Lista 4 - Transformações Lineares

Definição 1 (Transformação Linear no Plano)**.** *Uma função L de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ é chamada* transformação linear *se*

$$L(u+v) = L(u) + L(v), \quad \textit{para todo} u, v \in \mathbb{R}^2; \tag{1}$$
$$L(\lambda u) = \lambda L(u), \quad \textit{para todo} u \in \mathbb{R}^2 \textit{ e } \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Exercício 1. Verifique se as funções abaixo de R^2 em $\mathbb{R}^2$ são lineares. Em caso afirmativo, determine suas matrizes.

a) $f(x,y) = (3x+y, x-2y)$;
b) $f(x,y) = (3x+y, 0)$;
c) $f(x,y) = (xy, x-y)$;
d) $f(x,y) = (x+y-1, 2x-3y)$;
e) $f(x,y) = (x+y, 2x-3y)$;
f) $f(x,y) = \big(x+y, \log_{10}(xy)\big)$;
g) $f(x,y) = \big(\cos(x+y), \operatorname{sen}(x+y)\big)$;
h) $f(x,y) = (0,0)$;

Exercício 2. Mostre que cada uma das seguintes funções $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é linear. Descreva geometricamente o que cada transformação executa.

a) $L(x,y) = (-x, y)$;
b) $L(x,y) = (-x, -y)$;
c) $L(x,y) = (0, y)$;
d) $L(x,y) = (y, -x)$;
e) $L(x,y) = (x/2, y/2)$;

Exercício 3. Seja $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear. Se

$$L(1,2) = (-2,3) \quad \text{e} \quad L(1,-1) = (5,2),$$

encontre o valor de $L(7,5)$.

Exercício 4. Seja $v_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ um vetor não-nulo fixo. Uma translação em $\mathbb{R}^2$ é uma função da forma

$$T(u) = u + v_0$$

para todo $u \in \mathbb{R}^2$. Mostre que uma translação não é uma transformação linear.

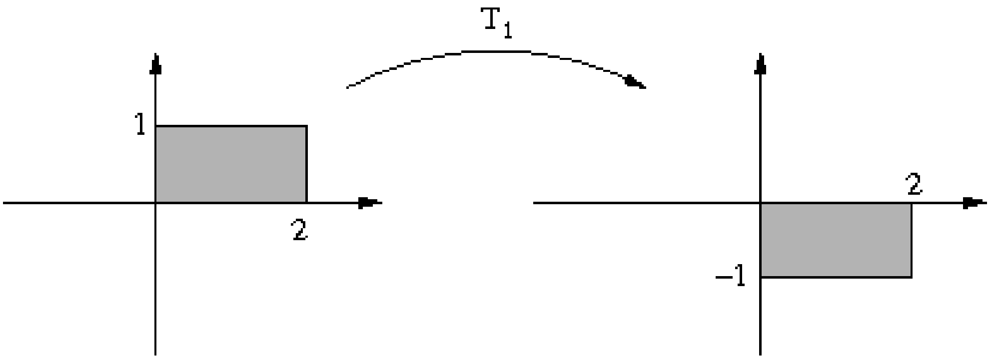
Exercício 5. Seja $v_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ um vetor não-nulo fixo. A projeção ortogonal de um vetor arbitrário u na reta que que contém o vetor v é dado por

$$\text{proj}_v u = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v. \tag{3}$$

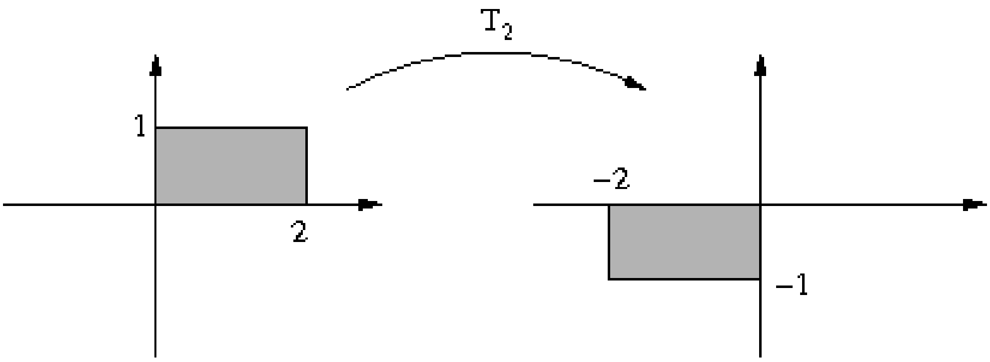
A função proj_v é uma transformação linear? Em caso afirmativo, determine sua matriz.

Exercício 6. Determine as transformações lineares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ que realizam as seguintes transformações do plano:

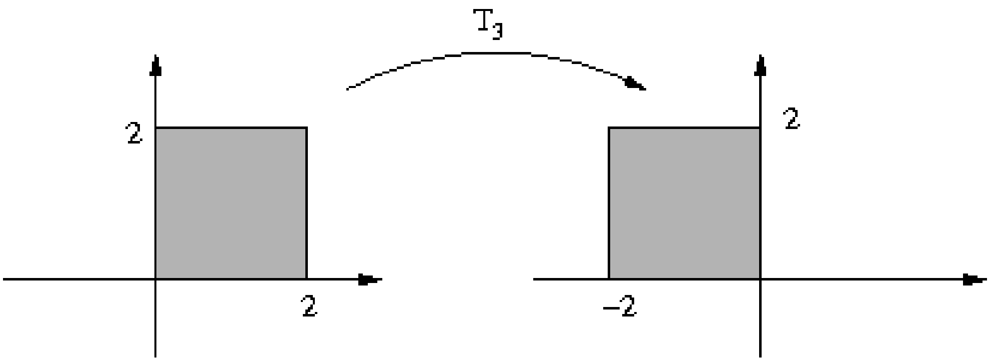
a)



b)



c)



d)