_{\hat{f}} h = \frac{\langle h, g\rangle}{\langle g, g\rangle}\cdot g + \frac{\langle h, \hat{f}\rangle}{\langle \hat{f}, \hat{f}\rangle}\cdot \hat{f} = \frac{\pi}{2}\cdot 1 + 0\cdot\hat{f} = \frac{\pi}{2}\,.$$

4. Seja f a função dada por $f(x) = 0$, se $x \in [-\pi, 0)$ e $f(x) = x$, se $x \in [0, \pi]$.

(a) Determine sua série de *Fourier* no intervalo $[-\pi, \pi]$;

(b) Utilize a série obtida em (a) para calcular a soma da série $1 + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \dfrac{1}{7^2} + \cdots$.

Solução: (a) Tem-se que:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\, dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left[x\cdot\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\bigg|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\cos nx}{n^2}\bigg|_0^{\pi} = \frac{[(-1)^n - 1]}{\pi n^2};$$

logo, $a_{2n} = 0$ e $a_{2n-1} = -\dfrac{2}{\pi(2n-1)^2}$, para $n = 1, 2, \cdots$. Também:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\operatorname{sen} nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left[-x\,\frac{\cos nx}{n}\bigg|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi(-1)^{n+1}}{n} + \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}\bigg|_0^{\pi}\right] = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \qquad \text{para } n = 1, 2, \cdots.$$

Portanto, a série de *Fourier* procurada é:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1}\cos(2n-1)x + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen} nx = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen} nx.$$

(b) Sabe-se que se f e f' são contínuas por partes, então a soma da série de *Fourier* é igual ao valor da função nos pontos de continuidade desta; sendo f contínua em zero segue que:

$$0 = f(0) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos 0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen} 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\Rightarrow\quad 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\quad\Rightarrow\quad \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow\quad 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots \;=\; \frac{\pi^2}{8}.$$

5. Dada a função $f(x) = 2x - x^2$, com $x \in [0, 2]$, determine a série de *Fourier* de $f_{_I}(x)$, a extensão ímpar de f ao intervalo $[-2, 2]$.

Solução: Por definição, a extensão ímpar de f é dada por $f_{_I}(x) = f(x)$, para $x \in [0, 2]$, e $f_{_I}(x) = -f(-x)$, para $x \in [-2, 0]$. Sendo $f_{_I}$ uma função ímpar, sua série de *Fourier* é uma série de senos; além disso, nota-se que $2x \cdot \operatorname{sen} \dfrac{n\pi x}{2}$ é uma função par e $x^2 \cdot \operatorname{sen} \dfrac{n\pi x}{2}$ é uma função ímpar. Daí, segue que:

$$b_{_n} = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f_{_I}(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}\, dx = \frac{2}{2}\int_{0}^{2} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}\, dx = \int_0^2 2x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}\, dx - \int_0^2 x^2 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}\, dx = (I) - (II)\,;$$

$$\begin{aligned}
(I) &= 2\int_0^2 x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}\, dx = 2\left[-\frac{2x}{n\pi}\cdot \cos \frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 + \int_0^2 \frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2}\, dx\right] \\
&= 2\left[\frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{4}{(n\pi)^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2\right] = \frac{8(-1)^{n+1}}{n\pi}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(II) &= \int_0^2 x^2 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}\, dx = -\frac{2x^2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 + \frac{4}{n\pi}\int_0^2 x \cos \frac{n\pi x}{2}\, dx \\
&= -\frac{8(-1)^n}{n\pi} + \frac{4}{n\pi}\left[\frac{2x}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 - \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}\, dx\right] \\
&= \frac{8(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{4}{n\pi}\left[0 + \frac{4}{(n\pi)^2} \cos \frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2\right] = \frac{8(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{16}{(n\pi)^3}[(-1)^n - 1].
\end{aligned}$$

Tem-se então:

$$b_{_n} = (I) - (II) = \frac{8(-1)^{n+1}}{n\pi} - \left[\frac{8(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{16}{(n\pi)^3}[(-1)^n - 1]\right] = \frac{16[1 - (-1)^n]}{(n\pi)^3}$$

$$\Rightarrow \quad b_{_{2n}} = 0 \quad \text{e} \quad b_{_{2n-1}} = \frac{32}{(2n-1)^3\pi^3}, \quad \text{para } n = 1, 2, \cdots.$$

Portanto, a série procurada é:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_{_{2n-1}} \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{2} = \frac{32}{\pi^3}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{2}.$$

6. Considere o sistema

$$\begin{cases}
u_t(x,t) - 16u_{xx}(x,t) = 0, \text{ para todo } (x,t) \in [0,2] \times [0,+\infty) & (i) \\
u(0,t) = 0 = u(2,t), \text{ para todo } t \in [0,+\infty) & (ii) \\
u(x,0) = x(2-x), \qquad \text{para todo } x \in [0,2]. & (iii)
\end{cases}$$

(a) Determine uma solução $u(x,t)$ para tal sistema;

(b) Mostre que $u(x,t)$ obtida em (a) satisfaz às condições (i), (ii) e (iii).

Solução: (a) Sabe-se que uma solução da equação do calor (com constante $c = 4$) dada é da forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_{_n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2} \cdot e^{-(\frac{4n\pi}{2})^2 t} = \sum_{n=1}^{+\infty} B_{_n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2} \cdot e^{-4(n\pi)^2 t},$$

onde o coeficiente $B_{_n}$ deve ser o n-ésimo coeficiente da série de *Fourier* da extensão ímpar do dado inicial $f(x) = x(2-x) = 2x - x^2$, ao intervalo $[-2, 2]$.

Pelo visto na questão 5 acima, deve-se ter $B_{2n} = 0$ e $B_{2n-1} = \dfrac{32}{\pi^3}\dfrac{1}{(2n-1)^3}$, para $n = 1, 2, \cdots$. Sendo assim, a solução procurada é:

$$u(x,t) = \frac{32}{\pi^3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\ \text{sen}\ \frac{(2n-1)\pi x}{2}\cdot e^{-4(2n-1)^2\pi^2 t}.$$

(b) Tem-se que:

$$\begin{aligned}
u_t(x,t) &= \frac{32}{\pi^3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\ \text{sen}\ \frac{(2n-1)\pi x}{2}\cdot(-4(2n-1)^2\pi^2)e^{-4(2n-1)^2\pi^2 t}\\
&= -\frac{128}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\ \text{sen}\ \frac{(2n-1)\pi x}{2}\cdot e^{-4(2n-1)^2\pi^2 t};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_x(x,t) &= \frac{32}{\pi^3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\frac{(2n-1)\pi}{2}\ \cos\ \frac{(2n-1)\pi x}{2}\cdot e^{-4(2n-1)^2\pi^2 t}\\
&= \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\ \cos\ \frac{(2n-1)\pi x}{2}\cdot e^{-4(2n-1)^2\pi^2 t}\\
u_{xx}(x,t) &= \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}(-\frac{(2n-1)\pi}{2})\ \text{sen}\ \frac{(2n-1)\pi x}{2}\cdot e^{-4(2n-1)^2\pi^2 t}\\
&= -\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\ \text{sen}\ \frac{(2n-1)\pi x}{2}\cdot e^{-4(2n-1)^2\pi^2 t}\\
16u_{xx}(x,t) &= -\frac{128}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\ \text{sen}\ \frac{(2n-1)\pi x}{2}\cdot e^{-4(2n-1)^2\pi^2 t} = u_t(x,t),
\end{aligned}$$

e portanto, $u(x,t)$ satisfaz à equação (i). Tem-se também que

$$u(0,t) = \frac{32}{\pi^3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\cdot 0\cdot e^{-4(2n-1)^2\pi^2 t}0 = u(2,t),$$

e assim, $u(x,t)$ satisfaz às condições de fronteira (ii). Finalmente, tem-se que:

$$u(x,0) = \frac{32}{\pi^3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\ \text{sen}\ \frac{(2n-1)\pi x}{2}\cdot e^0. = \frac{32}{\pi^3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\ \text{sen}\ \frac{(2n-1)\pi x}{2} = 2x - x^2,$$

e portanto, $u(x,t)$ satisfaz à condição inicial (iii).