Cônicas

O gráfico da equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{2.4}$$

onde A, B, C, D, E e F são constantes com A, B e C, não todos nulos, é uma *cônica*. A equação (2.4) é chamada de *equação geral do* $2.^o$ *grau* em x e y ou *equação cartesiana da cônica*. Note que a equação

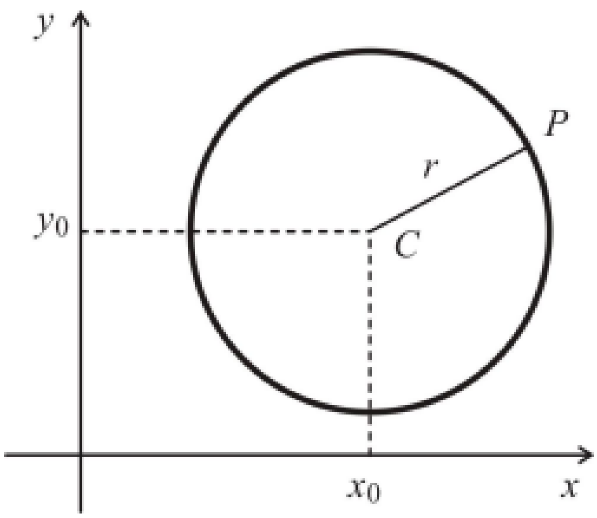
$$\lambda Ax^2 + \lambda Bxy + \lambda Cy^2 + \lambda Dx + \lambda Ey + \lambda F = 0 = 0,$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ com $\lambda \neq 0$, representa o mesmo gráfico da equação (2.4).

Sejam C um ponto de $\mathbb{R}^2$ e $R \in \mathbb{R}$ com $R > 0$. Uma *circunferência* (ou um *círculo*) $\mathcal{C}$ de centro C e raio R é o conjunto de todos os pontos $P \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$d(P, C) = R.$$

Geometricamente, uma circunferência $\mathcal{C}$ é o conjunto de todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ que são eqüidistantes de C (confira Figura).



Circunferência

Proposição 2.20 *Sejam* $C = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *e* $R \in \mathbb{R}$ *fixados com* $R > 0$. *Então o conjunto de todos os pontos* $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tais que*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

representa uma circunferência $\mathcal{C}$ *de centro* C *e raio* R.

Prova. Um ponto $P = (x, y)$ pertence a uma circunferência $\mathcal{C}$ de centro C e raio R se, e somente se, $d(P, C) = R$. Logo,

$$d(P, C) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{R^2} = |R| = R,$$

pois $R > 0$.

Note que

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

onde $a = -2x_0$, $b = -2y_0$ e $c = x_0^2 + y_0^2 - R^2$. Portanto, uma circunferência $\mathcal{C}$ de centro C e raio R representa uma cônica. Reciprocamente, o gráfico da cônica

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0,$$

quando $a^2 + b^2 - c > 0$, é a representação analítca da circunferência $\mathcal{C}$ de centro $C = (-a, -b)$ e raio $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$, pois

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = (x + a)^2 + (y + b)^2 - (a^2 + b^2 - c) = 0,$$

ou ainda,

$$(x + a)^2 + (y + b)^2 = a^2 + b^2 - c.$$

Exemplo 2.21 *Determinar a equação da circunferência de centro $C = (-4, 3)$ e raio $R = 3$.*

Solução. Pela Proposição 2.20, temos que a equação da circunferência é dada por

$$(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 3^2,$$

ou ainda, $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 16 = 0$.

Exemplo 2.22 *Determinar o centro e o raio da circunferência* $\mathcal{C} : x^2+y^2-12x+8y+16 = 0$.

Solução. Uma maneira de resolver este problema é completando os quadrados.

$$(x^2 - 12x) + (y^2 + 8y) + 16 = 0.$$

Como

$$x^2 - 12x = x^2 - 2 \cdot 6x + 6^2 - 6^2 = (x - 6)^2 - 36$$

e

$$y^2 + 8y = y^2 + 2 \cdot 4y + 4^2 - 4^2 = (y + 4)^2 - 16$$

temos que

$$x^2 + y^2 - 12x + 8y + 16 = 0 \Rightarrow (x - 6)^2 + (y + 4)^2 = 36.$$

Portanto, $C = (6, -4)$ e $R = 6$ são o centro e o raio da circunferência $\mathcal{C}$.

Proposição 2.23 *Sejam r_1, r_2 retas distintas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ circunferências distintas em $\mathbb{R}^2$. Então:*

1. *$r_1 \cap r_2 = \emptyset$ ou $r_1 \cap r_2$ é um ponto em $\mathbb{R}^2$.*
2. *$r_1 \cap \mathcal{C}_1 = \emptyset$ ou $r_1 \cap \mathcal{C}_1$ é um ou dois pontos em $\mathbb{R}^2$.*
3. *$\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$ ou $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ é um ou dois pontos em $\mathbb{R}^2$.*

Prova. Vamos provar apenas o item (2). Se

$$\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ e } \mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

então multiplicando a segunda equação por -1 e adicionando-se, obtemos a reta

$$r : (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2) = 0.$$

Logo, o item (3), reduz-se ao item (2) com $r \cap \mathcal{C}_1$ ou $r \cap \mathcal{C}_2$. Suponhamos que r_1 tenha equação cartesiana

$$r_1 : Ax + By + C = 0.$$

Se $B \neq 0$ (o caso $B = 0$ fica como um exercício), então podemos supor, sem perda de generalidade, que $B = 1$. Logo,

$$r_1 : y = -Ax - C.$$

Se $(x, y) \in r_1 \cap \mathcal{C}_1$, então substituindo y na equação de $\mathcal{C}_1$ e desenvolvendo, obtemos

$$dx^2 + ex + f = 0,$$

onde $d = 1 + A^2 \neq 0$, $e = 2AC + a_1 - b_1 A$ e $f = b_1 C + c_1$. Seja $\Delta = e^2 - 4df$. Então há três casos a ser considerado:

1.º **Caso**. Se $\Delta = 0$, então $r_1 \cap \mathcal{C}_1$ é um ponto em $\mathbb{R}^2$, isto é, a reta r_1 é tangente a circunferência $\mathcal{C}_1$.

2.º **Caso**. Se $\Delta > 0$, então $r_1 \cap \mathcal{C}_1$ são dois pontos em $\mathbb{R}^2$, isto é, a reta r_1 é secante a circunferência $\mathcal{C}_1$.

3.º **Caso**. Se $\Delta < 0$, então $r_1 \cap \mathcal{C}_1 = \emptyset$, isto é, a reta r_1 não intercepta a circunferência $\mathcal{C}_1$.

Exemplo 2.24 *Determinar as equações das retas tangentes à circunferência $\mathcal{C}$ de equação cartesiana*

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$$

e perpendiculares à reta $r : x - 2y + 9 = 0$.

Solução. As retas desejadas têm equação reduzida da forma $y = -2x + b$. Então substituindo y na equação de $\mathcal{C}$, obtemos

$$5x^2 - (4b + 10)x + 4b + b^2 = 0.$$

Por hipótese, devemos ter $\Delta = (4b + 10)^2 - 20(4b + b^2) = 0$, isto é, $100 - 4b^2 = 0$. Logo, $b = -5$ ou $b = 5$. Portanto, as equações das retas tangentes a $\mathcal{C}$ são: $y = -2x - 5$ e $y = -2x + 5$.