EXERCÍCIOS 15.3

Nos Exercícios de 1 a 6, ache uma equação do plano contendo o ponto P dado e tendo o vetor **N** *dado como um vetor normal.*

1. $P(3, 1, 2)$; $\mathbf{N} = \langle 1, 2, -3\rangle$
2. $P(-3, 2, 5)$; $\mathbf{N} = \langle 6, -3, -2\rangle$
3. $P(0, -1, 2)$; $\mathbf{N} = \langle 0, 1, -1\rangle$
4. $P(-1, 8, 3)$; $\mathbf{N} = \langle -7, -1, 1\rangle$
5. $P(2, 1, -1)$; $\mathbf{N} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
6. $P(1, 0, 0)$; $\mathbf{N} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$

Nos Exercícios 7 e 8, ache uma equação do plano que contenha os três pontos dados.

7. $(3, 4, 1)$, $(1, 7, 1)$, $(-1, -2, 5)$
8. $(0, 0, 2)$, $(2, 4, 1)$, $(-2, 3, 3)$

Nos Exercícios de 9 a 14, faça um esboço do plano dado e ache dois vetores unitários normais ao plano.

9. $2x - y + 2z - 6 = 0$
10. $4x - 4y + 2z - 9 = 0$
11. $4x + 3y - 12z = 0$
12. $y + 2z - 4 = 0$
13. $3x + 2z - 6 = 0$
14. $z = 5$

Nos Exercícios de 15 a 20, ache uma equação do plano satisfazendo as condições dadas.

15. Perpendicular à reta que passa pelos pontos $(2, 2, -4)$ e $(7, -1, 3)$ e contendo o ponto $(-5, 1, 2)$.
16. Paralelo ao plano $4x - 2y + z - 1 = 0$ e contendo o ponto $(2, 6, -1)$.
17. Perpendicular ao plano $x + 3y - z - 7 = 0$ e contendo os pontos $(2, 0, 5)$ e $(0, 2, -1)$.
18. Perpendicular a cada um dos planos $x - y + z = 0$ e $2x + y - 4z - 5 = 0$ e contendo o ponto $(4, 0, -2)$.
19. Perpendicular ao plano yz, contendo o ponto $(2, 1, 1)$ e fazendo um ângulo com o plano $2x - y + 2z - 3 = 0$ com medida de $\cos^{-1} \frac{2}{3}$ rad.
20. Contendo o ponto $P(-3, 5, -2)$ e perpendicular às representações do vetor $\mathbf{V}(\overrightarrow{OP})$.

Nos Exercícios de 21 a 23, ache o co-seno do ângulo entre os dois planos dados.

21. $2x - y - 2z - 5 = 0$ e $6x - 2y + 3z + 8 = 0$
22. $2x - 5y + 3z - 1 = 0$ e $y - 5z + 3 = 0$
23. $3x + 4y = 0$ e $4x - 7y + 4z - 6 = 0$

24. Ache a distância do ponto $(2, 2, -4)$ ao plano $2x + 2y - z - 6 = 0$.
25. Ache a distância do ponto $(-2, 6, 3)$ ao plano $5x + 11y + 2z - 30 = 0$.
26. Ache a distância perpendicular entre os planos paralelos $4x - 8y - z + 9 = 0$ e $4x - 8y - z - 6 = 0$.
27. Ache a distância perpendicular entre os planos paralelos $4y - 3z - 6 = 0$ e $8y - 6z - 27 = 0$.
28. Prove que a distância não-orientada do ponto (x_0, y_0, z_0) ao plano $ax + by + cz + d = 0$ é dada por

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

29. Prove que a distância perpendicular entre os planos paralelos $ax + by + cz + d_1 = 0$ e $ax + by + cz + d_2 = 0$ é dada por

$$\frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

30. Se a, b e c forem interceptos não-nulos de um plano nos eixos x, y e z, respectivamente, prove que a equação do plano será

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Esta é a chamada *forma interceptual* da equação do plano.

EXERCÍCIOS 15.4

Nos Exercícios de 1 a 8, ache as equações simétrica e paramétrica da reta que satisfaz as condições dadas.

1. Passa pelos pontos $(1, 2, 1)$ e $(5, -1, 1)$.
2. Passa pelo ponto $(5, 3, 2)$ com números direcionais $[4, 1, -1]$.
3. Passa pela origem e é perpendicular à reta

$$\tfrac{1}{4}(x - 10) = \tfrac{1}{3}y = \tfrac{1}{2}z$$

por intersecção.

4. Passa pela origem é é perpendicular às retas que têm por números direcionais $[4, 2, 1]$ e $[-3, -2, 1]$.
5. É perpendicular às retas com números direcionais $[-5, 1, 2]$ e $[2, -3, -4]$ no ponto $(-2, 0, 3)$.
6. Passa pelo ponto $(-3, 1, -5)$ e é perpendicular ao plano $4x - 2y + z - 7 = 0$.
7. Passa pelo ponto $(4, -5, 20)$ e é perpendicular ao plano $x + 3y - 6z - 8 = 0$.
8. Passa pelo ponto $(2, 0, -4)$ e é paralela a cada um dos planos $2x + y - z = 0$ e $x + 3y + 5z = 0$.
9. Ache um conjunto de equações simétricas para a reta

$$\begin{cases} 4x - 3y + z - 2 = 0 \\ 2x + 5y - 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

10. Mostre que as retas

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y+4}{-5} = \frac{z-2}{3} \quad \text{e} \quad \frac{x-3}{-2} = \frac{y+14}{5} = \frac{z-8}{-3}$$

são coincidentes.

11. Prove que a reta $\frac{1}{2}(x - 3) = \frac{1}{3}(y + 2) = \frac{1}{4}(z + 1)$ está no plano $x - 2y + z = 6$.
12. Prove que a reta $x + 1 = -\frac{1}{2}(y - 6) = z$ está no plano $3x + y - z = 3$.

Os planos que passam por uma reta e são perpendiculares aos planos coordenados são chamados de **planos projetores** *da reta. Nos Exercícios de 13 a 16, ache as equações dos planos projetores da reta dada e faça um esboço da reta.*

13. $\begin{cases} 3x - 2y + 5z - 30 = 0 \\ 2x + 3y - 10z - 6 = 0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x + y - 3z + 1 = 0 \\ 2x - y - 3z + 14 = 0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x - 2y - 3z + 6 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x - y + z - 7 = 0 \\ 4x - y + 3z - 13 = 0 \end{cases}$

17. Ache o co-seno do menor ângulo entre o vetor cujas representações são paralelas à reta $x = 2y + 4$, $z = -y + 4$ e o vetor cujas representações são paralelas à reta $x = y + 7$, $2z = y + 2$.
18. Ache uma equação do plano contendo o ponto $(6, 2, 4)$ e a reta $\frac{1}{5}(x - 1) = \frac{1}{6}(y + 2) = \frac{1}{7}(z - 3)$.

Nos Exercícios 19 e 20, ache uma equação do plano que contém as retas concorrentes (que se interceptam).

19. $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z+2}{3}$ e $\begin{cases} 3x + 2y + z + 2 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$

20. $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ e $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-1}{1}$

21. Mostre que as retas

$$\begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 8x - 2y - 3z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x - 3y + z + 3 = 0 \\ 3x - y - z + 5 = 0 \end{cases}$$

são paralelas e ache uma equação do plano determinado por elas.

22. Mostre que as retas

$$\frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{-2} = z + 4 \quad \text{e} \quad \frac{x-3}{-5} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{-1}$$

são paralelas e ache uma equação do plano determinado por elas.

23. Ache as coordenadas do ponto de intersecção entre a reta $\frac{1}{4}(x - 2) = -\frac{1}{2}(y + 3) = \frac{1}{7}(z - 1)$ e o plano $5x - y + 2z - 12 = 0$.
24. Ache as equações da reta que passa pelo ponto $(1, -1, 1)$, é perpendicular à reta $3x = 2y = z$ e paralela ao plano $x + y - z = 0$.
25. Ache as equações da reta que passa pelo ponto $(3, 6, 4)$, intercepta o eixo z e é paralela ao plano $x - 3y + 5z - 6 = 0$.
26. Ache a distância da origem à reta $x = -2 + \frac{6}{7}t$, $y = 7 - \frac{2}{7}t$, $z = 4 + \frac{3}{7}t$.
27. Ache a distância entre o ponto $(-1, 3, -1)$ e a reta $x - 2z = 7$, $y = 1$.
28. Ache as equações da reta que passa pela origem, é perpendicular às retas $x = y - 5$; $z = 2y - 3$ e intercepta a reta $y = 2x + 1$, $z = x + 2$.
29. Prove que as retas

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-3} \quad \text{e} \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+3}{2}$$

são reversas.

30 Ache as equações da reta que passa pelo ponto $(3, -4, -5)$ e intercepta cada uma das reversas do Exercício 29.

31. Quais são as equações simétricas de uma reta se dois números direcionais a e b são nulos?

EXERCÍCIOS 15.3 (Página 867)

1. $x + 2y - 3z + 1 = 0$ **3.** $y - z + 3 = 0$ **5.** $x - 3y - 4z - 3 = 0$ **7.** $3x + 2y + 6z = 23$
9. $\langle \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \rangle; \langle -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \rangle$ **11.** $\langle \frac{4}{13}, \frac{3}{13}, -\frac{12}{13} \rangle; \langle -\frac{4}{13}, -\frac{3}{13}, \frac{12}{13} \rangle$ **13.** $\langle \frac{3}{\sqrt{13}}, 0, \frac{2}{\sqrt{13}} \rangle; \langle -\frac{3}{\sqrt{13}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{13}} \rangle$
15. $5x - 3y + 7z + 14 = 0$ **17.** $2x - y - z + 1 = 0$ **19.** $4y - 3z - 1 = 0$ e $z = 1$ **21.** 67,6° **23.** 69,2°
25. $\frac{16}{15}\sqrt{6}$ **27.** $\frac{3}{2}$

EXERCÍCIOS 15.4 (Página 872)

1. $x = 1 + 4t, y = 2 - 3t, z = 1; \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-2}{-3}, z = 1$ **3.** $x = 13t, y = -12t, z = -8t; \dfrac{x}{13} = \dfrac{y}{-12} = \dfrac{z}{-8}$
5. $x = 2t - 2, y = -16t; z = 13t + 3; \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y}{-16} = \dfrac{z-3}{13}$ **7.** $x = 4 + t, y = -5 + 3t, z = 20 - 6t; \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y+5}{3} = \dfrac{z-20}{-6}$
9. $\dfrac{x - \frac{1}{7}}{2} = \dfrac{y}{7} = \dfrac{z - \frac{10}{7}}{13}$ **13.** $8x - y - 66 = 0; 13x - 5z - 102 = 0; 13y - 40z + 42 = 0$ **15.** $4x + y + 3 = 0; 3x - z + 4 = 0;$ $3y + 4z - 7 = 0$ **17.** $\frac{5}{18}\sqrt{6}$ **19.** $4x + 7y - 3z + 7 = 0$ **21.** $4x + 2y - 3z + 5 = 0$ **23.** $(\frac{5}{3}, -\frac{17}{6}, \frac{5}{12})$
25. $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-6}{2} = \dfrac{z-4}{1}$ **27.** $\frac{2}{5}\sqrt{70}$ **31.** $x = x_0, y = y_0$

EXERCÍCIOS 15.5 (Página 882)

1. $\langle 7, 13, -11 \rangle$ **3.** -490 **11.** $\langle 9, -1, -23 \rangle$ **15.** $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ **17.** $\sqrt{89}$ unidades quad. **19.** $9\sqrt{29}$ unidades quad.
21. $5x - 2y + 7z = 0$ **23.** $x + 2y + z - 2 = 0$ **25.** $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})$ **27.** $\pm \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$ **29.** 20 unidades cúb. **31.** $\frac{38}{3\sqrt{78}}$

EXERCÍCIOS 15.6 (Página 887)

13. $x^2 + z^2 = 4y$ **15.** $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16$ **17.** $y^2 = 9x^2 + 9z^2$ **19.** $y^2 + z^2 = \operatorname{sen}^2 x$ **21.** $x^2 + z^2 = 16$; eixo x
23. $x^2 - z^2 = 4$; eixo z **25.** $z = \sqrt{|y|}$; eixo y **27.** $y^2 = 9x^2$; eixo y

EXERCÍCIOS 15.7 (Página 894)

1. hiperbolóide elíptico de uma folha **3.** parabolóide hiperbólico **5.** cilindro hiperbólico **7.** elipsóide
9. hiperbolóide elíptico de uma folha **11.** cone elíptico **13.** parabolóide elíptico **15.** parabolóide hiperbólico
17. hiperbolóide elíptico de duas folhas **19.** (a) $1 < |k| < \sqrt{2}$; (b) $|k| < 1$ **21.** vértice: $(1, -\frac{1}{3}, 0)$; foco: $(1, 0, 0)$ **25.** 8π unidades cúb.
27. $\dfrac{abh^2}{2c}\pi$ unidades cúb.

EXERCÍCIOS 15.8 (Página 900)

1. $\dfrac{1}{\sqrt{4t^2+5}}(\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$ **3.** $\mathbf{T}(t) = \frac{1}{3}\sqrt{3}[(\cos t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\cos t + \operatorname{sen} t)\mathbf{j} + \mathbf{k}]$
5. $\dfrac{1}{\sqrt{4t^2+29}}[2(\cos t - t \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2(\operatorname{sen} t + t\cos t)\mathbf{k}]$ **7.** $\sqrt{21} + \frac{3}{2} + \frac{5}{4}\ln(4 + \sqrt{21})$ **9.** $\sqrt{3}(e^3 - 1)$ **11.** 13
15. $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + te^t\mathbf{k}$ **17.** $-\frac{3}{5}$ **19.** $\mathbf{T}(1) = \frac{1}{14}\sqrt{14}\mathbf{i} + \frac{1}{7}\sqrt{14}\mathbf{j} + \frac{3}{14}\sqrt{14}\mathbf{k}$; $\mathbf{N}(1) = -\frac{11}{266}\sqrt{266}\mathbf{i} - \frac{4}{133}\sqrt{266}\mathbf{j} + \frac{9}{266}\sqrt{266}\mathbf{k}$;
$\mathbf{B}(1) = \frac{\sqrt{19}}{19}(3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k})$; $K(1) = \frac{1}{98}\sqrt{266}$ **21.** $\mathbf{T}(-1) = \frac{1}{3}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$; $\mathbf{N}(-1) = \frac{2}{15}\sqrt{5}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\sqrt{5}\mathbf{j} - \frac{4}{15}\sqrt{5}\mathbf{k}$;