Capítulo 14

Elipse

Nosso objetivo, neste e nos próximos capítulos, é estudar a **equação geral do segundo grau em duas variáveis**:

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\,,\ \text{onde } A \neq 0 \text{ ou } B \neq 0 \text{ ou } C \neq 0}$$

Para isso, definiremos, geometricamente, uma elipse, uma hipérbole e uma parábola, que são possíveis soluções não degeneradas da equação acima.

1. Elipse

Definição 1

Uma **elipse** $\mathcal{E}$ de **focos** F_1 e F_2 é o conjunto do plano que consiste de todos os pontos P, cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, maior do que a distância entre os focos $2c > 0$. Ou seja:

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathcal{E} = \{\, P \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \,\}\ , \\ 0 < c < a\,; \quad d(F_1, F_2) = 2c \end{array}}$$

Terminologia

- Como dissemos na definição, os pontos F_1 e F_2 são os **focos** da elipse.
- A reta ℓ que contém os focos é a **reta focal**.

Figura 1: Posicionamento dos focos da elipse na reta focal.

• A interseção da elipse com a reta focal ℓ consiste de exatamente dois pontos, A_1 e A_2, chamados **vértices** da elipse sobre a reta focal.

De fato, seja $A \in \mathcal{E} \cap \ell$. Então, $A \notin F_1F_2$, pois, se $A \in F_1F_2$, teríamos

$$2c = d(F_1, F_2) = d(A, F_1) + d(A, F_2) = 2a\,,$$

isto é, $2c = 2a$, o que é impossível, já que, por definição, $2c < 2a$.

Seja $A_2 \in \mathcal{E} \cap \ell - F_1F_2$ tal que $x = d(A_2, F_2)$.

Como $2a = d(A_2, F_1) + d(A_2, F_2) = x + 2c + x$, pois $A_2 \in \mathcal{E}$, temos que $x = a - c$.

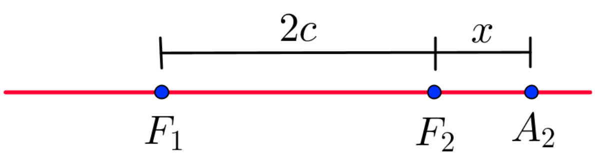

Figura 2: Determinação da distância dos vértices aos focos da elipse.

Logo, o ponto A_2 pertencente a $\ell - F_1F_2$, que dista $a - c$ do foco F_2, pertence à elipse $\mathcal{E}$. De modo análogo, o ponto A_1 pertencente a $\ell - F_1F_2$, que dista $a - c$ do foco F_1, pertence à elipse $\mathcal{E}$.

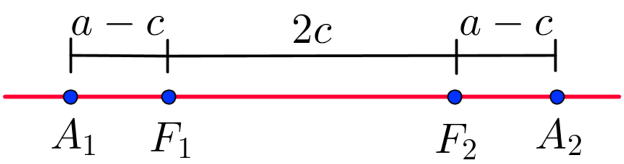

Figura 3: Posicionamento dos vértices em relação aos focos da elipse na reta focal.

• O segmento A_1A_2 é denominado **eixo focal** da elipse. O seu comprimento é $2a$.

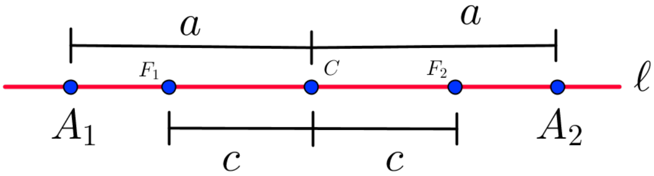

Figura 4: Posicionamento dos focos, vértices e centro da elipse na reta focal.

• O ponto médio C do eixo focal A_1A_2 é o **centro** da elipse. Este ponto é também o ponto médio do segmento F_1F_2 delimitado pelos focos.

• A reta ℓ' que passa pelo centro C e é perpendicular à reta focal ℓ é a **reta não focal**.

• A elipse intersecta a reta não focal ℓ' em exatamente dois pontos, B_1 e B_2, denominados **vértices da elipse sobre a reta não focal**.

De fato, como ℓ' é a mediatriz do segmento F_1F_2, temos que $B \in \ell' \cap \mathcal{E}$ se, e somente se, $d(B, F_1) = d(B, F_2) = a$. Logo, pelo teorema de Pitágoras, $\ell' \cap \mathcal{E}$ consiste de dois pontos, B_1 e B_2, em ℓ', que distam $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ do centro C da elipse.

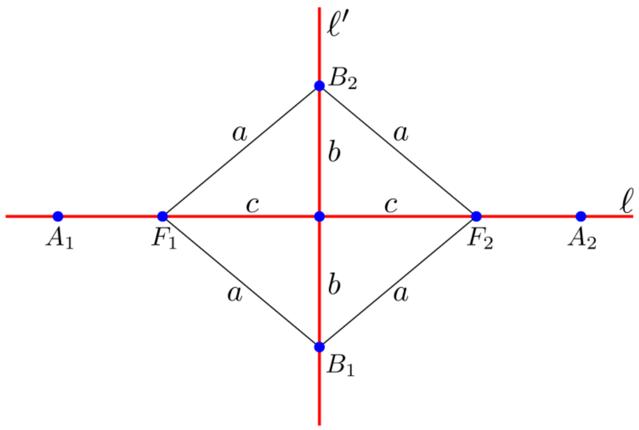

Figura 5: Posicionamento dos focos, centro e vértices da elipse nas retas focal e não focal.

• O segmento B_1B_2 é denominado **eixo não focal** da elipse e seu comprimento é $2b$, onde $b^2 = a^2 - c^2$.

• O número $e = \dfrac{c}{a}$ é denominado **excentricidade** da elipse. Note que $0 < e < 1$.

• O número a é a distância do centro aos vértices sobre a reta focal, b é a distância do centro aos vértices sobre a reta não focal e c é a distância do centro aos focos.

Observação 1

A elipse $\mathcal{E}$ é simétrica em relação à reta focal, à reta não focal e ao centro.

De fato, se $P \in \mathcal{E}$ e P' é o simétrico de P em relação à reta focal, então:

$$\triangle F_2PQ \equiv \triangle F_2P'Q \qquad \text{e} \qquad \triangle F_1PQ \equiv \triangle F_1P'Q\,.$$

Em particular, $|F_1P| = |F_1P'|$ e $|F_2P| = |F_2P'|$. Logo,

$$2a = d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(P', F_1) + d(P', F_2) \Longrightarrow P' \in \mathcal{E}\,.$$

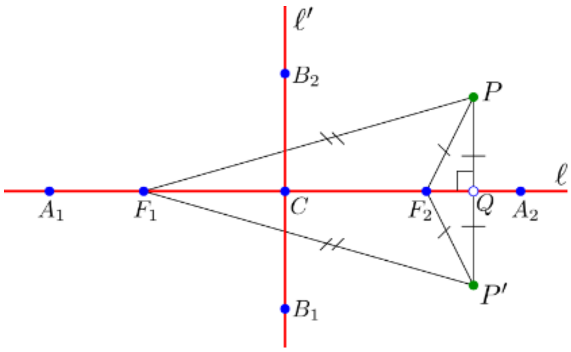

Figura 6: Simetria da elipse em relação à reta focal.

Se $P \in \mathcal{E}$ e P'' é o simétrico de P em relação ao centro, então:

$$\triangle PCF_2 \equiv \triangle P''CF_1 \qquad \text{e} \qquad \triangle F_1CP \equiv \triangle F_2CP''\,.$$

Em particular, $|F_1P| = |F_2P''|$ e $|F_2P| = |F_1P''|$. Portanto,

$$2a = d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(P'', F_2) + d(P'', F_1) \Longrightarrow P'' \in \mathcal{E}\,.$$

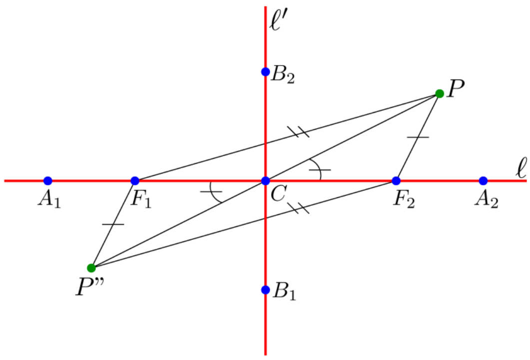

Figura 7: Simetria da elipse em relação ao centro.

A simetria em relação à reta não focal se verifica de maneira análoga, usando congruência de triângulos.

2. Forma canônica da elipse

Vamos obter a equação da elipse em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY para alguns casos especiais.

2.1 Elipse com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX

Neste caso, $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$, $A_1 = (-a, 0)$, $A_2 = (a, 0)$, $B_1 = (0, -b)$ e $B_2 = (0, b)$. Logo,

$$
\begin{aligned}
& P = (x, y) \in \mathcal{E} \Longleftrightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \\
\Longleftrightarrow\ & \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \\
\Longleftrightarrow\ & \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
\Longleftrightarrow\ & (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\
\Longleftrightarrow\ & x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \\
\Longleftrightarrow\ & 4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
\Longleftrightarrow\ & a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
\Longleftrightarrow\ & (a^2 - cx)^2 = a^2((x-c)^2 + y^2) \\
\Longleftrightarrow\ & a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) \\
\Longleftrightarrow\ & (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 = a^2(a^2 - c^2) \\
\Longleftrightarrow\ & b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \\
\Longleftrightarrow\ & \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}
\end{aligned}
$$

Forma canônica da elipse de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX.

2.2 Esboço da Elipse

Como $\dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{a^2 - x^2}{a^2}$, temos que $y = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Consideremos o gráfico da função $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [0, a]$. Para $x = 0$ e $x = a$, temos $y = b$ e $y = 0$, respectivamente.

É fácil verificar que a função é decrescente, pois:

$$
\begin{aligned}
& x < \overline{x} \Longleftrightarrow x^2 < \overline{x}^2 \Longleftrightarrow a^2 - x^2 > a^2 - \overline{x}^2 \\
& \Longleftrightarrow y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} > \overline{y} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \overline{x}^2},
\end{aligned}
$$

para quaisquer $x, \bar{x} \in [0, a]$.

Para esboçarmos o gráfico da função, precisamos saber também que a função $y = b/a\sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [0, a]$ é côncava (isto é, dados dois pontos sobre o gráfico, os pontos do gráfico ficam acima dos pontos do segmento que liga estes pontos). Uma maneira de provar tal afirmação, para os alunos que já tenham estudado derivada, é calcular a derivada segunda

$$y'' = -\frac{ba}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$$

e observar que esta derivada é negativa para todo $x \in (0, a)$.

O gráfico da função é, portanto, da forma:

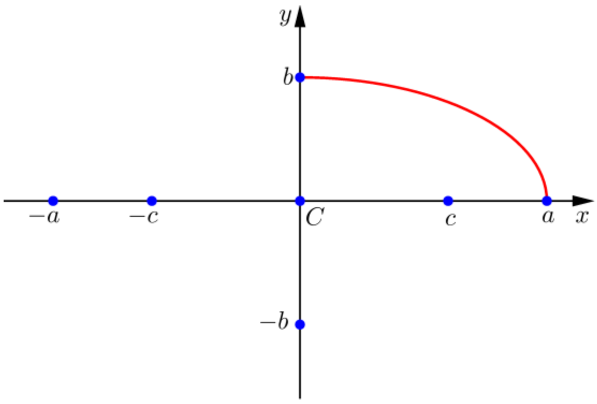

Figura 8: Gráfico da função $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [0, a]$.

Como a elipse é simétrica em relação ao eixo$-OX$ (reta focal) e ao eixo$-OY$ (reta não focal), seu gráfico tem a forma:

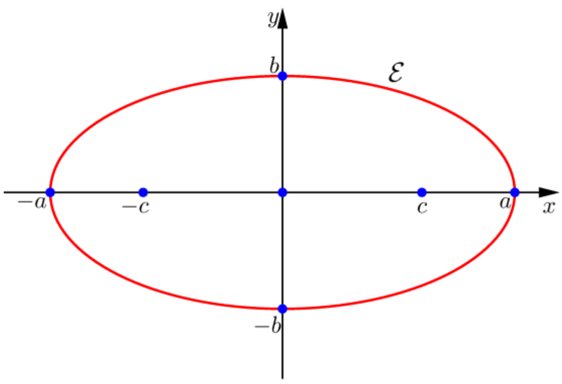

Figura 9: Gráfico da elipse $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2.3 Elipse com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY

Neste caso, $F_1 = (0, -c)$, $F_2 = (0, c)$, $A_1 = (0, -a)$, $A_2 = (0, a)$, $B_1 = (-b, 0)$ e $B_2 = (b, 0)$.

Desenvolvendo como no caso anterior, podemos verificar que a equação da elipse é:

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$

Forma canônica da elipse de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY.

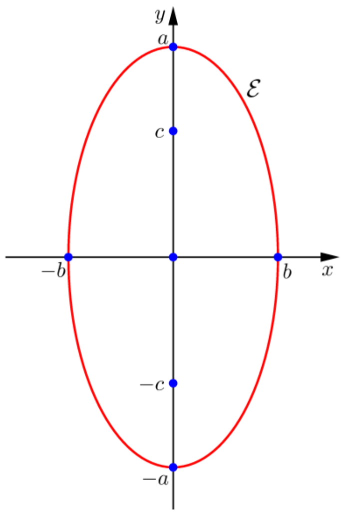

Figura 10: Elipse $\mathcal{E} : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

Exemplo 1

Os vértices de uma elipse são os pontos $(4, 0)$ *e* $(-4, 0)$ *e seus focos são os pontos* $(3, 0)$ *e* $(-3, 0)$. *Determine a equação da elipse.*

Solução.

Como $F_1 = (-3, 0)$ e $F_2 = (3, 0)$, a reta focal é o eixo$-OX$ e $A_1 = (-4, 0)$, $A_2 = (4, 0)$ são os vértices sobre a reta focal ℓ.

Então, $C = \dfrac{F_1 + F_2}{2} = \dfrac{A_1 + A_2}{2} = (0, 0)$ é o centro da elipse, $a = d(C, A_1) = d(C, A_2) = 4$, $c = d(C, F_1) = d(C, F_2) = 3$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} =$

$\sqrt{16-9} = \sqrt{7}$.

Logo, a equação da elipse é $\quad \mathcal{E} : \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{7} = 1$. □

Exemplo 2

Dois vértices de uma elipse $\mathcal{E}$ são os pontos $(0, 6)$ e $(0, -6)$ e seus focos são os pontos $(0, 4)$ e $(0, -4)$. Determine a equação da elipse $\mathcal{E}$.

Solução.

Temos $F_1 = (0, -4)$ e $F_2 = (0, 4)$. Então, a reta focal (que contém os focos) é o eixo OY, os vértices sobre a reta focal são $A_1 = (0, -6)$ e $A_2 = (0, 6)$, e o centro da elipse $\mathcal{E}$ é a origem, pois $C = \dfrac{(0, 4) + (0, -4)}{2} = (0, 0)$. Como $a = d(C, A_1) = 6$ e $c = d(C, F_1) = 4$, temos que $b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20$.

Portanto, a equação da elipse é $\quad \mathcal{E} : \dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{36} = 1$. □

Exemplo 3

Os focos de uma elipse são os pontos $(2, 0)$ e $(-2, 0)$ e sua excentricidade é $\dfrac{2}{3}$. Determine a equação da elipse.

Solução.

Temos que a reta focal é o eixo OX, o centro da elipse é a origem $C = (0, 0)$, $c = d(C, F_1) = 2$ e $e = \dfrac{2}{3} = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2}{a} \Longrightarrow a = 3$. Logo, $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$ e $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$ é a equação da elipse. □

Exemplo 4

Uma elipse $\mathcal{E}$ tem seu centro na origem e um de seus vértices sobre a reta focal é $(0, 7)$. Se a elipse passa pelo ponto $\left(\sqrt{5}, \dfrac{14}{3}\right)$, determine sua equação, seus vértices, seus focos e sua excentricidade. Faça também um esboço da elipse.

Solução.

A reta focal, que contém o centro e o vértice dado, é o eixo OY. A distância do centro $C = (0,0)$ ao vértice $A_2 = (0,7)$ é $a = d(C, A_2) = 7$ e o outro vértice na reta focal é $A_1 = (0,-7)$.

Logo, a equação da elipse $\mathcal{E}$ é da forma:

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad \text{ou seja,} \quad \mathcal{E} : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{7^2} = 1\,.$$

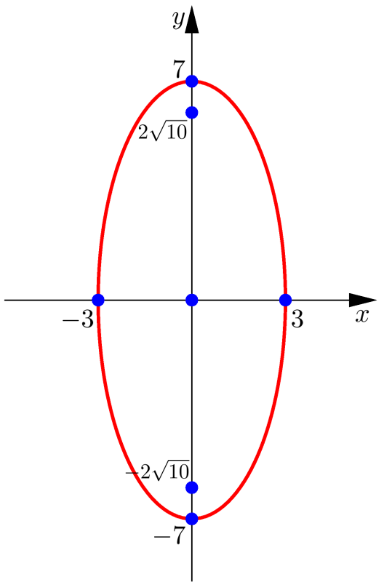

Figura 11: Gráfico da elipse $\mathcal{E} : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$.

Como $\left(\sqrt{5}, \frac{14}{3}\right) \in \mathcal{E}$, temos:

$$\frac{\left(\sqrt{5}\right)^2}{b^2} + \frac{\left(\frac{14}{3}\right)^2}{49} = 1\,, \qquad \text{ou seja,} \qquad \frac{5}{b^2} + \frac{2^2\,7^2}{3^2\,7^2} = 1.$$

Então, $\frac{5}{b^2} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \Longleftrightarrow b^2 = 9$, e a equação da elipse é:

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1.$$

Como a reta não focal é o eixo OX e $b = 3$, os vértices na reta não focal são $B_1 = (-3,0)$ e $B_2 = (3,0)$.

Temos também que $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{49 - 9} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$. Logo, os focos são $F_1 = (0, -2\sqrt{10})$ e $F_2 = (0, 2\sqrt{10})$.

Finalmente, a excentricidade de $\mathcal{E}$ é $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2\sqrt{10}}{7}$. $\square$

3. Translação dos eixos coordenados

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais e seja $\overline{O} = (x_0, y_0)$ um ponto no plano.

Seja $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$ o sistema cujos eixos $\overline{O}\,\overline{X}$ e $\overline{O}\,\overline{Y}$ são paralelos aos eixos OX e OY e têm, respectivamente, o mesmo sentido que estes eixos.

Sejam $(\overline{x}, \overline{y})$ as coordenadas do ponto P no sistema de eixos $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$ e (x, y) as coordenadas de P no sistema de eixos OXY.

Então, as coordenadas do ponto P nos sistemas OXY e $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$ são relacionadas por:

$$\boxed{\begin{cases} x = \overline{x} + x_0 \\ y = \overline{y} + y_0 \end{cases}}$$

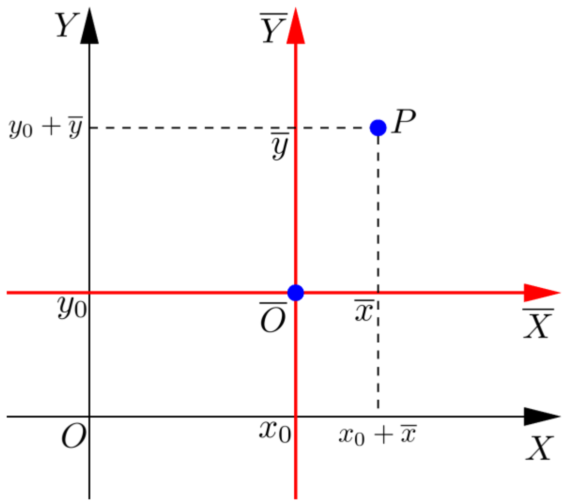

Figura 12: Ponto $P = (\overline{x}, \overline{y})_{\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}} = (x_0 + \overline{x}, y_0 + \overline{y})_{OXY}$.

Exemplo 5

Faça um esboço da curva

$$x^3 - 3x^2 - y^2 + 3x + 4y - 5 = 0\,.$$

Para isso, escreva a equação nas coordenadas $\overline{x}$ *e* $\overline{y}$ *do sistema de eixos* $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$*, obtido quando o sistema* OXY *é transladado para a origem* $\overline{O} = (1, 2)$.

Solução.
Fazendo $x = \overline{x} + 1$ e $y = \overline{y} + 2$ na equação dada, obtemos:

$$(\overline{x}+1)^3 - 3(\overline{x}+1)^2 - (\overline{y}+2)^2 + 3(\overline{x}+1) + 4(\overline{y}+2) - 5 = 0\,.$$

Simplificando esta identidade, temos $\overline{x}^3 = \overline{y}^2$.

Então, $\overline{y} = \pm\overline{x}^{3/2}$ e $\overline{x} \geq 0$.

Fazer agora o esboço da curva é bem mais simples.

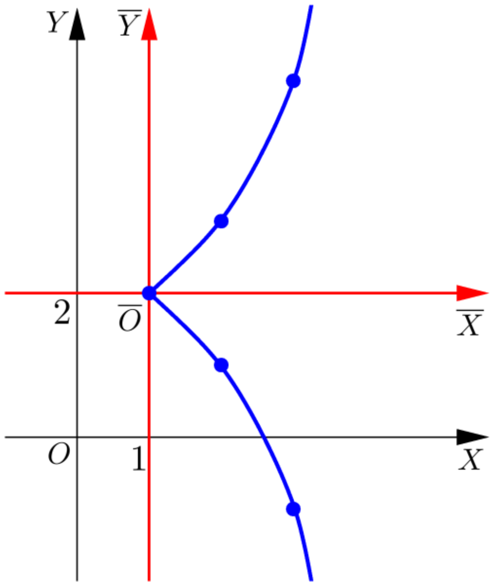

Figura 13: Gráfico da curva $x^3 - 3x^2 - y^2 + 3x + 4y - 5 = 0$.

□

4. Elipse com centro no ponto $\overline{O} = (x_0, y_0)$

• Caso I. Reta focal paralela ao eixo OX

Como o centro $\overline{O} = (x_0, y_0)$ pertence à reta focal, temos que $\ell : y = y_0$ é a equação cartesiana da reta focal.

Além disso, como $d(F_1, \overline{O}) = d(F_2, \overline{O}) = c$, onde F_1 e F_2 são os focos da elipse, temos que $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$.

Seja $P = (x, y) = (\overline{x} + x_0, \overline{y} + y_0)$ um ponto pertencente à elipse, onde x, y são suas coordenadas no sistema OXY e $\overline{x}$, $\overline{y}$ são suas coordenadas no sistema $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$, sendo este obtido quando o sistema OXY é transladado para a origem $\overline{O} = (x_0, y_0)$.

Então, P pertence à elipse se, e somente se,

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\,,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&\iff d((\overline{x}+x_0, \overline{y}+y_0), (x_0-c, y_0)) + d((\overline{x}+x_0, \overline{y}+y_0), (x_0+c, y_0)) = 2a \\
&\iff d((\overline{x}, \overline{y}), (-c, 0)) + d((\overline{x}, \overline{y}), (c, 0)) = 2a \\
&\iff \frac{\overline{x}^2}{a^2} + \frac{\overline{y}^2}{b^2} = 1 \iff \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1\,.
\end{aligned}$$

Logo, **a forma canônica da equação da elipse com centro no ponto (x_0, y_0) e eixo focal paralelo ao eixo OX é:**

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1\,, \quad \text{onde} \quad b^2 = a^2 - c^2}$$

Os focos são $F_1 = (x_0-c, y_0)$ e $F_2 = (x_0+c, y_0)$; a reta focal é $\ell : y = y_0$; os vértices sobre a reta focal são $A_1 = (x_0-a, y_0)$ e $A_2 = (x_0+a, y_0)$; a reta não focal é $\ell' : x = x_0$ e os vértices sobre a reta não focal são $B_1 = (x_0, y_0-b)$ e $B_2 = (x_0, y_0+b)$.

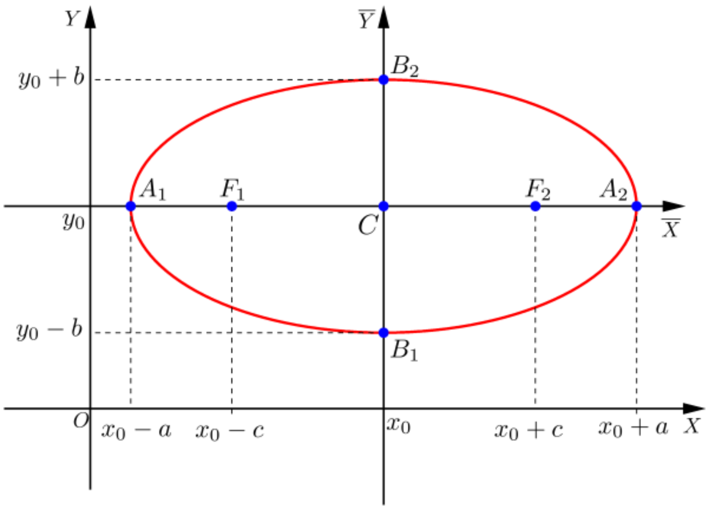

Figura 14: Gráfico da elipse $\mathcal{E} : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1\,.$

• Caso II. Reta focal paralela ao eixo OY

Procedendo de maneira análoga ao caso anterior, verifica-se que **a forma canônica da equação da elipse com centro no ponto (x_0, y_0) e eixo focal paralelo ao eixo OY é:**

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1\,, \qquad \text{onde} \qquad b^2 = a^2 - c^2}$$

Neste caso, os focos são $F_1 = (x_0, y_0 - c)$ e $F_2 = (x_0, y_0 + c)$; a reta focal é $\ell : x = x_0$; os vértices sobre a reta focal são $A_1 = (x_0, y_0 - a)$ e $A_2 = (x_0, y_0 + a)$; a reta não focal é $\ell' : y = y_0$ e os vértices sobre a reta não focal são $B_1 = (x_0 - b, y_0)$ e $B_2 = (x_0 + b, y_0)$.

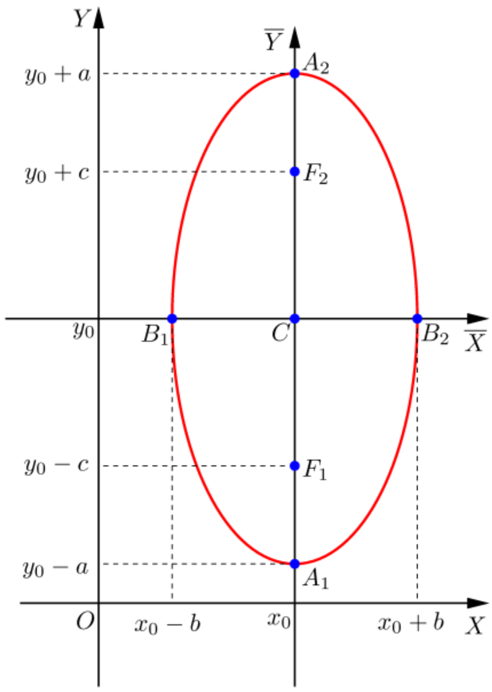

Figura 15: Gráfico da elipse $\mathcal{E} : \frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$.

Exemplo 6

Os focos de uma elipse $\mathcal{E}$ são $(3, 8)$ e $(3, 2)$, e o comprimento do seu eixo não focal é 8. Determine a equação da elipse $\mathcal{E}$, os seus vértices e a sua excentricidade.

Solução.

Como $F_1 = (3, 2)$ e $F_2 = (3, 8)$ são os focos da elipse, a reta focal de $\mathcal{E}$ é $\ell : x = 3$ (paralela ao eixo OY) e o centro de $\mathcal{E}$ é $C = \dfrac{F_1 + F_2}{2} = (3, 5)$. Além disso, $2b = 8$, isto é, $b = 4$, $c = d(C, F_1) = d(C, F_2) = 3$ e $a^2 = b^2 + c^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$, isto é, $a = 5$. Portanto, $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{5}$; $A_1 = (3, 0)$ e $A_2 = (3, 10)$ são os vértices de $\mathcal{E}$ sobre a reta focal; $\ell' : y = 5$ é a reta não focal; $B_1 = (-1, 5)$ e $B_2 = (7, 5)$ são os vértices de $\mathcal{E}$ sobre a reta não focal e

$$\mathcal{E} : \frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$$

é a equação da elipse. □

Exemplo 7

A equação de uma elipse é $\mathcal{E} : x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 6 = 0$. Determine a equação da elipse na forma canônica, o seu centro, os seus vértices, os seus focos e a sua excentricidade.

Solução.

Completando os quadrados na equação de $\mathcal{E}$, temos:

$$\mathcal{E} : (x^2 + 2x) + 4(y^2 - 3y) = -6$$

$$\mathcal{E} : (x^2 + 2x + 1) + 4\left(y^2 - 3y + \frac{9}{4}\right) = -6 + 1 + 4 \times \frac{9}{4} = 4$$

$$\mathcal{E} : (x+1)^2 + 4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 4$$

$$\mathcal{E} : \frac{(x+1)^2}{4} + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 1\,,$$

sendo esta última equação a forma canônica de $\mathcal{E}$. Desta equação, obtemos que o centro da elipse é $C = \left(-1, \dfrac{3}{2}\right)$, $a = 2$, $b = 1$ e, portanto, $c^2 = a^2 - b^2 = 2^2 - 1^2 = 3$, ou seja, $c = \sqrt{3}$.

A reta focal de $\mathcal{E}$ é $\ell : y = \dfrac{3}{2}$, paralela ao eixo OX, e a reta não focal é $\ell' : x = -1$, paralela ao eixo$-OY$.

Os focos da elipse são $F_1 = \left(-1-\sqrt{3}, \dfrac{3}{2}\right)$ e $F_2 = \left(-1+\sqrt{3}, \dfrac{3}{2}\right)$; os vértices sobre a reta focal são $A_1 = \left(-1-2, \dfrac{3}{2}\right) = \left(-3, \dfrac{3}{2}\right)$ e $A_2 = \left(-1+2, \dfrac{3}{2}\right) = \left(1, \dfrac{3}{2}\right)$ e os vértices sobre a reta não focal são $B_1 = \left(-1, \dfrac{3}{2}-1\right) = \left(-1, \dfrac{1}{2}\right)$ e $B_2 = \left(-1, \dfrac{3}{2}+1\right) = \left(-1, \dfrac{5}{2}\right)$.

Finalmente, a excentricidade de $\mathcal{E}$ é $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. □

5. Equação do segundo grau com $B = 0$ e $AC > 0$

Consideremos a equação da elipse $\mathcal{E}$ de centro no ponto (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo OX:

$$\mathcal{E} : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1\,.$$

Desenvolvendo a equação acima, obtemos:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2x_0x - 2a^2y_0y + b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0\,,$$

que é da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\,,$$

onde $A = b^2$, $B = 0$, $C = a^2$, $D = -2b^2x_0$, $E = -2a^2y_0$ e $F = b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2$.

Então, **$B = 0$ e A e C têm o mesmo sinal**. O mesmo vale para a equação da elipse com centro no ponto (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo OY.

Reciprocamente, temos:

Proposição 1

Se os coeficientes A e C da equação do segundo grau

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1}$$

têm o mesmo sinal, então a equação representa:

- *uma elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados;*

ou

- *um ponto;*

ou

- *o conjunto vazio.*

Prova.
Dividindo a equação (1) por AC, obtemos:

$$\frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{A} + \frac{D}{AC}x + \frac{E}{AC}y + \frac{F}{AC} = 0\,,$$

ou seja,

$$\frac{x^2 + \frac{D}{A}x}{C} + \frac{y^2 + \frac{E}{C}y}{A} = -\frac{F}{AC}\,.$$

Completando os quadrados, temos:

$$\frac{x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2}}{C} + \frac{y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{E^2}{4C^2}}{A} = -\frac{F}{AC} + \frac{D^2}{4A^2C} + \frac{E^2}{4AC^2}\,.$$

Isto é,

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{C} + \frac{\left(y^2 + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} = \frac{C^2D^2 + ACE^2 - 4AFC^2}{4A^2C^3} = \frac{M}{4A^2C^3} \qquad (2)$$

onde $M = C^2D^2 + ACE^2 - 4AFC^2$.

Se $M = 0$, a equação (2) representa o ponto $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$, pois A e C têm o mesmo sinal.

Se $M \neq 0$, podemos escrever a equação (2) na forma:

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{M}{4A^2C^2}} + \frac{\left(y^2 + \frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{M}{4ACC^2}} = 1. \qquad (3)$$

Como $AC > 0$, a equação (3) representa uma elipse de eixos paralelos aos eixos coordenados e centro no ponto $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$, se $M > 0$.

Se $M < 0$, a equação (3) representa o conjunto vazio, pois $\frac{M}{4A^2C^2} < 0$ e

$\dfrac{M}{4ACC^2} < 0$. ■

Os casos em que a equação do segundo grau $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F = 0$, com $AC > 0$, representa um ponto ou o conjunto vazio são denominados **casos degenerados da elipse**.

Exemplo 8

Determine se as equações abaixo representam uma elipse ou uma elipse degenerada. Caso seja uma elipse, determine seus principais elementos.

(a) $25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$.

Solução.

Como $25x^2+9y^2 = 225$, *obtemos, dividindo por* 225, *que a equação* $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25} = 1$ *representa uma elipse com:*

- $a = 5$, $b = 3$ *e* $c = \sqrt{25-9} = 4$;
- *centro:* $C = (0,0)$;
- *reta focal:* $\ell = \text{eixo} - OY : x = 0$;
- *reta não focal:* $\ell' = \text{eixo} - OX : y = 0$;
- *vértices sobre a reta focal:* $A_1 = (0,-5)$ *e* $A_2 = (0,5)$;
- *vértices sobre a reta não focal:* $B_1 = (-3,0)$ *e* $B_2 = (3,0)$;
- *focos:* $F_1 = (0,-4)$ *e* $F_2 = (0,4)$. □

(b) $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$.

Solução.

Completando os quadrados, obtemos:

$$\begin{aligned}
& 4(x^2 - 10x) + 9(y^2 + 4y) = -100 \\
\iff\ & 4(x^2 - 10x + 25) + 9(y^2 + 4y + 4) = -100 + 4 \times 25 + 9 \times 4 \\
\iff\ & 4(x-5)^2 + 9(y+2)^2 = 36 \\
\iff\ & \frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1\,.
\end{aligned}$$

Logo, a equação representa uma elipse com:

- $a = 3$, $b = 2$ *e* $c = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$;
- *centro:* $C = (5,-2)$;

- *reta focal:* $\ell : y = -2$, *paralela ao eixo*$-OX$;
- *reta não focal:* $\ell' : x = 5$, *paralela ao eixo*$-OY$;
- *vértices sobre a reta focal:* $A_1 = (2, -2)$ *e* $A_2 = (8, -2)$;
- *vértices sobre a reta não focal:* $B_1 = (5, -4)$ *e* $B_2 = (5, 0)$;
- *focos:* $F_1 = (5 - \sqrt{5}, -2)$ *e* $F_2 = (5 + \sqrt{5}, -2)$. $\square$

(c) $36x^2 + 9y^2 - 108x + 6y + 82 = 0$.

Solução.
Completando os quadrados, obtemos:

$$\begin{aligned}
& 36(x^2 - 3x) + 9\left(y^2 + \frac{6}{9}y\right) = -82 \\
\iff\quad & 36\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + 9\left(y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}\right) = -82 + 36 \times \frac{9}{4} + 9 \times \frac{1}{9} \\
\iff\quad & 36\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 9\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = -82 + 81 + 1 \\
\iff\quad & 36\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 9\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = 0\,.
\end{aligned}$$

Assim, apenas o ponto $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ *satisfaz à equação dada, isto é, a equação representa um ponto.* $\square$

(d) $9x^2 + 4y^2 + 18x - 9y + 25 = 0$.

Solução.
Completando os quadrados, obtemos:

$$\begin{aligned}
& 9(x^2 + 2x) + 4\left(y^2 - \frac{9}{4}y\right) = -25 \\
\iff\quad & 9(x^2 + 2x + 1) + 4\left(y^2 - \frac{9}{4}y + \frac{81}{64}\right) = -25 + 9 \times 1 + 4 \times \frac{81}{64} \\
\iff\quad & 9(x+1)^2 + 4\left(y - \frac{9}{8}\right)^2 = -16 + \frac{81}{16} = -\frac{175}{16}\,.
\end{aligned}$$

Como $-\frac{175}{16} < 0$, *nenhum ponto do plano satisfaz à equação, isto é, a equação representa o conjunto vazio.* $\square$

Capítulo 15

Hipérbole

1. Hipérbole

Definição 1

Uma **hipérbole** $\mathcal{H}$ de **focos** F_1 e F_2 é o conjunto do plano que consiste de todos os pontos P tais que o módulo da diferença das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, menor do que a distância entre os focos $2c > 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathcal{H} = \{\, P \,|\, |\, d(P, F_1) - d(P, F_2)\,| = 2a \,\} \\ 0 < a < c\,; \quad d(F_1, F_2) = 2c \end{array}}$$

Terminologia

- Os pontos F_1 e F_2 são os **focos** da hipérbole.
- A reta ℓ que contém os focos é a **reta focal**(ver figura 1.).

Figura 1: Reta focal da hipérbole.

- A interseção da hipérbole com a reta focal ℓ consiste de exatamente dois pontos, A_1 e A_2, chamados **vértices** da hipérbole.

Observemos primeiro que, se $P \in \ell - F_1F_2$ então $P \notin \mathcal{H}$. De fato, se P pertence à semirreta de origem F_1 que não contém F_2 e $d(P, F_1) = x$, então $P \notin \mathcal{H}$, pois:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = |x - (x + 2c)| = 2c > 2a.$$

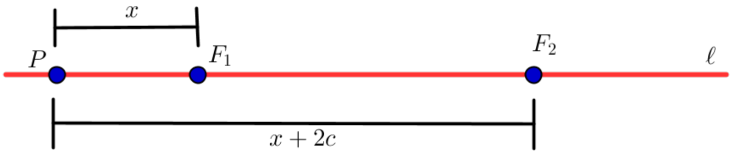

Figura 2: Posicionamento dos vértices em relação aos focos da hipérbole na reta focal.

E, se P pertence à semirreta de origem F_2 que não contém F_1 e $d(P, F_1) = x$, então $P \notin \mathcal{H}$, pois:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = |(x + 2c) - x| = 2c > 2a.$$

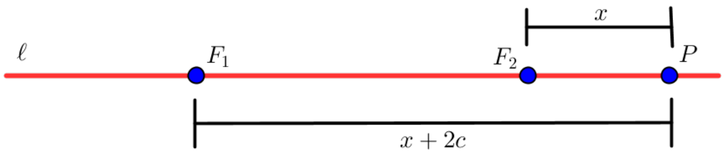

Figura 3: Posicionamento dos vértices em relação aos focos da hipérbole na reta focal.

Seja $A_1 \in F_1F_2 \cap \mathcal{H}$ tal que $d(A_1, F_1) = x$ e $0 < x < c$.

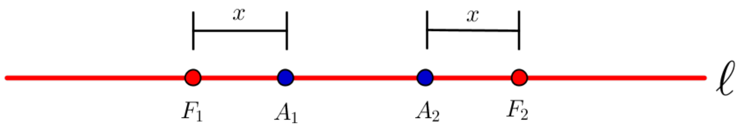

Figura 4: Posicionamento dos vértices em relação aos focos da hipérbole na reta focal.

Como $d(F_1, F_2) = 2c$, temos:

$$\begin{aligned} |d(A_1, F_1) - d(A_1, F_2)| = 2a \iff & |x - (2c - x)| = 2a \iff |2x - 2c| = 2a \\ \iff & 2c - 2x = 2a \iff x = c - a\,. \end{aligned}$$

Logo, o ponto A_1 de F_1F_2, distante $c - a$ de F_1, pertence à hipérbole.

Analogamente, o ponto A_2 de F_1F_2, distante $c - a$ de F_2, pertence à hipérbole $\mathcal{H}$.

• O segmento A_1A_2 é denominado **eixo focal** da hipérbole e seu comprimento é $d(A_1, A_2) = 2a$.

• O ponto médio C do eixo focal A_1A_2 é o **centro** da hipérbole. Este ponto é também o ponto médio do segmento F_1F_2 delimitado pelos focos: $C = \dfrac{A_1 + A_2}{2} = \dfrac{F_1 + F_2}{2}$.

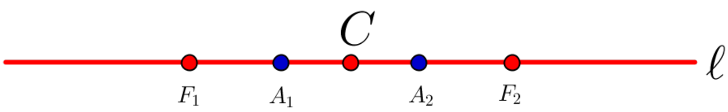

Figura 5: Posicionamento dos focos, vértices e centro da hipérbole na reta focal.

Observe que $d(C, F_1) = d(C, F_2) = c$ e $d(C, A_1) = d(C, A_2) = a$.

• A reta ℓ' que passa pelo centro C e é perpendicular à reta focal ℓ é a **reta não focal** da hipérbole. Como ℓ' é a mediatriz do segmento F_1F_2, a hipérbole não intersecta a reta não focal ℓ', pois, se $P \in \ell'$, temos:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 0 \neq 2a.$$

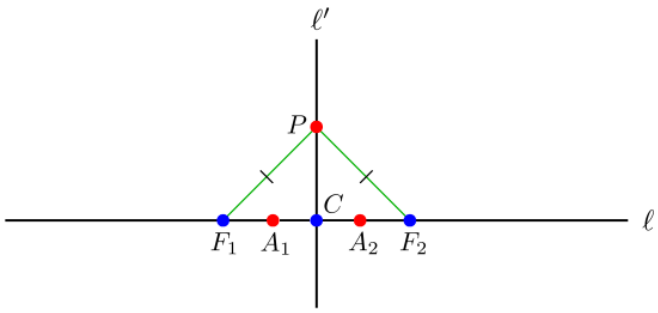

Figura 6: Pontos do eixo não focal não pertencem à hipérbole.

• O segmento B_1B_2 perpendicular ao eixo focal que tem C como ponto médio e comprimento $2b$, onde $b^2 = c^2 - a^2$, é denominado **eixo não focal** da hipérbole, e B_1 e B_2 são os vértices imaginários da hipérbole.

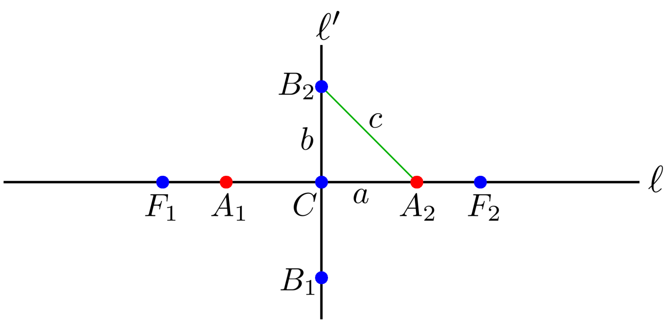

Figura 7: Relação dos comprimentos a, b e c.

• O número $e = \dfrac{c}{a}$ é chamado **excentricidade** da hipérbole. Note que $e > 1$, pois $c > a$.

• O **retângulo de base** da hipérbole $\mathcal{H}$ é o retângulo que tem os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2 como pontos médios de seus lados, e as retas que contêm as diagonais do retângulo de base da hipérbole $\mathcal{H}$ são as **assíntotas** de $\mathcal{H}$.

Portanto, geometricamente, as assíntotas da hipérbole $\mathcal{H}$ são as retas que passam pelo centro da hipérbole e tem inclinação $\pm\dfrac{b}{a}$ em relação à reta focal.

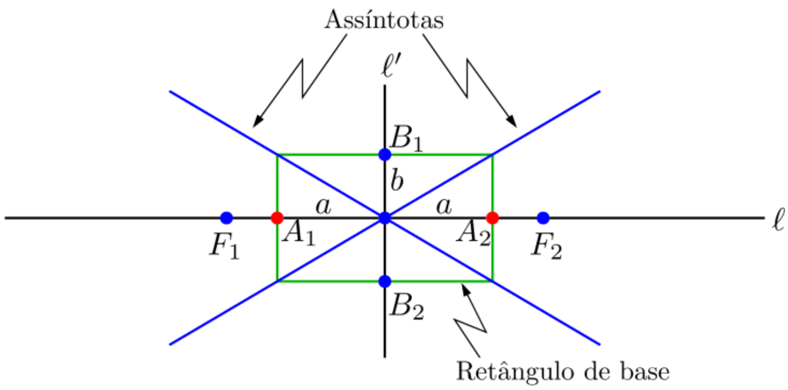

Figura 8: Retângulo de base e assíntotas da hipérbole $\mathcal{H}$.

Pelo teorema de Pitágoras, as diagonais do retângulo de base da hipérbole $\mathcal{H}$ têm comprimento $2c$, e a distância do centro de $\mathcal{H}$ a qualquer vértice do retângulo de base é igual a c.

• Dizemos que uma hipérbole é **equilátera**, se o comprimento do eixo focal for igual ao comprimento do eixo não focal, isto é, $a = b$.

O retângulo de base de uma hipérbole equilátera é, na realidade, um quadrado. Em particular, as retas que contêm as suas diagonais, isto é, suas assíntotas, intersectam-se perpendicularmente.

• Duas hipérboles cujo eixo focal de cada uma é igual ao eixo não focal da outra são denominadas **hipérboles conjugadas**. Como os retângulos de base de duas hipérboles conjugadas são iguais, elas têm o mesmo centro, mesmas assíntotas e os focos a uma mesma distância do centro.

Observação 1

1. A hipérbole $\mathcal{H}$ é simétrica em relação à reta focal, à reta não focal e ao centro.

De fato, se $P \in \mathcal{H}$ e P' é o simétrico de P em relação à reta focal, então

$$\triangle F_2PQ \equiv \triangle F_2P'Q \qquad \text{e} \qquad \triangle F_1PQ \equiv \triangle F_1P'Q\,.$$

Em particular, $|F_2P| = |F_2P'|$ e $|F_1P| = |F_1P'|$. Logo,

$$2a = |d(P,F_1) - d(P,F_2)| = |d(P',F_1) - d(P',F_2)| \Longrightarrow P' \in \mathcal{H}\,.$$

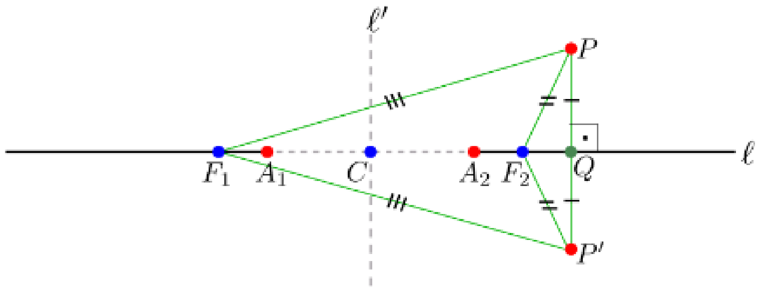

Figura 9: Simetria da hipérbole em relação à reta focal.

Se $P \in \mathcal{H}$ e P'' é o simétrico de P em relação ao centro, então:

$$\triangle PCF_2 \equiv \triangle P''CF_1 \qquad \text{e} \qquad \triangle F_1CP \equiv \triangle F_2CP''\,.$$

Em particular, $|F_2P| = |F_1P''|$ e $|F_1P| = |F_2P''|$. Logo,

$$2a = |d(P,F_1) - d(P,F_2)| = |d(P'',F_2) - d(P'',F_1)| \Longrightarrow P'' \in \mathcal{H}\,.$$

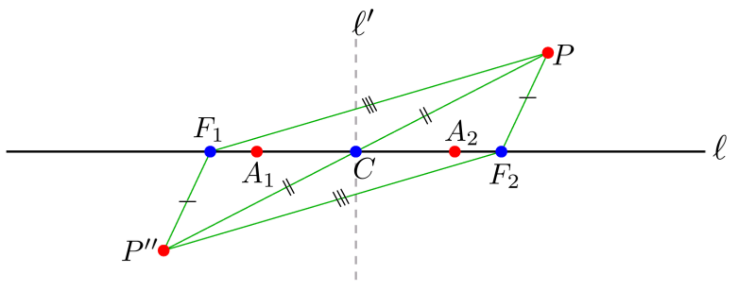

Figura 10: Simetria da hipérbole em relação ao centro.

A simetria em relação à reta não focal se verifica de maneira análoga, usando congruência de triângulos.

2. Forma canônica da hipérbole

Vamos obter a equação da hipérbole em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY em alguns casos especiais.

2.1 Hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX

Neste caso, $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$, $A_1 = (-a, 0)$, $A_2 = (a, 0)$, $B_1 = (0, -b)$ e $B_2 = (0, b)$. Logo,

$$P = (x, y) \in \mathcal{H} \iff |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

$$\iff \begin{cases} d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a & \text{(ramo direito de } \mathcal{H}) \\ \text{ou} \\ d(P, F_1) - d(P, F_2) = -2a & \text{(ramo esquerdo de } \mathcal{H}) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a & \text{(ramo direito de } \mathcal{H}) \\ \text{ou} \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -2a & \text{(ramo esquerdo de } \mathcal{H}). \end{cases}$$

Continuando o desenvolvimento de maneira análoga ao caso da elipse, e lembrando que $b^2 = c^2 - a^2$, chegamos à conclusão que

$$P = (x, y) \in \mathcal{H} \iff (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \iff b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2\,.$$

Portanto, $P = (x, y) \in \mathcal{H}$ se, e somente se, as coordenadas x e y satisfazem à equação

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1},$$

chamada **forma canônica da equação da hipérbole de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo**$-OX$.

As assíntotas dessa hipérbole são as retas que passam pela origem (centro) e têm inclinação $\pm\frac{b}{a}$ em relação ao eixo$-OX$ (reta focal). Logo as assíntotas são as retas $y = \pm\frac{b}{a}\,x$, ou seja, $bx - ay = 0$ e $bx + ay = 0$.

2.2 Esboço da Hipérbole

Sendo $\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{x^2 - a^2}{a^2}$, temos que $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, onde $x \geq a$ ou $x \leq -a$.

Considere a função $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, $x \in [a, +\infty)$. Como $y = 0$ para $x = a$, y é crescente e côncava (verifique que $y' = \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}} > 0$ e $y'' = \frac{-ab}{(x^2 - a^2)^{3/2}} < 0$ para todo $x \in (a, +\infty)$), e o gráfico da função é da forma:

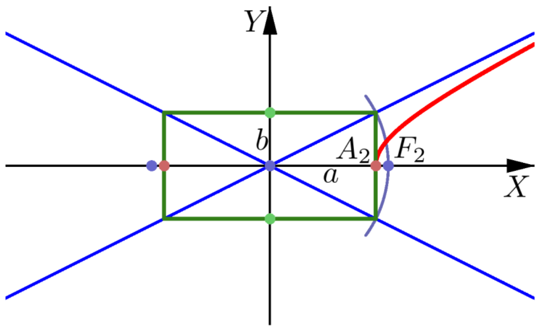

Figura 11: Gráfico da função $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, $x \in [a, +\infty]$.

Pela simetria da hipérbole em relação ao eixo$-OX$ (reta focal) e ao eixo$-OY$ (reta não focal), obtemos o seu gráfico:

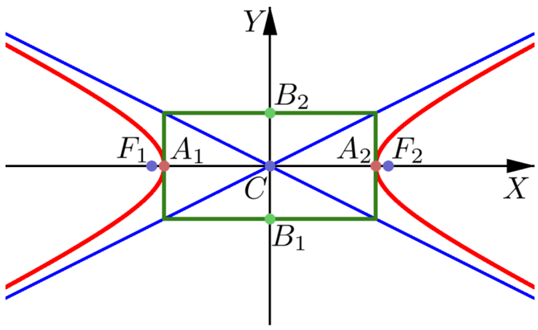

Figura 12: Gráfico da hipérbole $\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Podemos, agora, explicar o porquê do nome **assíntota** para as retas que contêm as diagonais do retângulo de base.

Sejam $P = (x, y)$ um ponto da hipérbole, isto é, $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, e

$r_+ : bx - ay = 0$ uma de suas assíntotas. Então,

$$\begin{aligned} d(P, r_+) &= \frac{|bx - ay|}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \frac{|bx - ay|}{\sqrt{b^2 + a^2}} \times \frac{|bx + ay|}{|bx + ay|} \\ &= \frac{|b^2x^2 - a^2y^2|}{\sqrt{b^2 + a^2}} \times \frac{1}{|bx + ay|} = \frac{a^2b^2}{\sqrt{b^2 + a^2}} \times \frac{1}{|bx + ay|}. \end{aligned}$$

Logo, $d(P, r_+) \to 0$, quando $x \to +\infty$ e $y \to +\infty$ ou $x \to -\infty$ e $y \to -\infty$.

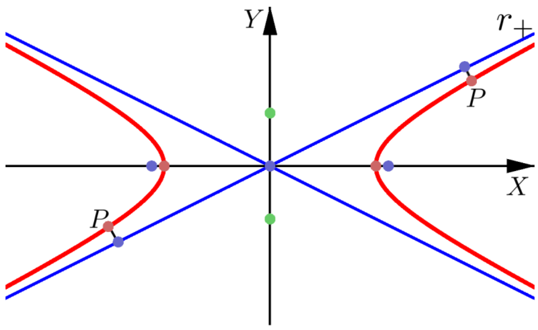

Figura 13: $d(P, r_+) \to 0$, quando $x \to \pm\infty$ e $y \to \pm\infty$.

De modo análogo, podemos verificar que $d(P, r_-) \to 0$, quando $x \to +\infty$ e $y \to -\infty$ ou $x \to -\infty$ e $y \to +\infty$, onde $P = (x, y) \in \mathcal{H}$ e $r_- : bx + ay = 0$ é a outra assíntota da hipérbole.

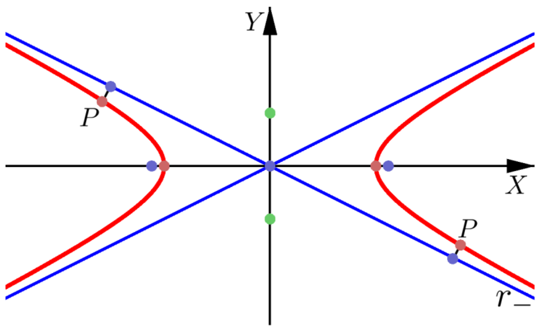

Figura 14: $d(P, r_+) \to 0$, quando $x \to \pm\infty$ e $y \to \mp\infty$.

2.3 Hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY

Neste caso, temos $F_1 = (0, -c)$, $F_2 = (0, c)$, $A_1 = (0, -a)$, $A_2 = (0, a)$, $B_1 = (-b, 0)$ e $B_2 = (b, 0)$.

Procedendo como no caso anterior, obtemos que a equação da hipérbole é:

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$ **Forma canônica da hipérbole de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo$-OY$.**

onde $b^2 = c^2 - a^2$. As assíntotas são as retas $x = \pm\dfrac{b}{a}y$, ou seja,

$$ax - by = 0 \qquad \text{e} \qquad ax + by = 0\,.$$

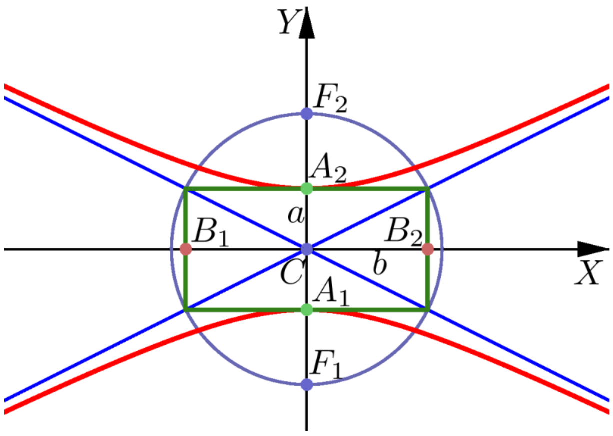

Figura 15: Hipérbole $\mathcal{H} : \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$.

Exemplo 1

Determine a equação da hipérbole equilátera com focos nos pontos $(-\sqrt{8}, 0)$ *e* $(\sqrt{8}, 0)$.

Solução.

Como $F_1 = (-\sqrt{8}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{8}, 0)$, o centro da hipérbole é $C = \dfrac{F_1 + F_2}{2} = (0, 0)$ e a reta focal é o eixo$-OX$. Sendo a hipérbole equilátera $(a = b)$, $c = \sqrt{8}$ e $c^2 = a^2 + b^2$, obtemos $8 = a^2 + a^2 = 2a^2$, isto é, $a^2 = 4$. Logo, $a = b = 2$ e

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$$

é a equação da hipérbole.

Além disso, $A_1 = (-2, 0)$ e $A_2 = (2, 0)$ são os vértices, $B_1 = (0, -2)$ e $B_2 = (0, 2)$ são os vértices imaginários e $y = \pm x$ são as assíntotas da hipérbole $\mathcal{H}$. $\square$

Exemplo 2

Mostre que a excentricidade de qualquer hipérbole equilátera é $\sqrt{2}$.

Solução.

Como $a = b$ e $c^2 = a^2 + b^2$, temos que $c^2 = 2a^2$, ou seja, $c = \sqrt{2}a$. Logo, $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}$. □

Exemplo 3

Os vértices de uma hipérbole são os pontos $(0, 3)$ *e* $(0, -3)$ *e um de seus focos é o ponto* $(0, 5)$*. Determine a equação da hipérbole, o comprimento do seu eixo focal e suas assíntotas.*

Solução.

A hipérbole tem centro $C = \dfrac{(0, 3) + (0, -3)}{2} = (0, 0)$, reta focal=eixo$-OY$, $c = d((0, 0), (0, 5)) = 5$, $a = d((0, 0), (0, 3)) = 3$ e $b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 9 = 16$. Então, $\mathcal{H} : \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{16} = 1$ é a equação da hipérbole, $x = \pm\dfrac{4}{3}y$ são as suas assíntotas e $2a = 6$ o comprimento do seu eixo focal. □

Exemplo 4

O centro de uma hipérbole é a origem, sua reta focal é um dos eixos coordenados e uma de suas assíntotas é a reta $2x - 5y = 0$*. Determine a equação da hipérbole* $\mathcal{H}$*, supondo que o ponto* $(4, 6) \in \mathcal{H}$.

Solução.

Como o centro é a origem e a reta focal (eixo$-OX$ ou eixo$-OY$) é uma bissetriz das assíntotas, a reta $2x + 5y = 0$ é a outra assíntota. Vamos analisar os dois casos possíveis.

- Reta focal = eixo$-OX$.

Neste caso, $\mathcal{H} : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ e $\dfrac{b}{a} = \dfrac{2}{5}$, isto é, $b = \dfrac{2}{5}a$. Como $(4, 6) \in \mathcal{H}$, temos que $\dfrac{16}{a^2} - \dfrac{36}{\frac{4a^2}{25}} = 1$, ou seja, $16 \times 4 - 25 \times 36 = 4a^2$, o que é um absurdo, pois $4a^2 > 0$ e $16 \times 4 - 25 \times 36 < 0$.

• Reta focal = eixo$-OY$.

Neste caso, $\mathcal{H} : \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ e $\dfrac{b}{a} = \dfrac{5}{2}$, isto é, $a = \dfrac{2}{5}b$. Como $(4,6) \in \mathcal{H}$, temos que $\dfrac{36}{\dfrac{4b^2}{25}} - \dfrac{16}{b^2} = 1$, ou seja, $36 \times 25 - 16 \times 4 = 4b^2$. Logo $b^2 = 9 \times 25 - 16 = 209$, $a^2 = \dfrac{836}{25}$ e

$$\mathcal{H} : \frac{y^2}{\frac{856}{25}} - \frac{x^2}{209} = 1$$

é a equação da hipérbole. $\square$

Exemplo 5

Determine a equação, os vértices, os focos e a excentricidade da hipérbole conjugada da hipérbole

$$9x^2 - 4y^2 = 36.$$

Solução.

A hipérbole $\mathcal{H} : 9x^2 - 4y^2 = 36$, que também pode ser escrita na forma $\mathcal{H} : \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$, tem centro na origem, reta focal = eixo$-OX$, $a = 2$, $b = 3$ e $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$.

Então, a hipérbole $\mathcal{H}'$, conjugada da hipérbole $\mathcal{H}$, tem centro na origem, $a' = b = 3$, $b' = a = 2$, $c' = c = \sqrt{13}$ e reta focal = eixo$-OY$.

Logo, $\mathcal{H}' : \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{4} = 1$ é a equação da hipérbole conjugada da hipérbole $\mathcal{H}$, $F_1 = (0, -\sqrt{13})$ e $F_2 = (0, \sqrt{13})$ são seus focos, $A_1 = (0, -3)$ e $A_2 = (0, 3)$ são seus vértices e $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$ é a sua excentricidade. $\square$

3. Hipérbole com centro no ponto $\overline{O} = (x_0, y_0)$

• Caso I. Reta focal paralela ao eixo$-OX$

Como o centro $\overline{O} = (x_0, y_0)$ pertence à reta focal, temos que $\ell : y = y_0$ é a equação cartesiana da reta focal.

Além disso, como

$$d(F_1, \overline{O}) = d(F_2, \overline{O}) = c,$$

onde F_1 e F_2 são os focos da elipse, temos que $F_1 = (x_0-c, y_0)$ e $F_2 = (x_0+c, y_0)$.

Seja $P = (\overline{x} + x_0, \overline{y} + y_0)$ um ponto pertencente à hipérbole, onde

$$x = \overline{x} + x_0 \text{ e } y = \overline{y} + y_0$$

são suas coordenadas no sistema OXY, e $\overline{x}$, $\overline{y}$ são suas coordenadas no sistema $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$, obtido quando o sistema OXY é transladado para a origem $\overline{O} = (x_0, y_0)$.

Então, P pertence à hipérbole se, e somente se,

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\,,$$

ou seja,

$$\iff \quad |d((\overline{x} + x_0, \overline{y} + y_0), (x_0 - c, y_0)) - d((\overline{x} + x_0, \overline{y} + y_0), (x_0 + c, y_0))| = 2a$$

$$\iff \quad |d((\overline{x}, \overline{y}), (-c, 0)) - d((\overline{x}, \overline{y}), (c, 0))| = 2a$$

$$\iff \quad \frac{\overline{x}^2}{a^2} - \frac{\overline{y}^2}{b^2} = 1 \iff \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1\,.$$

Logo **a forma canônica da equação da hipérbole com centro no ponto (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo$-OX$ é:**

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1\,, \qquad \text{onde} \qquad b^2 = c^2 - a^2}$$

Os focos são $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$; a reta focal é $\ell : y = y_0$; os vértices são $A_1 = (x_0 - a, y_0)$ e $A_2 = (x_0 + a, y_0)$; a reta não focal é $\ell' : x = x_0$; os vértices imaginários são $B_1 = (x_0, y_0 - b)$ e $B_2 = (x_0, y_0 + b)$, e as assíntotas são as retas $(y - y_0) = \pm b/a(x - x_0)$, ou seja, $b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0$ e $b(x - x_0) + a(y - y_0) = 0$.

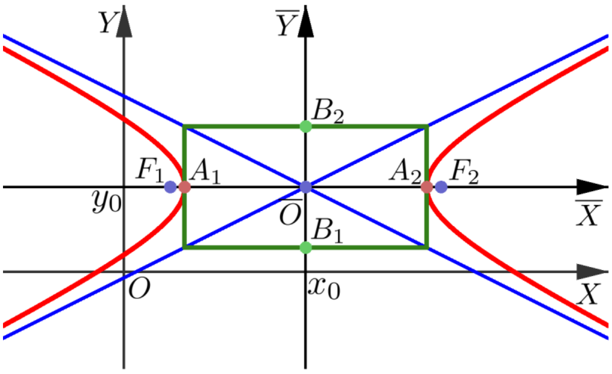

Figura 16: Gráfico da hipérbole $\mathcal{H} : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$.

• Caso II. Reta focal paralela ao eixo$-OY$

Procedendo como no caso anterior, verifica-se **a forma canônica da equação da hipérbole com centro no ponto (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo$-OY$ é:**

$$\boxed{\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1\,, \quad \text{onde} \quad b^2 = c^2 - a^2}$$

Neste caso, os focos são $F_1 = (x_0, y_0 - c)$ e $F_2 = (x_0, y_0 + c)$; a reta focal é $\ell : x = x_0$; os vértices são $A_1 = (x_0, y_0 - a)$ e $A_2 = (x_0, y_0 + a)$; a reta não focal é $\ell' : y = y_0$; os vértices imaginários são $B_1 = (x_0 - b, y_0)$ e $B_2 = (x_0 + b, y_0)$, e as assíntotas são as retas $(x - x_0) = \pm b/a(y - y_0)$, ou seja, $a(x - x_0) - b(y - y_0) = 0$ e $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

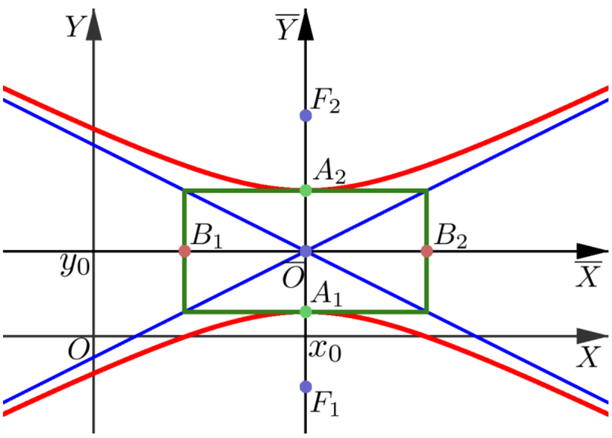

Figura 17: Gráfico da hipérbole $\mathcal{H} : \frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$.

Exemplo 6

Determine o ângulo agudo de interseção das assíntotas da hipérbole

$$9x^2 - y^2 - 36x - 2y + 44 = 0.$$

Solução.

A equação da hipérbole se escreve na forma:

$$\begin{aligned} &9(x^2 - 4x) - (y^2 + 2y) = -44 \\ &9(x-2)^2 - (y+1)^2 = -44 + 36 - 1 = -9 \\ &\frac{(y+1)^2}{9} - (x-2)^2 = 1\,. \end{aligned}$$

Logo, $C = (2, -1)$ é o centro, a reta focal é $\ell : x = 2$, paralela ao eixo$-OY$, $a = 3$, $b = 1$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10}$ e as assíntotas são $x - 2 = \pm\frac{1}{3}(y+1)$, ou seja, $y = 3x - 7$ e $y = -3x + 5$.

Assim, $\operatorname{tg}\beta = 3$, $\operatorname{tg}\alpha = -3$, $\theta = \alpha - \beta$ e

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{tg}\beta} = \frac{-6}{1-9} = \frac{3}{4}\,,$$

onde β e α são os ângulos que as retas $y = 3x - 7$ e $y = -3x + 5$ fazem, respectivamente, com o semieixo OX positivo, e θ é o ângulo agudo entre as assíntotas. $\square$

Exemplo 7

As retas $r : 2x + y = 3$ e $s : 2x - y = 1$ são as assíntotas de uma hipérbole que passa pelo ponto $(6, 2)$. Determine sua equação.

Solução.

O centro $C = (x, y)$ da hipérbole é o ponto de interseção das assíntotas, isto é, (x, y) é a solução do sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x - y = 1\,. \end{cases}$$

Logo, $C = (1, 1)$ é o centro. A reta focal ℓ e a reta não focal ℓ' são as bissetrizes das assíntotas, ou seja,

$$\begin{aligned}(x,y)\in\ell\cup\ell' &\iff d((x,y),\ell)=d((x,y),\ell')\\ &\iff \tfrac{|2x+y-3|}{\sqrt{5}}=\tfrac{|2x-y-1|}{\sqrt{5}}\\ &\iff 2x+y-3=\pm(2x-y-1)\\ &\iff y=1 \;\text{ ou } x=1.\end{aligned}$$

Portanto, a reta focal é a reta $x=1$ ou a reta $y=1$. Vamos analisar os dois casos possíveis.

• Reta focal $\ell: y=1$, paralela ao eixo$-OX$.

Neste caso, $\mathcal{H}: \dfrac{(x-1)^2}{a^2}-\dfrac{(y-1)^2}{b^2}=1$ e $\dfrac{b}{a}=2$, ou seja, $b=2a$. Como $b^2=4a^2$ e $(6,2)\in\mathcal{H}$, temos que $\mathcal{H}: 4(x-1)^2-(y-1)^2=4a^2$ e $4\times 25-1=99=4a^2$.

Portanto, $\mathcal{H}: 4(x-1)^2-(y-1)^2=99$, ou seja, $\mathcal{H}: \dfrac{(x-1)^2}{\frac{99}{4}}-\dfrac{(y-1)^2}{99}=1$.

• Reta focal $\ell: x=1$, paralela ao eixo$-OY$.

Neste caso, $\mathcal{H}: \dfrac{(y-1)^2}{a^2}-\dfrac{(x-1)^2}{b^2}=1$ e $\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{2}$, ou seja, $a=2b$. Como $a^2=4b^2$ e $(6,2)\in\mathcal{H}$, temos que $\mathcal{H}: (y-1)^2-4(x-1)^2=4b^2$ e $4b^2=1-4\times 25=-99<0$, o que é um absurdo.

Assim, a equação procurada corresponde ao primeiro caso:

$$\mathcal{H}: 4(x-1)^2-(y-1)^2=99.$$

□

4. Equação do segundo grau com $B=0$ e $AC<0$.

Consideremos a equação da hipérbole $\mathcal{H}$ com centro no ponto (x_0,y_0) e reta focal paralela ao eixo$-OX$:

$$\mathcal{H}: \frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1\,.$$

Desenvolvendo a equação acima, obtemos:

$$b^2x^2-a^2y^2-2x_0b^2x+2y_0a^2y+x_0^2b^2-a^2y_0^2-a^2b^2=0,$$

que é da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\,,$$

onde $A = b^2$, $B = 0$, $C = -a^2$, $D = -2x_0b^2$, $E = 2y_0a^2$, $F = x_0^2b^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2$. Em particular, **os coeficientes A e C têm sinais opostos, e $B = 0$**. Podemos verificar que o mesmo ocorre quando desenvolvemos a equação da hipérbole de reta focal paralela ao eixo$-OY$.

Reciprocamente, temos a seguinte proposição:

Proposição 1

Se os coeficientes A e C da equação

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1}$$

têm sinais opostos, então a equação representa:

- *uma hipérbole de eixos paralelos aos eixos coordenados;*

ou

- *um par de retas concorrentes.*

Prova.

Suponhamos que $A > 0$ e $C < 0$. Então,

$$\begin{aligned}
&Ax^2 + Dx - (-Cy^2 - Ey) = -F\,,\\
&\frac{\left(x^2 + \frac{D}{A}x\right)}{-C} - \frac{\left(y^2 + \frac{E}{C}y\right)}{A} = \frac{F}{AC}\,,\\
&\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{-C} - \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} = \frac{F}{AC} - \frac{D^2}{4A^2C} - \frac{E^2}{4AC^2}\,,\\
&\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{-C} - \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} = \frac{4ACF - CD^2 - AE^2}{4A^2C^2}\,.
\end{aligned}$$

Logo, a equação (1) representa uma hipérbole com eixos paralelos aos eixos coordenados, se $4ACF - CD^2 - AE^2 \neq 0$, e representa o par de retas concorrentes

$$y + \frac{E}{2C} = \pm\sqrt{\frac{-A}{C}}\left(x + \frac{D}{2A}\right)\,,$$

se $4ACF - CD^2 - AE^2 = 0$ ■

O caso em que a equação do segundo grau $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, com $AC<0$, representa um par de retas concorrentes é chamado **caso degenerado da hipérbole**.

Exemplo 8

Determine se as equações abaixo representam uma hipérbole ou uma hipérbole degenerada. Caso seja uma hipérbole, determine seus principais elementos.

(a) $9x^2-25y^2-225=0$.

Solução.

Como $9x^2-25y^2=225$, *obtemos, dividindo por* 225, *a equação*

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1\,,$$

que representa uma hipérbole com:

- $a=5$, $b=3$ *e* $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$;
- *centro:* $C=(0,0)$;
- *reta focal:* $\ell=\text{eixo}-OX : y=0$;
- *reta não focal:* $\ell'=\text{eixo}-OY : x=0$;
- *vértices:* $A_1=(-5,0)$ *e* $A_2=(5,0)$;
- *vértices imaginários (na reta não focal):* $B_1=(0,-3)$ *e* $B_2=(0,3)$;
- *focos:* $F_1=(-\sqrt{34},0)$ *e* $F_2=(\sqrt{34},0)$;
- *assíntotas:* $y=\pm\frac{3}{5}x$, *ou seja* $3x\pm 5y=0$. $\square$

(b) $x^2-2y^2+6x+4y+9=0$.

Solução.

Completando os quadrados, obtemos:

$$\begin{aligned} & x^2+6x-2(y^2-2y)=-9 \\ \iff\ & (x^2+6x+9)-2(y^2-2y+1)=-9+9-2 \\ \iff\ & (x+3)^2-2(y-1)^2=-2 \\ \iff\ & (y-1)^2-\frac{(x+3)^2}{2}=1\,. \end{aligned}$$

Logo a equação representa uma hipérbole com:

- $a = 1$, $b = \sqrt{2}$ *e* $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$;
- *centro:* $C = (-3, 1)$;
- *reta focal:* $\ell : x = -3$, *paralela ao eixo*$-OY$;
- *reta não focal:* $\ell' : y = 1$, *paralela ao eixo*$-OX$;
- *vértices:* $A_1 = (-3, 0)$ *e* $A_2 = (-3, 2)$;
- *vértices imaginários (na reta não focal):* $B_1 = (-3-\sqrt{2}, 1)$ *e* $B_2 = (-3+\sqrt{2}, 1)$;
- *focos:* $F_1 = (-3, 1 - \sqrt{3})$ *e* $F_2 = (-3, 1 + \sqrt{3})$;
- *assíntotas* $(x+3) = \pm\sqrt{2}(y-1)$, *ou seja,* $x+\sqrt{2}y = -3+\sqrt{2}$ *e* $x-\sqrt{2}y = -3-\sqrt{2}$.

$\square$

(c) $9x^2 - 16y^2 + 90x - 128y - 31 = 0$.

Solução.

Completando os quadrados, obtemos:

$$
\begin{aligned}
& 9(x^2 + 10x) - 16(y^2 + 8y) = 31 \\
\iff & 9(x^2 + 10x + 25) - 16(y^2 + 8y + 16) = 31 + 9 \times 25 - 16 \times 16 \\
\iff & 9(x+5)^2 - 16(y+4)^2 = 0 \\
\iff & 9(x+5)^2 = 16(y+4)^2 \\
\iff & 3(x+5) = \pm 4(y+4) \\
\iff & 3(x+5) \pm 4(y+4) = 0\,.
\end{aligned}
$$

Logo, a equação representa o par de retas, $3x + 4y = -31$ *e* $3x - 4y = 1$, *que se cortam no ponto* $(-5, -4)$. $\square$

Capítulo 16

Parábola

1. Parábola

Definição 1

Sejam $\mathcal{L}$ uma reta no plano e F um ponto no plano não pertencente a $\mathcal{L}$. A **parábola** $\mathcal{P}$ de **diretriz** $\mathcal{L}$ e **foco** F é o conjunto que consiste de todos os pontos P do plano, equidistantes do ponto F e da reta $\mathcal{L}$, isto é,

$$\boxed{\mathcal{P} = \{\, P \mid d(P, F) = d(P, \mathcal{L}) \,\}\,.}$$

Terminologia

• Como dissemos na definição, o ponto F é o **foco** e a reta $\mathcal{L}$ é a **diretriz** da parábola.

• A reta ℓ que contém o foco e é perpendicular à diretriz $\mathcal{L}$ é chamada **reta focal** da parábola.

• O **vértice** da parábola é o ponto V da reta focal, equidistante de F e de $\mathcal{L}$. Em particular, $V \in \mathcal{P}$.

• Se A é o ponto onde $\mathcal{L}$ intersecta ℓ, então V é o ponto médio do segmento AF, ou seja,

$$V = \frac{A+F}{2}.$$

• O número $2p = d(F, \mathcal{L})$ é o **parâmetro** da parábola. Note que $d(V, F) = d(V, \mathcal{L}) = p$.

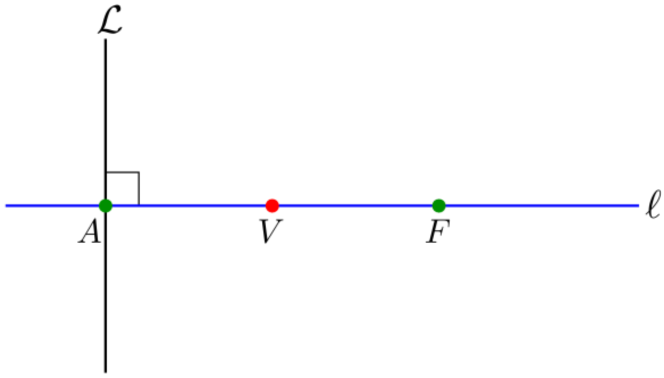

Figura 1: Posição do vértice em relação ao foco e à diretriz da parábola.

Observação 1

Toda parábola é simétrica em relação à sua reta focal.

De fato, seja $\mathcal{P}$ uma parábola de foco F, vértice V, diretriz $\mathcal{L}$ e reta focal ℓ.

Seja $P \in \mathcal{P}$ e seja P' o ponto simétrico de P em relação à reta focal ℓ.

O segmento $PP' \perp \ell$ intersecta a reta focal ℓ num ponto Q que é o ponto médio do segmento PP'.

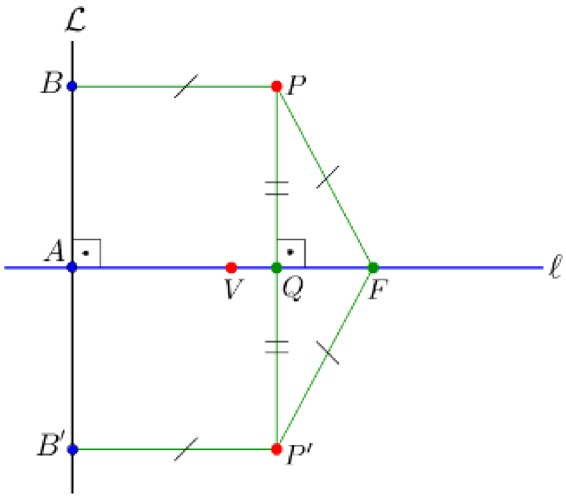

Figura 2: Simetria da parábola em relação à reta focal ℓ.

Os triângulos $\triangle PQF$ e $\triangle P'QF$ são congruentes, pois o lado QF é comum, $d(P, Q) = d(P', Q)$ e os ângulos $\widehat{PQF}$ e $\widehat{P'QF}$ são retos. Em particular, $d(P, F) = d(P', F)$.

Além disso, $d(P, \mathcal{L}) = d(Q, \mathcal{L}) = d(P', \mathcal{L})$, pois $BPQA$ e $AQP'B'$ são retângulos.

Como $P \in \mathcal{P}$, temos $d(P, F) = d(P, \mathcal{L})$. Portanto, $d(P', F) = d(P', \mathcal{L})$, isto é, $P' \in \mathcal{P}$.

2. Formas canônicas da parábola

Vamos estabelecer as formas canônicas da parábola em relação a um sistema de coordenadas OXY no plano. Para isso, vamos considerar primeiro os casos em que o vértice da parábola é a origem e a reta focal é um dos eixos coordenados. E, por último, vamos considerar os casos em que o vértice é um ponto qualquer e a reta focal é paralela a um dos eixos coordenados.

2.1 Parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo$-OX$

Caso I. O foco F está **à direita** da diretriz $\mathcal{L}$.

Como o vértice da parábola $\mathcal{P}$ é a origem $V = (0, 0)$, temos que o foco é o ponto $F = (p, 0)$ e a diretriz é a reta $\mathcal{L} : x = -p$, onde $2p = d(F, \mathcal{L})$.

Logo,

$$
\begin{aligned}
& P = (x, y) \in \mathcal{P} \\
\iff & d(P, F) = d(P, \mathcal{L}) \\
\iff & \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x + p| \\
\iff & (x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2 \\
\iff & x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2 \\
\iff & -2px + y^2 = 2px \\
\iff & \boxed{y^2 = 4px}
\end{aligned}
$$

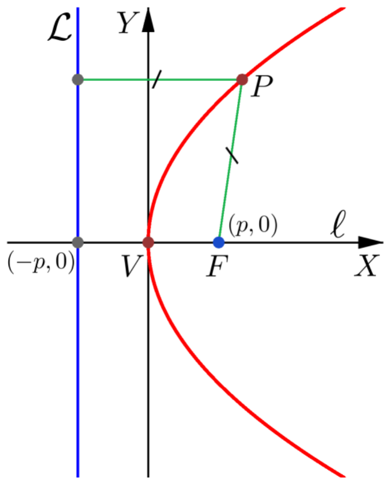

Figura 3: Parábola $\mathcal{P} : y^2 = 4px$.

Caso II. O foco F está **à esquerda** da diretriz $\mathcal{L}$.

Neste caso, temos

$$F = (-p, 0) \text{ e } \mathcal{L} : x = p,$$

onde $2p = d(F, \mathcal{L})$.

Então,

$$\begin{aligned}
& P = (x, y) \in \mathcal{P} \\
\iff\ & d(P, F) = d(P, \mathcal{L}) \\
\iff\ & \sqrt{(x+p)^2 + y^2} = |x - p| \\
\iff\ & (x+p)^2 + y^2 = (x-p)^2 \\
\iff\ & x^2 + 2px + p^2 + y^2 = x^2 - 2px + p^2 \\
\iff\ & 2px + y^2 = -2px \\
\iff\ & \boxed{y^2 = -4px}
\end{aligned}$$

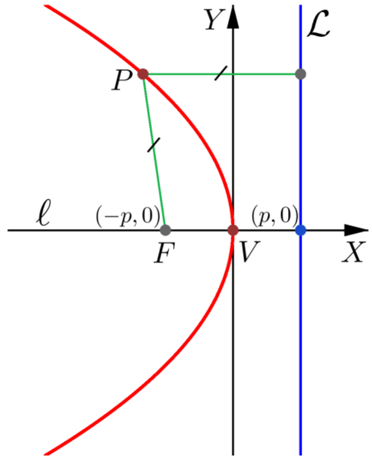

Figura 4: Parábola $\mathcal{P} : y^2 = -4px$.

2.2 Parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo$-OY$

Caso I. O foco F está **acima** da diretriz $\mathcal{L}$.

Neste caso, $F = (0, p)$ e $\mathcal{L} : y = -p$, onde $2p = d(F, \mathcal{L})$. Logo, $P = (x, y) \in \mathcal{P}$ se, e somente se,

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |y + p| \iff \boxed{x^2 = 4py}$$

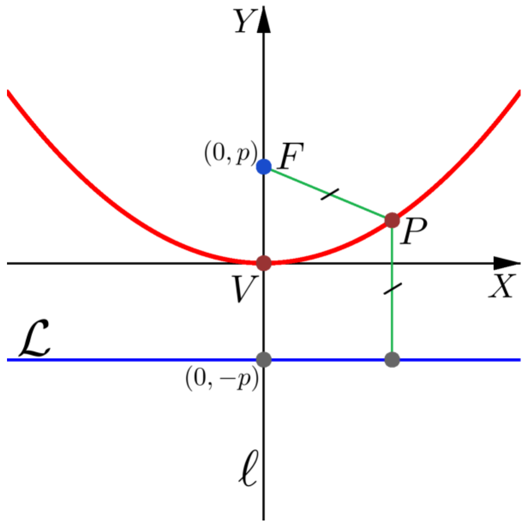

Figura 5: Parábola $\mathcal{P} : x^2 = 4py$.

Caso II. O foco F está **abaixo** da diretriz $\mathcal{L}$.

Neste caso, $F = (0, -p)$ e $\mathcal{L} : y = p$, onde $2p = d(F, \mathcal{L})$. Logo, $P = (x, y) \in \mathcal{P}$ se, e somente se,

$$\sqrt{x^2 + (y+p)^2} = |y - p| \iff \boxed{x^2 = -4py}$$

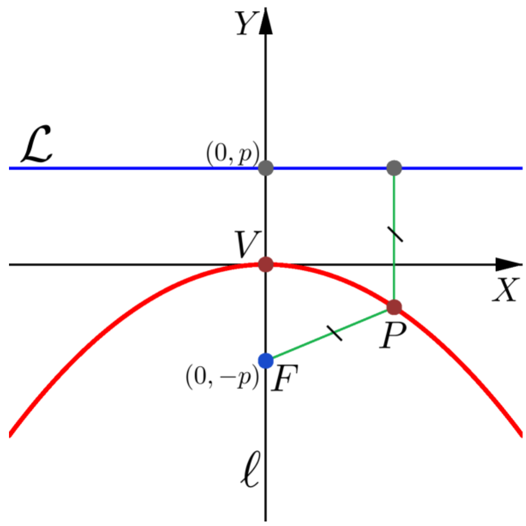

Figura 6: Parábola $\mathcal{P} : x^2 = -4py$.

Exemplo 1

Determine a equação da parábola $\mathcal{P}$ com vértice V na origem, cujo foco é o ponto:

(a) $F = (3, 0)$.

Solução.
Temos $p = d(V, F) = 3$ e reta focal = eixo$-OX$. Como o foco F está à direita do vértice, temos que a diretriz é a reta $\mathcal{L} : x = -3$ e a equação da parábola é $\mathcal{P} : y^2 = 12x$. □

(b) $F = (0, -2)$.

Solução.
Temos $p = d(V, F) = 2$ e reta focal = eixo$-OY$. Como o foco F está abaixo do vértice, temos que a diretriz é a reta $\mathcal{L} : y = 2$ e a equação da parábola é $\mathcal{P} : x^2 = -8y$. □

Exemplo 2

Uma parábola $\mathcal{P}$ com vértice V na origem, cuja reta focal é o eixo$-OY$, passa pelo ponto $(4,-2)$. Determine sua equação, o foco F e a equação da diretriz $\mathcal{L}$.

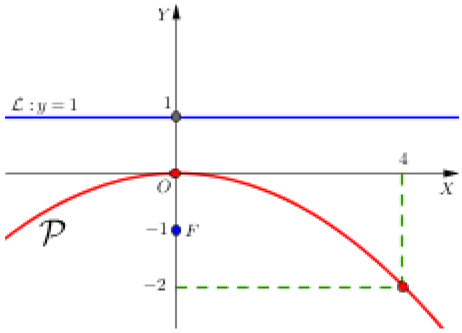

Figura 7: Parábola $\mathcal{P} : x^2 = -8y$.

Solução.

A parábola tem equação $\mathcal{P} : x^2 = \pm 4py$, com $p = d(V,F) > 0$.

Como $(2\sqrt{2}, -2) \in \mathcal{P}$, temos que $\mathcal{P} : x^2 = -4py$ e $8 = 8p$. Logo, $p = 1$, $F = (0,-1)$, $\mathcal{L} : y = 1$ e a equação da parábola é $\mathcal{P} : x^2 = -4y$. $\square$

Exemplo 3

Um círculo $\mathcal{C}$ com centro no ponto $C = (4,-1)$ passa pelo foco F da parábola $\mathcal{P} : x^2 = -16y$. Mostre que a diretriz $\mathcal{L}$ da parábola é tangente ao círculo $\mathcal{C}$.

Solução.

A reta focal da parábola $\mathcal{P}$ é o eixo$-OY$, o vértice é a origem, o foco está abaixo da diretriz e $4p = 16$. Então, $F = (0,-4)$ e $\mathcal{L} : y = 4$.

A equação do círculo é:

$$\mathcal{C} : (x-4)^2 + (y+1)^2 = r^2.$$

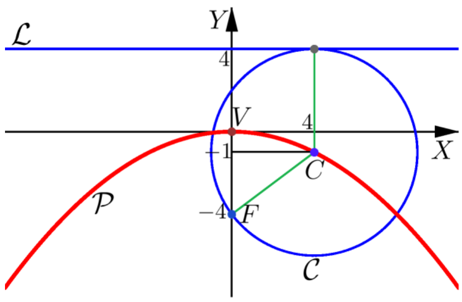

Figura 8: Parábola $\mathcal{P}$ e círculo $\mathcal{C}$.

Como $F = (0,-4) \in \mathcal{C}$, temos $16+9 = r^2$, ou seja, $r = 5$. Então,

$$(x,y) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{L} \iff (x-4)^2 + (4+1)^2 = 5^2$$
$$\iff (x-4)^2 = 0 \iff x = 4 \iff (x,y) = (4,4).$$

Logo, $\mathcal{L}$ tangencia $\mathcal{C}$ no ponto $(4,4)$. $\square$

2.3 Parábola com vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo$-OX$

Para obtermos a forma canônica da parábola de vértice no ponto $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo$-OX$, consideremos um sistema de coordenadas $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$, com origem $\overline{O} = V = (x_0, y_0)$ e eixos $\overline{O}\,\overline{X}$ e $\overline{O}\,\overline{Y}$ paralelos e de igual sentido aos eixos OX e OY, respectivamente.

Caso I. O foco F está **à direita** da diretriz $\mathcal{L}$.

Sabemos que a equação da parábola no sistema de coordenadas $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$ é $\overline{y}^2 = 4p\overline{x}$. Além disso, neste sistema de coordenadas, o foco é $\overline{F} = (p, 0)$; o vértice é $\overline{V} = (0, 0)$; a diretriz é $\overline{\mathcal{L}} : \overline{x} = -p$ e a reta focal é $\overline{\ell} : \overline{y} = 0$.

Como $x = \overline{x} + x_0$ e $y = \overline{y} + y_0$, temos que a equação da parábola no sistema OXY é:

$$\boxed{(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0).}$$

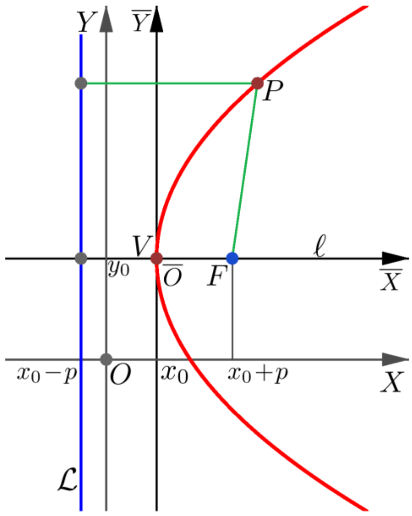

Figura 9: Parábola $(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$.

Além disso, no sistema de eixos OXY, a parábola tem foco $F = (x_0 + p, y_0)$; vértice $V = (x_0, y_0)$; diretriz $\mathcal{L} : x - x_0 = -p$, ou seja, $\mathcal{L} : x = x_0 - p$ e reta focal $\ell : y - y_0 = 0$, ou seja, $\ell : y = y_0$.

Caso II. O foco F está **à esquerda** da diretriz $\mathcal{L}$.

Neste caso, a equação da parábola no sistema $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$ é $\overline{y}^2 = -4p\overline{x}$, e seus elementos são: foco $\overline{F} = (-p, 0)$; vértice $\overline{V} = (0, 0)$; diretriz $\overline{\mathcal{L}} : \overline{x} = p$ e reta focal $\overline{\ell} : \overline{y} = 0$.

Passando para as coordenadas x, y do sistema OXY, a equação da parábola fica na forma

$$\boxed{(y - y_0)^2 = -4p(x - x_0),}$$

e seus elementos são: foco $F = (x_0 - p, y_0)$; vértice $V = (x_0, y_0)$; diretriz $\mathcal{L} : x - x_0 = p$, ou seja, $\mathcal{L} : x = x_0 + p$, e reta focal $\ell : y - y_0 = 0$, ou seja, $\ell : y = y_0$.

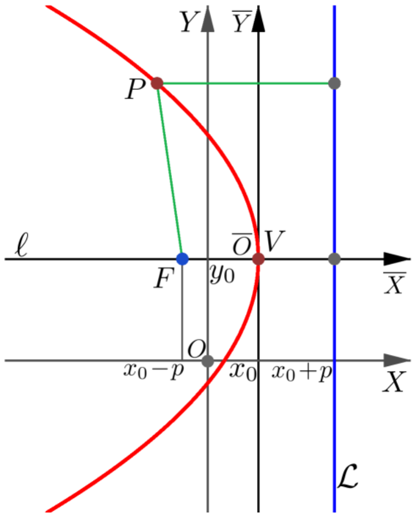

Figura 10: Parábola $(y - y_0)^2 = -4p(x - x_0)$.

2.4 Parábola com vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo$-OY$

Como nos casos anteriores, considerando um sistema de eixos ortogonais $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$, com origem $\overline{O} = V = (x_0, y_0)$ e eixos $\overline{O}\,\overline{X}$ e $\overline{O}\,\overline{Y}$ paralelos e de igual sentido aos eixos OX e OY, respectivamente, obtemos as equações e os elementos das parábolas, com vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo$-OY$.

Caso I. O foco F está **acima** da diretriz $\mathcal{L}$.

Neste caso, o foco é $F = (x_0, y_0 + p)$; a diretriz é $\mathcal{L} : y = y_0 - p$; a reta focal é $\ell : x = x_0$ e a equação da parábola é:

$$\boxed{(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)}$$

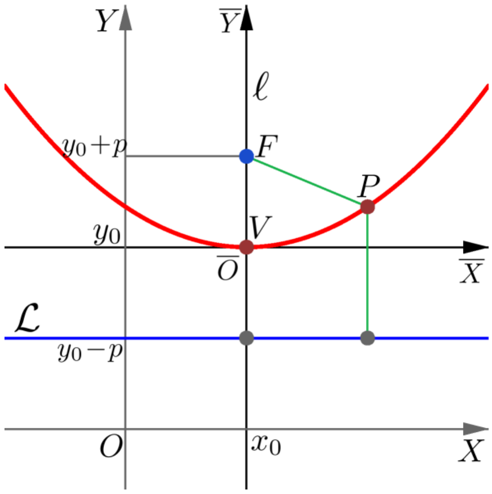

Figura 11: Parábola $\mathcal{P} : (x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$.

Caso II. O foco F está **abaixo** da diretriz $\mathcal{L}$.

Neste caso, o foco é $F = (x_0, y_0 - p)$; a diretriz é $\mathcal{L} : y = y_0 + p$; a reta focal é $\ell : x = x_0$ e a equação da parábola é:

$$\boxed{(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)}$$

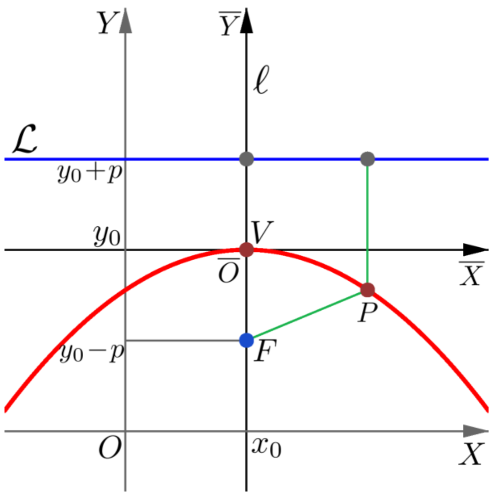

Figura 12: Parábola $\mathcal{P} : (x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)$.

Exemplo 4

Determine a equação da parábola $\mathcal{P}$ de vértice $V = (3, 4)$ e foco $F = (3, 2)$. Determine também a equação de sua diretriz.

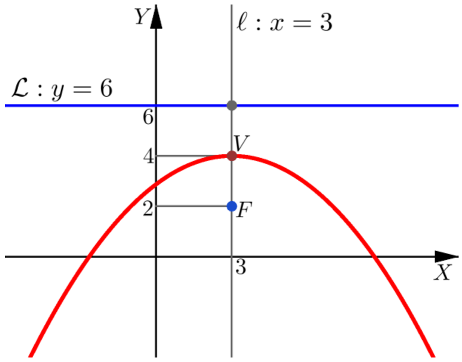

Figura 13: Parábola $\mathcal{P} : (x-3)^2 = -8(y-4)$.

Solução.
Como $V = (3, 4)$ e $F = (3, 2)$, $\ell : x = 3$ é a reta focal e F está abaixo de V, ou seja, abaixo da diretriz $\mathcal{L}$. Logo, a equação da parábola é da forma:

$$\mathcal{P} : (x-3)^2 = -4p(y-4).$$

Temos que $p = d(V, F) = d((3, 4), (3, 2)) = 2$. Então, $\mathcal{L} : y = 6$ é a diretriz e

$$\mathcal{P} : (x-3)^2 = -8(y-4)$$

é a equação da parábola. □

Exemplo 5

Determine a equação da parábola $\mathcal{P}$ cuja reta focal é paralela ao eixo$-OX$ e passa pelos pontos $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$, $(0, 5)$ e $(-6, -7)$.

Solução.
Como a reta focal da parábola $\mathcal{P}$ é paralela ao eixo$-OX$, sua equação deve ser da forma $\mathcal{P} : (y-y_0)^2 = \pm 4p(x-x_0)$, que se escreve também na forma:

$$\mathcal{P} : y^2 + Dx + Ey + F = 0\,.$$

Substituindo as coordenadas dos pontos dados nessa equação, temos:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}D - E + F &= -1 \\ 5E + F &= -25 \\ -6D - 7E + F &= -49\,. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $D = 8$, $E = -2$ e $F = -15$.
Portanto, a equação da parábola é

$$y^2 + 8x - 2y - 15 = 0\,,$$

isto é,

$$y^2 - 2y + 1 = 15 - 8x + 1\,,$$

ou, ainda,

$$\mathcal{P} : (y-1)^2 = -8(x-2).$$

Assim, a parábola $\mathcal{P}$ tem vértice $V = (2,1)$ e reta focal $\ell : y = 1$, paralela ao eixo$-OX$. Como $4p = 8$, isto é, $p = 2$, e o foco F está à esquerda da diretriz, temos que $F = (0,1)$ e a diretriz $\mathcal{L} : x = 4$. $\square$

3. Equação geral do segundo grau com $B = 0$ e $AC = 0$

Consideremos a equação canônica da parábola de vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo$-OX$:

$$(y - y_0)^2 = \pm 4p(x - x_0)\,.$$

Desenvolvendo e agrupando os termos dessa equação, obtemos:

$$y^2 \mp 4px - 2y_0 y + y_0^2 \pm 4px_0 = 0\,.$$

Esta equação é da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

onde $A = 0$, $B = 0$, $C = 1$, $D = \mp 4p$, $E = -2y_0$ e $F = y_0^2 \pm 4px_0$.

Analogamente, desenvolvendo a equação da parábola de vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo$-OY$

$$(x - x_0)^2 = \pm 4p(y - y_0)\,,$$

obtemos a equação

$$x^2 - 2x_0 x \mp 4py + x_0^2 \pm 4py_0 = 0\,,$$

que é da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

onde $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$, $D = -2x_0$, $E = \mp 4p$ e $F = x_0^2 \pm 4py_0$.

No primeiro caso, $A = 0$, $B = 0$ e $C \neq 0$ e, no segundo caso, $A \neq 0$, $B = 0$ e $C = 0$. Portanto, em qualquer caso, $B = 0$ e $AC = 0$.

Reciprocamente, temos a seguinte proposição:

Proposição 1

Seja a equação do segundo grau com $B = 0$:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Se $A = 0$ e $C \neq 0$, esta equação representa:

- *uma parábola cuja reta focal é paralela ao eixo$-OX$, se $D \neq 0$;*

ou

- *duas retas distintas paralelas ao eixo$-OX$, se $D = 0$ e $E^2 - 4CF > 0$;*

ou

- *uma reta paralela ao eixo$-OX$, se $D = 0$ e $E^2 - 4CF = 0$;*

ou

- *o conjunto vazio, se $D = 0$ e $E^2 - 4CF < 0$.*

O mesmo vale para o caso em que $C = 0$ e $A \neq 0$, trocando "paralelo ao eixo$-OX$" por "paralelo ao eixo$-OY$".

Prova.

Suponhamos $A = 0$, $C \neq 0$ e $D \neq 0$. Então, a equação do segundo grau se escreve na forma:

$$y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{D}{C}x + \frac{F}{C} = 0.$$

Completando o quadrado, obtemos:

$$\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 + \frac{D}{C}x + \frac{F}{C} - \frac{E^2}{4C^2} = 0\,.$$

Como $D \neq 0$, podemos escrever a equação na forma

$$\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = -\frac{D}{C}\left(x + \frac{C}{D}\left(\frac{F}{C} - \frac{E^2}{4C^2}\right)\right)\,,$$

que é a equação de uma parábola com reta focal paralela ao eixo$-OX$ e vértice

$$V = \left(-\frac{4C^2F - CE^2}{4C^2D}, -\frac{E}{2C}\right).$$

Se $D = 0$, a equação $Cy^2 + Ey + F = 0$ representa:

- duas retas paralelas ao eixo$-OX$,

$$y = \frac{-E + \sqrt{E^2 - 4CF}}{2C} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{-E - \sqrt{E^2 - 4CF}}{2C},$$

se $E^2 - 4CF > 0$;

- uma reta paralela ao eixo$-OX$, $y = -\dfrac{E}{2C}$, se $E^2 - 4CF = 0$;
- o conjunto vazio, se $E^2 - 4CF < 0$. ■

Os casos em que a equação do segundo grau $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F = 0$, com $AC = 0$, representa duas retas paralelas, uma reta ou o conjunto vazio são chamados **casos degenerados da parábola**.

Exemplo 6

Verifique se as equações abaixo representam uma parábola ou uma parábola degenerada. Caso seja uma parábola, determine seus principais elementos.

(a) $x^2 - 8y = 0$.

Solução.

Como $x^2 = 8y$, a equação representa uma parábola com:

- *vértice:* $V = (0, 0)$;
- *reta focal = eixo$-OY$:* $x = 0$;
- *parâmetro:* $2p = 4$ ($\Longrightarrow p = 2$);
- *foco:* $F = (0, 2)$, *acima da diretriz;*
- *diretriz:* $\mathcal{L} : y = -2$. □

(b) $2y^2 + 5x + 8y - 7 = 0$.

Solução.

Completando o quadrado, obtemos

$$\begin{aligned}
& 2(y^2 + 4y) = -5x + 7 \\
\Longleftrightarrow \quad & 2(y^2 + 4y + 4) = -5x + 7 + 8 \\
\Longleftrightarrow \quad & 2(y + 2)^2 = -5x + 15 \\
\Longleftrightarrow \quad & 2(y + 2)^2 = -5(x - 3) \\
\Longleftrightarrow \quad & (y + 2)^2 = -\frac{5}{2}(x - 3),
\end{aligned}$$

que representa uma parábola com:

- *vértice:* $V = (3, -2)$;

- *reta focal:* $\ell : y = -2$, *paralela ao eixo*$-OX$;
- *parâmetro:* $2p = \frac{5}{4}$ ($\Longrightarrow p = \frac{5}{8}$);
- *foco:* $F = \left(3 - \frac{5}{8}, -2\right) = \left(\frac{19}{8}, -2\right)$, *à esquerda da diretriz;*
- *diretriz:* $\mathcal{L} : x = 3 + \frac{5}{8} = \frac{29}{8}$. □

(c) $3y^2 + 7y - 6 = 0$.

Solução.
Como $A = B = D = 0$ *e seu discriminante é* $49 + 4 \times 3 \times 6 = 121 > 0$, *a equação (c) representa o par de retas* $y = \dfrac{-7 \pm 11}{6}$, *ou seja,* $y = -3$ *e* $y = \frac{2}{3}$, *paralelas ao eixo*$-OX$. □

(d) $9x^2 + 42x + 49 = 0$

Solução.
Como $B = C = E = 0$ *e seu discriminante é* $42^2 - 4 \times 9 \times 49 = 1764 - 1764 = 0$, *a equação (d) representa a reta* $x = -\frac{42}{18} = -\frac{21}{9} = -\frac{7}{3}$, *paralela ao eixo*$-OY$.
□

(e) $3y^2 - 2y + 1 = 0$

Solução.
Como $A = B = D = 0$ *e seu discriminante é* $4 - 12 = -8 < 0$, *a equação (e) representa o conjunto vazio.* □

O exemplo 7 mostra como determinar a equação de uma parábola usando sua definição e conhecendo alguns de seus elementos.

Exemplo 7

Sejam $V = (-2, -1)$ *o vértice de uma parábola* $\mathcal{P}$ *e* $\mathcal{L} : x + 2y = 1$ *a equação de sua diretriz. Encontre a equação da parábola e seu foco.*

Solução.
A reta focal ℓ é a reta perpendicular à diretriz que passa pelo vértice.

Como $(1,2) \perp \mathcal{L}$, temos $(2,-1) \perp \ell$ e, portanto, $\ell : 2x - y = -4 + 1 = -3$.
Seja $A = (x, y)$ o ponto de interseção das retas ℓ e $\mathcal{L}$. Então, as coordenadas x e y satisfazem ao sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y = -3 \\ -2x - 4y = -2\,. \end{cases}$$

Logo, $-5y = -5$, isto é, $y = 1$ e $x = 1 - 2y = -1$.
Como V é o ponto médio do segmento AF, temos que $F = 2V - A$, ou seja,

$$F = 2(-2,-1) - (-1,1) = (-3,-3)\,.$$

Então, $P = (x, y) \in \mathcal{P}$ se, e somente se, $d(P, F) = d(P, \mathcal{L})$, isto é, se, e só se,

$$\left(\sqrt{(x+3)^2 + (y+3)^2}\right)^2 = \left(\frac{|x + 2y - 1|}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$\iff \quad (x+3)^2 + (y+3)^2 = \frac{(x + 2y - 1)^2}{5}$$

$$\iff \quad x^2 + 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 = \frac{x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y + 1}{5}$$

$$\iff \quad 5x^2 + 30x + 5y^2 + 30y + 90 = x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y + 1$$

$$\iff \quad \boxed{\mathcal{P} : 4x^2 - 4xy + y^2 + 32x + 34y + 89 = 0\,,}$$

que é a equação da parábola. □

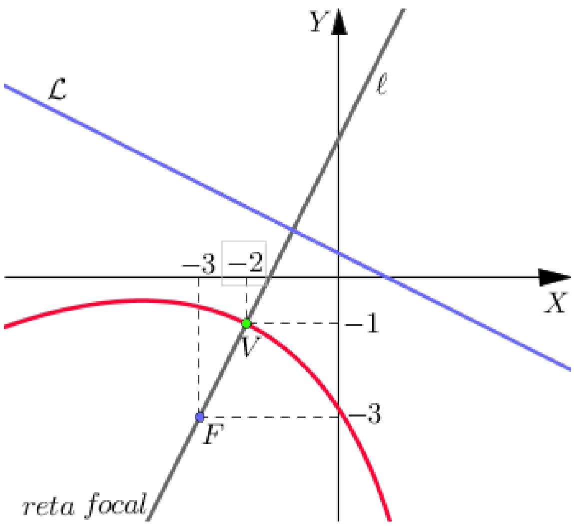

Figura 14: Parábola $\mathcal{P} : 4x^2 - 4xy + y^2 + 32x + 34y + 89 = 0$.

Capítulo 17

Rotação das cônicas

1. Rotação dos eixos coordenados

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais no plano e seja $O\overline{X}\,\overline{Y}$ o sistema de eixos obtido girando os eixos OX e OY de um ângulo θ, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, no sentido positivo.

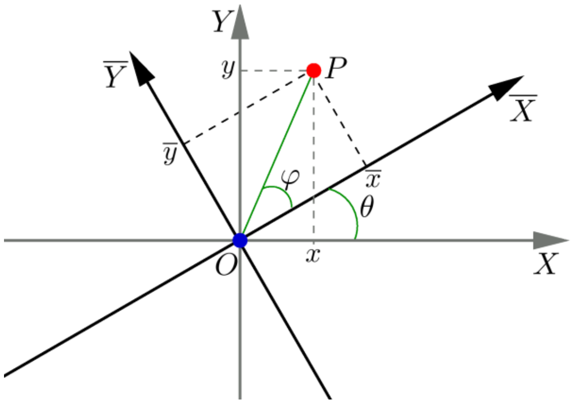

Figura 1: Sistema $O\overline{XY}$ obtido girando de θ o sistema OXY.

Sejam (x, y) e $(\overline{x}, \overline{y})$ as coordenadas de um ponto P nos sistemas OXY e $O\overline{X}\,\overline{Y}$, respectivamente, φ o ângulo que o vetor $\overrightarrow{OP}$ faz com o semieixo positivo $O\overline{X}$ e $r = d(P, O)$. Então,

$$\begin{cases} \overline{x} = r\,\cos\varphi \\ \overline{y} = r\,\operatorname{sen}\varphi\,, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x = r\cos(\varphi+\theta) \\ y = r\operatorname{sen}(\varphi+\theta)\,. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} x = r\,\cos\theta\,\cos\varphi - r\,\operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\varphi \\ y = r\,\operatorname{sen}\theta\,\cos\varphi + r\,\cos\theta\,\operatorname{sen}\varphi\,, \end{cases} \qquad \text{ou seja,} \qquad \boxed{\begin{cases} x = \cos\theta\,\overline{x} - \operatorname{sen}\theta\,\overline{y} \\ y = \operatorname{sen}\theta\,\overline{x} + \cos\theta\,\overline{y} \end{cases}}$$

A **mudança de coordenadas pela rotação de um ângulo θ dos eixos OX e OY** pode ser escrita também na forma matricial

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}}$$

ou na forma vetorial

$$\boxed{(x,y) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\overline{x} + (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\overline{y}}$$

A mudança de coordenadas **inversa** (obtida pela rotação de $-\theta$ dos eixos $O\overline{X}$ e $O\overline{Y}$) se expressa, em termos de matrizes, da seguinte maneira:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

pois $\cos(-\theta) = \cos\theta$ e $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$. Então,

$$\boxed{\begin{cases} \overline{x} = \cos\theta\,x + \operatorname{sen}\theta\,y \\ \overline{y} = -\operatorname{sen}\theta\,x + \cos\theta\,y \end{cases}}$$

ou seja,

$$\boxed{(\overline{x},\overline{y}) = (\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta)\,x + (\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\,y}$$

Exemplo 1

Por uma rotação de 45^o dos eixos coordenados OX e OY, uma certa equação é transformada na equação $4\overline{x}^2 - 9\overline{y}^2 = 36$. Encontre a equação, o centro, os vértices, os vértices imaginários, os focos e as assíntotas da hipérbole nas coordenadas x e y.

Solução.
Como

$$\begin{cases} \overline{x} = \cos\theta\, x + \operatorname{sen}\theta\, y & = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\ \overline{y} = -\operatorname{sen}\theta\, x + \cos\theta\, y & = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x+y)\,, \end{cases}$$

a equação acima, nas coordenadas x, y, se escreve na forma:

$$4 \times \frac{2}{4}(x+y)^2 - 9 \times \frac{2}{4}(-x+y)^2 = 36\,,$$

ou seja,

$$4(x^2 + 2xy + y^2) - 9(x^2 - 2xy + y^2) = 72\,,$$

isto é,

$$\boxed{-5x^2 + 26xy - 5y^2 - 72 = 0}$$

Como, nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, a equação pode ser escrita na forma $\dfrac{\overline{x}^2}{9} - \dfrac{\overline{y}^2}{4} = 1$, ela representa uma hipérbole com $a = 3$; $b = 2$; $c = \sqrt{13}$; centro $C = (0,0)$; reta focal $\ell : \overline{y} = 0$; vértices $A_1 = (-3,0)$ e $A_2 = (3,0)$; focos $F_1 = (-\sqrt{13},0)$ e $F_2 = (\sqrt{13},0)$; reta não focal $\ell' : \overline{x} = 0$; vértices imaginários $B_1 = (0,-2)$ e $B_2 = (0,2)$, e assíntotas $\overline{y} = \pm\dfrac{2}{3}\overline{x}$, ou seja, $2\overline{x} \pm 3\overline{y} = 0$.

Usando a mudança de coordenadas

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\overline{x} - \overline{y}) \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\overline{x} + \overline{y})\,, \end{cases}$$

vemos que, nas coordenadas x e y, o centro é $C = (0,0)$, os vértices são $A_1 = \left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ e $A_2 = \left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, os vértices imaginários são $B_1 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}, -\dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)$, $B_2 = \left(-\dfrac{2}{\sqrt{2}}, \dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)$ e os focos são $F_1 = \left(-\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}, -\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}\right)$ e $F_2 = \left(\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}, \dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}\right)$.

Usando agora a mudança de coordenadas inversa

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\ \overline{y} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x+y)\,, \end{cases}$$

obtemos que, nas coordenadas x e y, a reta focal é $\ell : -x+y=0$, a reta não focal é $\ell' : x+y=0$ e as assíntotas são:

$$2\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,(x+y) \pm 3\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,(-x+y) = 0 \iff 2\,(x+y) \pm 3\,(-x+y) = 0\,,$$

ou seja, $\quad r_1 : y = \dfrac{1}{5}\,x \quad$ e $\quad r_2 : y = 5\,x\,.$

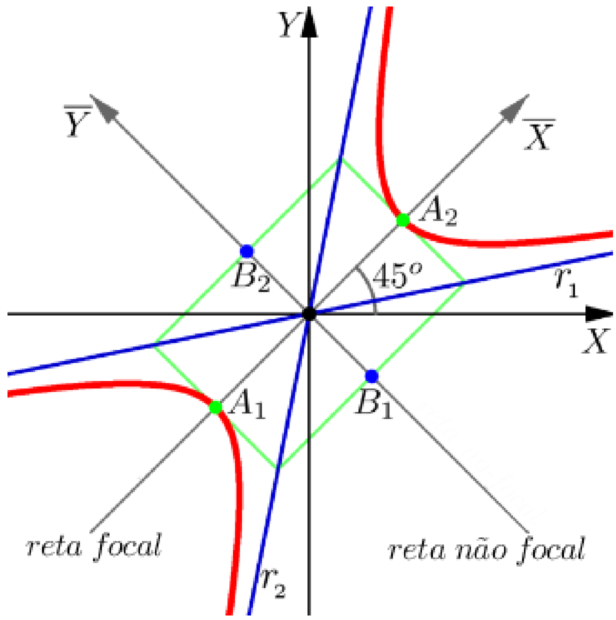

Figura 2: Hipérbole $-5x^2 + 26xy - 5y^2 - 72 = 0$.

$\square$

2. Redução de uma equação do segundo grau à sua forma canônica

Consideremos a equação do segundo grau:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\,. \tag{1}$$

Após uma rotação positiva de um ângulo θ, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, dos eixos OX e OY, obtemos um novo sistema de eixos ortogonais $O\overline{X}$ e $O\overline{Y}$. As coordenadas (x, y) e $(\overline{x}, \overline{y})$ de um ponto P do plano nos sistemas de eixos OXY e $O\overline{X}\,\overline{Y}$, respectivamente, estão relacionadas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} x &= \cos\theta\,\overline{x} - \operatorname{sen}\theta\,\overline{y} \\ y &= \operatorname{sen}\theta\,\overline{x} + \cos\theta\,\overline{y}\,. \end{aligned}$$

Substituindo x por $\cos\theta\,\overline{x} - \operatorname{sen}\theta\,\overline{y}$ e y por $\operatorname{sen}\theta\,\overline{x} + \cos\theta\,\overline{y}$ na equação (1), obtemos a equação nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$:

$$\boxed{A_\theta\overline{x}^2 + B_\theta\overline{x}\,\overline{y} + C_\theta\overline{y}^2 + D_\theta\overline{x} + E_\theta\overline{y} + F_\theta = 0} \tag{2}$$

onde

$$\begin{aligned} A_\theta &= A\cos^2\theta + B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\operatorname{sen}^2\theta \\ B_\theta &= 2(C-A)\operatorname{sen}\theta\cos\theta + B(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \\ C_\theta &= A\operatorname{sen}^2\theta - B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\cos^2\theta \\ D_\theta &= D\cos\theta + E\operatorname{sen}\theta \\ E_\theta &= -D\operatorname{sen}\theta + E\cos\theta \\ F_\theta &= F\,. \end{aligned}$$

Por uma verificação direta, temos que:

$$\begin{pmatrix} A_\theta & B_\theta/2 \\ B_\theta/2 & C_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{3}$$

e

$$\boxed{\begin{pmatrix} D_\theta \\ E_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}}$$

Determinemos o ângulo $\theta = \theta_0$, $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$, para o qual o coeficiente B_{θ_0} da equação nas variáveis $\overline{x}$ e $\overline{y}$ é igual a zero.

Sendo

$$B_{\theta_0} = (C-A)\operatorname{sen}2\theta_0 + B\cos 2\theta_0 = 0,$$

temos que

1. $\theta_0 = 45^o$, se $A = C$.

2. $\operatorname{tg} 2\theta_0 = \dfrac{B}{A-C}$, se $A \neq C$.

Pela relação $1 + \operatorname{tg}^2 2\theta_0 = \sec^2 2\theta_0$ e por $\operatorname{tg} 2\theta_0$ e $\cos 2\theta_0$ terem o mesmo sinal, pois $0 < 2\theta_0 < 180^o$, segue que

$$\cos 2\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\theta_0}}\,, \qquad \text{se} \qquad \frac{B}{A-C} > 0\,,$$

e

$$\cos 2\theta_0 = \frac{-1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\theta_0}}\,, \qquad \text{se} \qquad \frac{B}{A-C} < 0\,.$$

Além disso, como $\cos 2\theta_0 = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$ e $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$, temos que

- $\cos 2\theta_0 = \cos^2\theta_0 - (1-\cos^2\theta_0) = 2\cos^2\theta_0 - 1$
- $\cos 2\theta_0 = (1-\operatorname{sen}^2\theta_0) - \operatorname{sen}^2\theta_0 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta_0$,

ou seja,

$$\boxed{\cos\theta_0 = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta_0}{2}} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\theta_0 = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta_0}{2}}}$$

Fazendo $\theta = \theta_0$, $\overline{A} = A_{\theta_0}$, $\overline{C} = C_{\theta_0}$, $\overline{D} = D_{\theta_0}$, $\overline{E} = E_{\theta_0}$ e $\overline{F} = F_{\theta_0} = F$, a equação do segundo grau (2) fica na forma

$$\boxed{\overline{A}\,\overline{x}^2 + \overline{C}\,\overline{y}^2 + \overline{D}\,\overline{x} + \overline{E}\,\overline{y} + \overline{F} = 0,}$$

onde:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \overline{A} & 0 \\ 0 & \overline{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & \operatorname{sen}\theta_0 \\ -\operatorname{sen}\theta_0 & \cos\theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & -\operatorname{sen}\theta_0 \\ \operatorname{sen}\theta_0 & \cos\theta_0 \end{pmatrix}}$$

e

$$\boxed{\begin{pmatrix} \overline{D} \\ \overline{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & \operatorname{sen}\theta_0 \\ -\operatorname{sen}\theta_0 & \cos\theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}}$$

Definição 1

O **indicador** da equação do segundo grau

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

é o número

$$\boxed{I = B^2 - 4AC = -4\ \det \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}}$$

Como o determinante de um produto de matrizes é igual ao produto dos determinantes das matrizes fatores, temos, por (3), que

$$I_\theta = B_\theta^2 - 4A_\theta C_\theta = -4\ \det \begin{pmatrix} A_\theta & B_\theta/2 \\ B_\theta/2 & C_\theta \end{pmatrix} = -4\ \det \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} = I\,,$$

pois $\det \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = 1$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

Em particular, fazendo $\theta = \theta_0$, temos que $I = B^2 - 4AC = -4\overline{A}\,\overline{C}$. Dizemos, então, que a equação do segundo grau (1) é do tipo:

- **elíptico**, se $I = B^2 - 4AC = -4\overline{A}\,\overline{C} < 0$;
- **parabólico**, se $I = B^2 - 4AC = -4\overline{A}\,\overline{C} = 0$;
- **hiperbólico**, se $I = B^2 - 4AC = -4\overline{A}\,\overline{C} > 0$.

3. Exemplos

Exemplo 2

(a) *Reduza, por uma rotação dos eixos coordenados, a equação*

$$x^2 + 2xy + y^2 - x + y + 1 = 0 \tag{4}$$

à sua forma canônica.

(b) *Determine o foco, o vértice e a diretriz da cônica nas coordenadas x, y.*

(c) *Faça um esboço da curva.*

Solução.

(a) Os coeficientes da equação são $A = 1$, $B = 2$, $C = 1$, $D = -1$, $E = 1$, $F = 1$, e seu indicador é $I = B^2 - 4AC = 2^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$. Então, a equação é do tipo parabólico.

Sendo $A = C = 1$, o ângulo de rotação necessário para eliminar o termo misto (xy) é $\theta = 45^o$, e as relações de mudança de coordenadas, por esta rotação, são:

$$\begin{cases} x = \cos(45^o)\,\overline{x} - \operatorname{sen}(45^o)\,\overline{y} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} - \overline{y}) \\[2ex] y = \operatorname{sen}(45^o)\,\overline{x} + \cos(45^o)\,\overline{y} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} + \overline{y}) \end{cases} \tag{5}$$

e

$$\begin{cases} \overline{x} = \cos(45^o)\,x + \operatorname{sen}(45^o)\,y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \\[2ex] \overline{y} = -\operatorname{sen}(45^o)\,x + \cos(45^o)\,y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x + y) \end{cases} \tag{6}$$

Nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, a equação (4) se escreve na forma:

$$\overline{A}\,\overline{x}^2 + \overline{C}\,\overline{y}^2 + \overline{D}\,\overline{x} + \overline{E}\,\overline{y} + \overline{F} = 0\,,$$

onde $\overline{F} = F = 1$,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \overline{A} & 0 \\ 0 & \overline{C} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2/2 \\ 2/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ou seja,} \quad \overline{A} = 2\,,\ \overline{C} = 0\,,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\overline{D}\\ \overline{E}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \sqrt{2}\end{pmatrix},\end{aligned}$$

ou seja, $\overline{D} = 0$, $\overline{E} = \sqrt{2}$.
Portanto, nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, a equação da cônica se escreve na forma:

$$2\overline{x}^2 + \sqrt{2}\,\overline{y} + 1 = 0\,,$$

isto é,

$$\overline{x}^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\overline{y} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

que é a forma canônica de uma parábola.

(b) A parábola, nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, possui os seguintes elementos:

- vértice: $V = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;
- reta focal: $\ell : \overline{x} = 0$;
- parâmetro: $2p = \frac{\sqrt{2}}{4} \Longrightarrow p = \frac{\sqrt{2}}{8}$;
- foco: $F = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{8}\right) = \left(0, -\frac{5\sqrt{2}}{8}\right)$;
- diretriz: $\overline{y} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{8} = -\frac{3\sqrt{2}}{8}$.

Determinação dos elementos da parábola nas coordenadas x e y.

Por (5), $V = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ é o vértice, $F = \left(\frac{5}{8}, -\frac{5}{8}\right)$ é o foco e, por (6), $\ell : x + y = 0$ é a reta focal e $\mathcal{L} : x - y = \frac{3}{4}$ é a diretriz da parábola nas coordenadas x e y.

(c) Na figura 3 mostramos o esboço da parábola.

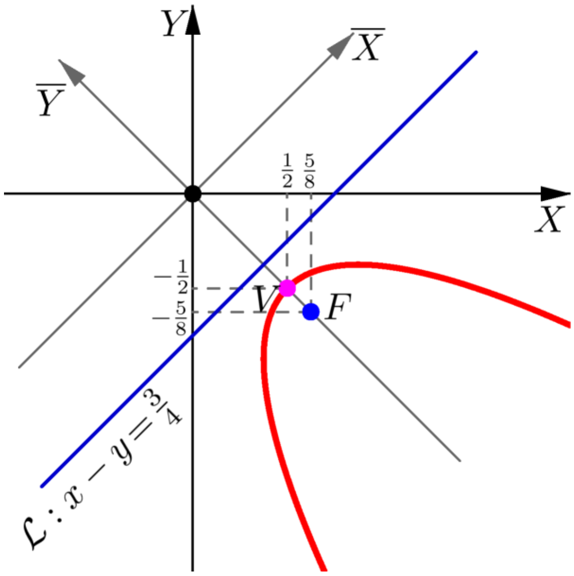

Figura 3: Parábola $x^2 + 2xy + y^2 - x + y + 1 = 0$.

□

Exemplo 3

(a) *Reduza, por uma rotação dos eixos coordenados, a equação*

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 + 20x + 20y + 44 = 0$$

à sua forma canônica.

(b) *Determine os focos, os vértices, o centro, a reta focal e a reta não focal da cônica nas coordenadas x, y.*

(c) *Faça um esboço da curva.*

Solução.

(a) Os coeficientes da equação são $A = 5$, $B = 4$, $C = 2$, $D = 20$, $E = 20$, $F = 44$, e seu indicador é $I = B^2 - 4AC = 16 - 40 = -24 < 0$. Portanto, a equação é do tipo elíptico.

Como $A \neq C$, temos que $\operatorname{tg} 2\theta = \dfrac{B}{A - C} = \dfrac{4}{3} > 0$. Logo,

$$\cos 2\theta = \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 2\theta}} = \sqrt{\frac{1}{1 + 16/9}} = \frac{3}{5} > 0\,,$$

da qual obtemos:

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+3/5}{2}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}\,,$$
$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-3/5}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}\,.$$

As relações de mudança de coordenadas são:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(2\overline{x} - \overline{y}) \\ y = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(\overline{x} + 2\overline{y}) \end{cases}, \tag{7}$$

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(2x + y) \\ \overline{y} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(-x + 2y) \end{cases}, \tag{8}$$

e a equação nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$ fica na forma:

$$\overline{A}\,\overline{x}^2 + \overline{C}\,\overline{y}^2 + \overline{D}\,\overline{x} + \overline{E}\,\overline{y} + \overline{F} = 0,$$

onde $\overline{F} = F = 44$;

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \overline{A} & 0 \\ 0 & \overline{C} \end{pmatrix} &= \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{D} \\ \overline{E} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12\sqrt{5} \\ 4\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Logo, $\overline{A} = 6, \overline{C} = 1, \overline{D} = 12\sqrt{5}, \overline{E} = 4\sqrt{5}, \overline{F} = 4$, e a equação dada, nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, transforma-se na equação:

$$6\overline{x}^2 + \overline{y}^2 + 12\sqrt{5}\,\overline{x} + 4\sqrt{5}\,\overline{y} + 44 = 0\,.$$

Completando os quadrados, temos:

$$\begin{aligned}
&6(\overline{x}^2+2\sqrt{5}\overline{x})+(\overline{y}^2+4\sqrt{5}\,\overline{y})=-44\\
&6(\overline{x}^2+2\sqrt{5}\overline{x}+5)+(\overline{y}^2+4\sqrt{5}\,\overline{y}+20)=-44+30+20\\
&6(\overline{x}+\sqrt{5})^2+(\overline{y}+2\sqrt{5})^2=6\\
&\mathcal{E}:(\overline{x}+\sqrt{5})^2+\frac{(\overline{y}+2\sqrt{5})^2}{6}=1\,,
\end{aligned}$$

que é a forma canônica de uma elipse.

(b) A equação representa uma elipse $\mathcal{E}$ com $a=\sqrt{6}$, $b=1$ e $c=\sqrt{5}$ que, nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ tem:

- centro: $C=(-\sqrt{5},-2\sqrt{5})$;
- reta focal: $\ell:\overline{x}=-\sqrt{5}$, paralela ao eixo$-O\overline{Y}$;
- reta não focal: $\ell':\overline{y}=-2\sqrt{5}$, paralela ao eixo$-O\overline{X}$;
- vértices sobre o eixo focal: $A_1=(-\sqrt{5},-2\sqrt{5}-\sqrt{6})$ e $A_2=(-\sqrt{5},-2\sqrt{5}+\sqrt{6})$;
- vértices sobre o eixo não focal: $B_1=(-\sqrt{5}-1,-2\sqrt{5})$ e $B_2=(-\sqrt{5}+1,-2\sqrt{5})$;
- focos: $F_1=(-\sqrt{5},-2\sqrt{5}-\sqrt{5})=(-\sqrt{5},-3\sqrt{5})$ e $F_2=(-\sqrt{5},-2\sqrt{5}+\sqrt{5})=(-\sqrt{5},-\sqrt{5})$;
- excentricidade: $e=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$.

Determinação dos elementos da elipse nas coordenadas x e y.

Temos, por (8), que

- $\ell:2x+y=-5$ é a reta focal;
- $\ell':x-2y=10$ é a reta não focal;

e, por (7),

- $C=(0,-5)$ é o centro;
- $F_1=(1,-7)$ e $F_2=(-1,-3)$ são os focos;
- $A_1=\left(\dfrac{\sqrt{30}}{5},-5-\dfrac{2\sqrt{30}}{5}\right)$ e $A_2=\left(-\dfrac{\sqrt{30}}{5},-5+\dfrac{2\sqrt{30}}{5}\right)$ são os vértices sobre a reta focal;
- $B_1=\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5},-5-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$ e $B_2=\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5},-5+\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$ são os vértices sobre a reta não focal da elipse nas coordenadas x e y.

(c) Na figura 4, mostramos o esboço da elipse.

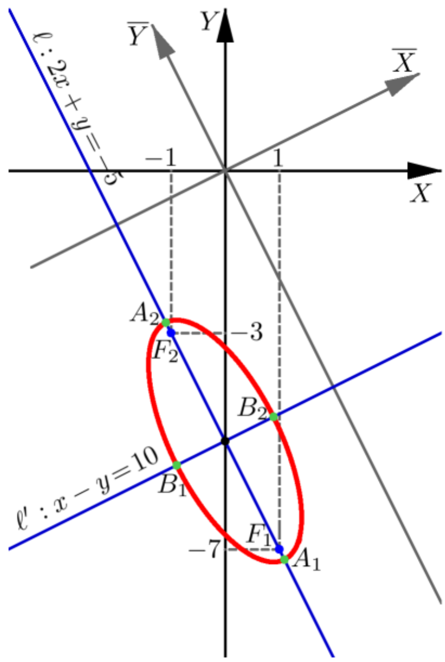

Figura 4: Elipse $x^2 + 2xy + y^2 - x + y + 1 = 0$.

□

Exemplo 4

(a) *Reduza, por uma rotação dos eixos coordenados, a equação abaixo à sua forma canônica:*

$$11x^2 + 10\sqrt{3}xy + y^2 - (22 + 10\sqrt{3})x - (2 + 10\sqrt{3})y - (4 - 10\sqrt{3}) = 0.$$

(b) *Determine os focos, os vértices, o centro, a reta focal e as assíntotas, se existirem, da cônica nas coordenadas x, y.*

(c) *Faça um esboço da curva.*

Solução.

(a) Os coeficientes da equação são:

$$A = 11,\ B = 10\sqrt{3},\ C = 1,$$

$$D = -(22 + 10\sqrt{3}),\ E = -(2 + 10\sqrt{3}),\ F = -(4 - 10\sqrt{3}),$$

e seu indicador é $I = B^2 - 4AC = 300 - 44 = 256 > 0$. Então, a equação é do tipo hiperbólico.

Como $A \neq C$, $\operatorname{tg} 2\theta_0 = \dfrac{B}{A - C} = \sqrt{3} > 0$ e $\cos 2\theta_0 = \sqrt{\dfrac{1}{1+3}} = \dfrac{1}{2} > 0$. Logo,

$$\cos\theta_0 = \sqrt{\frac{1+1/2}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$
$$\operatorname{sen}\theta_0 = \sqrt{\frac{1-1/2}{2}} = \frac{1}{2}\,,$$

isto é, $\theta_0 = 30^o$.
Assim, as relações de mudança de coordenadas são:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3}\,\overline{x} - \overline{y}) \\ y = \dfrac{1}{2}(\overline{x} + \sqrt{3}\,\overline{y}) \end{cases}, \tag{9}$$

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3}x + y) \\ \overline{y} = \dfrac{1}{2}(-x + \sqrt{3}y) \end{cases}, \tag{10}$$

e a equação, nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, é dada por:

$$\overline{A}\,\overline{x}^2 + \overline{C}\,\overline{y}^2 + \overline{D}\,\overline{x} + \overline{E}\,\overline{y} + \overline{F} = 0,$$

onde $\overline{F} = F = -(4 - 10\sqrt{3})$;

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \overline{A} & 0 \\ 0 & \overline{C} \end{pmatrix} &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 16\sqrt{3} & 16 \\ 4 & -4\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

e

$$\begin{pmatrix} \overline{D} \\ \overline{E} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -(22 + 10\sqrt{3}) \\ -(2 + 10\sqrt{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16\sqrt{3} - 16 \\ -4 + 4\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, a equação dada transforma-se na equação:

$$16\overline{x}^2 - 4\overline{y}^2 - 16(\sqrt{3}+1)\overline{x} - 4(1-\sqrt{3})\overline{y} - (4 - 10\sqrt{3}) = 0\,.$$

Completando os quadrados nesta equação, obtemos:

$$16(\overline{x}^2 - (\sqrt{3}+1)\overline{x}) - 4(\overline{y}^2 + (1-\sqrt{3})\overline{y}) = 4 - 10\sqrt{3}$$

$$16\left(\overline{x}^2 - (\sqrt{3}+1)\overline{x} + \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{4}\right) - 4\left(\overline{y}^2 + (1-\sqrt{3})\overline{y} + \frac{(1-\sqrt{3})^2}{4}\right) =$$

$$4 - 10\sqrt{3} + 4(\sqrt{3}+1)^2 - (1-\sqrt{3})^2$$

$$16\left(\overline{x} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2 - 4\left(\overline{y} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 16$$

$$\mathcal{H} : \left(\overline{x} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2 - \frac{\left(\overline{y} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2}{4} = 1\,,$$

que é a forma canônica de uma hipérbole.

(b) A equação representa uma hipérbole com $a^2 = 1$, $b^2 = 4$, $c^2 = a^2+b^2 = 5$, que tem, nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$:

- centro: $C = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$;
- reta focal: $\ell : \overline{y} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$, paralela ao eixo$-O\overline{X}$;
- reta não focal: $\ell' : \overline{x} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, paralela ao eixo$-O\overline{Y}$;
- focos: $F_1 = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} - \sqrt{5}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$ e $F_2 = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \sqrt{5}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$;
- vértices: $A_1 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$ e $A_2 = \left(\frac{\sqrt{3}+3}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$;
- vértices imaginários: $B_1 = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}-5}{2}\right)$ e $B_2 = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}+3}{2}\right)$;
- excentricidade: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$;
- assíntotas: $2\left(\overline{x} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) \pm \left(\overline{y} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = 0$.

Determinação dos elementos da hipérbole nas coordenadas x e y.

Temos, por (10), que:

- $\ell : x - \sqrt{3}y = 1 - \sqrt{3}$ é a reta focal;
- $\ell' : \sqrt{3}\,x + y = \sqrt{3}+1$ é a reta não focal;

• $\begin{cases} r_1 : (2\sqrt{3}-1)(x-1)+(\sqrt{3}+2)(y-1)=0 \\ r_2 : (2\sqrt{3}+1)(x-1)+(2-\sqrt{3})(y-1)=0 \end{cases}$ são as assíntotas;

e, por (9),

• $C=(1,1)$ é o centro;

• $F_1=\left(1-\dfrac{\sqrt{15}}{2}, 1-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$ e $F_2=\left(1+\dfrac{\sqrt{15}}{2}, 1+\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$ são os focos;

• $A_1=\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ e $A_2=\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ são os vértices;

• $B_1=(2,1-\sqrt{3})$ e $B_2=(0,1+\sqrt{3})$ são os vértices imaginários da hipérbole nas coordenadas x e y.

(c) Na figura 5 mostramos o esboço da hipérbole.

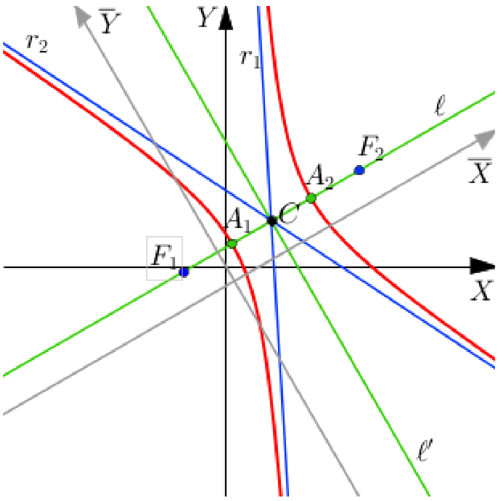

Figura 5: Hipérbole $11x^2+10\sqrt{3}xy+y^2-(22+10\sqrt{3})x-(2+10\sqrt{3})y-(4-10\sqrt{3})=0$.

□

Capítulo 18

Exemplos

1. Exemplos diversos

Exemplo 1

Determine os focos, os vértices, o centro, a reta focal e a reta não focal e faça um esboço da curva abaixo:

$$9x^2 - 18x + 25y^2 - 50y = 191.$$

Solução.
Completando os quadrados na equação, temos:

$$\begin{aligned}
& 9(x^2 - 2x) + 25(y^2 - 2y) = 191 \\
\iff\ & 9(x^2 - 2x + 1) + 25(y^2 - 2y + 1) = 191 + 9 + 25 \\
\iff\ & 9(x-1)^2 + 25(y-1)^2 = 225 \\
\iff\ & \mathcal{E} : \frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1\,.
\end{aligned}$$

Assim, a cônica é a elipse de centro $C = (1, 1)$; reta focal $\ell : y = 1$, paralela ao eixo$-OX$; reta não focal $\ell' : x = 1$, paralela ao eixo$-OY$; $a^2 = 25$, $b^2 = 9$, $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$; vértices sobre a reta focal $A_1 = (1-a, 1) = (-4, 1)$ e $A_2 = (1+a, 1) = (6, 1)$; focos $F_1 = (1-c, 1) = (-3, 1)$ e $F_2 = (1+c, 1) = (5, 1)$; vértices sobre a reta não focal $B_1 = (1, 1-b) = (1, -2)$ e $B_2 = (1, 1+b) = (1, 4)$

e excentricidade $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$. □

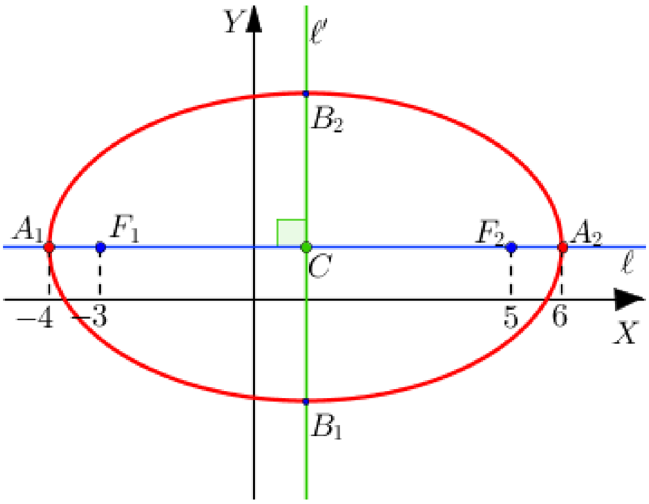

Figura 1: Elipse $\mathcal{E} : 9x^2 - 18x + 25y^2 - 50y = 191$.

Exemplo 2

Considere a elipse de centro $C = (1,1)$, foco $(3,2)$ e excentricidade $\frac{\sqrt{5}}{3}$. Determine os vértices e o outro foco da elipse. Faça também um esboço da curva.

Solução.

Seja $F_2 = (3,2)$ o foco dado. Temos que $c = d(C, F_2) = \sqrt{(3-1)^2 + (2-1)^2}$ $= \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$. Como $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, segue que $a = 3$ e $b^2 = a^2 - c^2 =$ $9 - 5 = 4$.

Seja F_1 o outro foco. Então, $C = \frac{F_1 + F_2}{2}$, isto é,

$$F_1 = 2C - F_2 = 2(1,1) - (3,2) = (-1,0).$$

Seja ℓ a reta focal. Como $\overrightarrow{CF_2} = (2,1) \parallel \ell$, isto é, $(1,-2) \perp \ell$, e $C = (1,1) \in \ell$, a equação de ℓ é dada por:

$$\ell : x - 2y = -1\,.$$

Sejam $A_1 = (2y_1 - 1, y_1)$ e $A_2 = (2y_2 - 1, y_2)$ os vértices sobre a reta focal. Como $d(A_1, C) = d(A_2, C) = a = 3$, y_1 e y_2 são as raízes da equação:

$$\begin{array}{rcrcl}
& & d((2y-1,y),C)^2 = 3^2 & \iff & (2y-1-1)^2+(y-1)^2 = 9 \\
& \iff & 4(y-1)^2+(y-1)^2 = 9 & \iff & 5(y-1)^2 = 9 \\
& \iff & (y-1)^2 = \dfrac{9}{5} & \iff & y-1 = \pm\dfrac{3}{\sqrt{5}} \\
& \iff & y = 1 \pm \dfrac{3}{\sqrt{5}} & \iff & y_1 = 1-\dfrac{3}{\sqrt{5}}\,, \quad \text{e} \quad y_2 = 1+\dfrac{3}{\sqrt{5}}\,.
\end{array}$$

Logo,

$$x_1 = 2y_1 - 1 = 2\left(1-\frac{3}{\sqrt{5}}\right) - 1 = 1 - \frac{6}{\sqrt{5}}\,,$$

$$x_2 = 2y_2 - 1 = 2\left(1+\frac{3}{\sqrt{5}}\right) - 1 = 1 + \frac{6}{\sqrt{5}}\,,$$

e

$$A_1 = \left(1-\frac{6}{\sqrt{5}}, 1-\frac{3}{\sqrt{5}}\right),$$

$$A_2 = \left(1+\frac{6}{\sqrt{5}}, 1+\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$$

são os vértices sobre a reta focal.

Seja ℓ' a reta não focal. Então, $(1,-2) \parallel \ell' \parallel \dfrac{(1,-2)}{\sqrt{5}}$ e $C=(1,1)\in\ell'$. Logo,

$$\ell' : \begin{cases} x = 1 + \dfrac{t}{\sqrt{5}} \\ y = 1 - \dfrac{2t}{\sqrt{5}} \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}$$

é uma equação paramétrica da reta não focal.

Seja B um dos vértices sobre a reta não focal. Então,

$$B = (1,1) + t\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \quad \text{e} \quad |BC| = |t|\left|\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right| = |t| = b = 2\,,$$

ou seja, $t=\pm 2$. Portanto,

$$B_1 = (1,1) - 2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}, 1+\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$$

$$B_2 = (1,1) + 2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \left(1+\frac{2}{\sqrt{5}}, 1-\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$$

são os vértices sobre a reta não focal.

Como $(2,1)\perp\ell'$ e $C=(1,1)\in\ell'$, $\ell' : 2x+y=3$ é a equação cartesiana da reta não focal.

Na figura 2 mostramos o esboço da elipse $\mathcal{E}$. $\square$

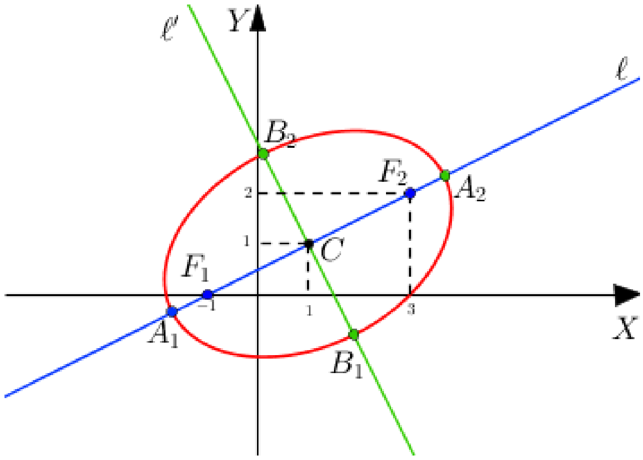

Figura 2: Elipse $\mathcal{E} : 5x^2 - 4xy + 8y^2 - 6x - 12y - 27 = 0$.

Exemplo 3

Determine o vértice e a equação da parábola $\mathcal{P}$ que tem a reta $\mathcal{L} : 2x+y = 1$ como diretriz e foco na origem.

Solução.

Temos que um ponto $P = (x, y)$ pertence à parábola $\mathcal{P}$ se, e só se, $d(P, F) = d(P, \mathcal{L})$, ou seja, se, e somente se,

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{|2x + y - 1|}{\sqrt{5}} \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 = \frac{(2x + y - 1)^2}{5} \\ &\Longleftrightarrow \quad 5x^2 + 5y^2 = 4x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y + 1\,. \end{aligned}$$

Logo, $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x + 2y - 1 = 0$ é a equação da parábola $\mathcal{P}$.

A reta focal ℓ da parábola é a reta perpendicular à diretriz $\mathcal{L}$ que passa pelo foco $F = (0, 0)$. Então, $\ell : x - 2y = 0$.

Seja $A = (x, y)$ o ponto de interseção de ℓ e $\mathcal{L}$. Então, as coordenadas x e y satisfazem ao sistema

$$\begin{cases} x = 2y \\ 2x + y = 1. \end{cases}$$

Substituindo $x = 2y$ na segunda equação, obtemos $5y = 1$, isto é, $y = \dfrac{1}{5}$.

Logo, $x = 2y = \dfrac{2}{5}$ e $A = \left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{1}{5}\right)$.

Seja V o vértice da parábola. Como $d(V, F) = d(V, \mathcal{L}) = d(V, A)$, segue que V é o ponto médio do segmento FA, isto é,

$$V = \frac{A+F}{2} = \left(\frac{2}{10}, \frac{1}{10}\right) = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{10}\right).$$

A figura 3 mostra o esboço da parábola $\mathcal{P}$.

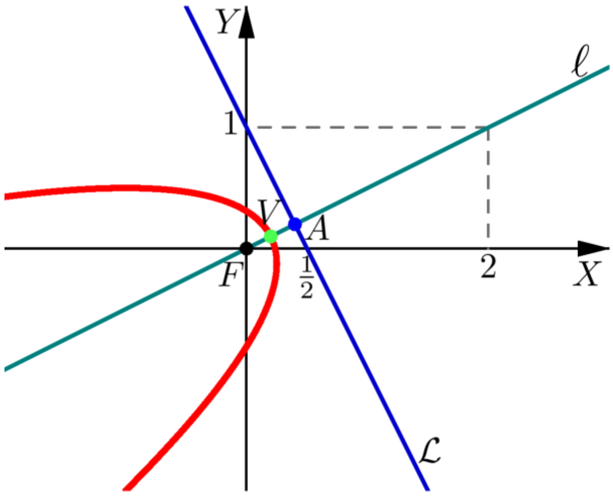

Figura 3: Parábola $\mathcal{P} : x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x + 2y - 1 = 0$.

□

Exemplo 4

Determine a equação da hipérbole $\mathcal{H}$ que passa pelo ponto $Q = (-1, -5)$ e tem os eixos coordenados como assíntotas.

Solução.

Como as assíntotas da hipérbole são os eixos coordenados e a reta focal é uma das bissetrizes das assíntotas, temos que $\ell : x = -y$ ou $\ell : x = y$.

Se a reta focal ℓ fosse a reta $x = -y$, a hipérbole estaria inteiramente contida nos 2^o e 4^o quadrantes, o que é um absurdo, pois o ponto $Q = (-1, -5)$, pertencente à hipérbole $\mathcal{H}$, está no 3^o quadrante.

Portanto, $\ell : x = y$. Observe que a hipérbole é equilátera, pois o ângulo que as assíntotas fazem com a reta focal é igual a 45^o, isto é, a inclinação b/a das assíntotas em relação à reta focal é igual a $1 (= \operatorname{tg} 45^o)$.

Além disso, o centro C da hipérbole, ponto de interseção das assíntotas, é a origem. Então, seus focos são da forma $F_1 = (-m, -m)$ e $F_2 = (m, m)$ para algum $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$.

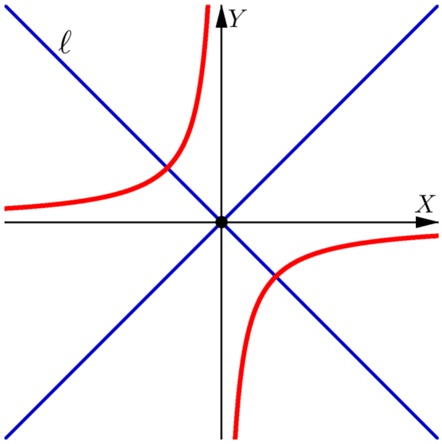

Figura 4: Caso $\ell : x = -y$.

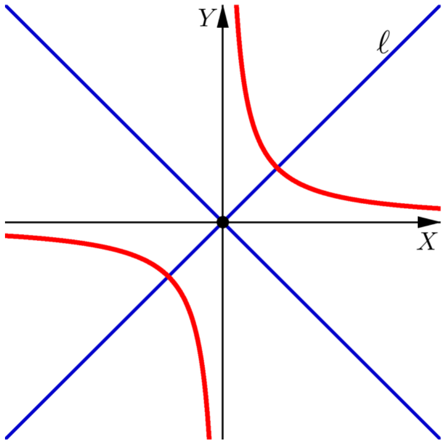

Figura 5: Caso $\ell : x = y$.

Sendo $c = d(F_1, C) = d(F_2, C)$, $c^2 = a^2 + b^2$ e $a = b$, temos que:

$$a^2 + a^2 = c^2 = m^2 + m^2 , \qquad \text{ou seja,} \qquad a = m.$$

Assim, um ponto $P = (x, y)$ pertence à hipérbole $\mathcal{H}$ se, e só se,

$$\begin{aligned}
& \left| \sqrt{(x+m)^2 + (y+m)^2} - \sqrt{(x-m)^2 + (y-m)^2} \right| = 2m \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{(x+m)^2 + (y+m)^2} = \pm 2m + \sqrt{(x-m)^2 + (y-m)^2} \\
\Leftrightarrow\ & (x+m)^2 + (y+m)^2 = 4m^2 + (x-m)^2 + (y-m)^2 \pm 4m\sqrt{(x-m)^2 + (y-m)^2} \\
\Leftrightarrow\ & x^2 + 2mx + m^2 + y^2 + 2my + m^2 = 4m^2 + x^2 - 2mx + m^2 + y^2 - 2my + m^2 \\
& \pm 4m\sqrt{(x-m)^2 + (y-m)^2} \\
\Leftrightarrow\ & 2mx + 2my = 4m^2 - 2mx - 2my \pm 4m\sqrt{(x-m)^2 + (y-m)^2} \\
\Leftrightarrow\ & 4mx + 4my = 4m^2 \pm 4m\sqrt{(x-m)^2 + (y-m)^2} \\
\Leftrightarrow\ & x + y = m \pm \sqrt{(x-m)^2 + (y-m)^2} \\
\Leftrightarrow\ & x + y - m = \pm\sqrt{(x-m)^2 + (y-m)^2} \\
\Leftrightarrow\ & (x + y - m)^2 = (x-m)^2 + (y-m)^2 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 + y^2 + 2xy + m^2 - 2mx - 2my = x^2 - 2mx + m^2 + y^2 - 2my + m^2 \\
\Leftrightarrow\ & 2xy = m^2 \\
\Leftrightarrow\ & xy = \frac{m^2}{2}\,.
\end{aligned}$$

Como $Q = (-1, -5) \in \mathcal{H}$, temos que $\dfrac{m^2}{2} = (-1)(-5)$, isto é, $m^2 = 10$. Logo,

$xy = 5$ é a equação da hipérbole $\mathcal{H}$. $\square$

Exemplo 5

Seja $\mathcal{C}$ uma cônica centrada no ponto $C = (1, 2)$, de excentricidade $e = \frac{1}{2}$, reta focal paralela ao eixo$-OX$ e $d(F, V) = 1$, onde F é um foco e V é o vértice sobre a reta focal mais próximo de F.

Classifique a cônica e determine seus vértices, seus focos e sua equação.

Solução.

A cônica $\mathcal{C}$ é uma elipse, pois $e = \frac{1}{2} < 1$. Então,

$$1 = d(F, V) = d(C, V) - d(C, F) = a - c = a - ae$$
$$\iff 1 = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \iff a = 2\,.$$

Sendo $a = 2$, temos que $c = ae = 2 \times \frac{1}{2} = 1$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$.

Além disso, a reta $\ell : y = 2$, paralela ao eixo$-OX$, é a reta focal da cônica $\mathcal{C}$. Logo,

$$\mathcal{C} : \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{3} = 1$$

é a equação canônica da elipse.

Nesta elipse:

- $A_1 = (-1, 2)$ e $A_2 = (3, 2)$ são os vértices sobre a reta focal.
- $B_1 = (1, 2 - \sqrt{3})$ e $B_2 = (1, 2 + \sqrt{3})$ são os vértices sobre a reta não focal.
- $F_1 = (0, 2)$ e $F_2 = (2, 2)$ são os focos. $\square$

Exemplo 6

Seja $\mathcal{C}$ uma cônica centrada no ponto $C = (1, 2)$, de excentricidade $e = 2$, reta focal paralela ao eixo$-OY$ e $d(F, V) = 2$, onde F é um foco e V é o vértice mais próximo de V.

Classifique a cônica e determine seus vértices, seus focos, suas diretrizes e sua equação.

Solução.

A cônica $\mathcal{C}$ é uma hipérbole, pois $e = 2 > 1$. Então,

$$2 = d(F,V) = d(F,C) - d(C,V) = c - a = ae - a$$
$$\Longleftrightarrow 2 = 2a - a = a \Longleftrightarrow a = 2.$$

Logo, $c = ae = 4$ e $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.
Como a reta focal $\ell : x = 1$ é paralela ao eixo$-OY$, obtemos que:

$$\mathcal{C} : \frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{12} = 1\,,$$

é a equação da hipérbole com:

- vértices: $A_1 = (1,0)$ e $A_2 = (1,4)$;
- vértices imaginários: $B_1 = (1-2\sqrt{3}, 2)$ e $B_2 = (1+2\sqrt{3}, 2)$;
- focos: $F_1 = (1,-2)$ e $F_2 = (1,6)$;
- assíntotas: $x - 1 = \pm\sqrt{3}\,(y-2)$. $\square$

Exemplo 7

Classifique, em função do parâmetro $k \in \mathbb{R}$, a família de curvas

$$4x^2 + ky^2 + 8kx + 20k + 24 = 0\,,$$

indicando, nos casos não degenerados, se a reta focal é paralela ao eixo$-OX$ ou ao eixo$-OY$.

Solução.
Completando o quadrado na equação, temos que:

$$\begin{aligned}
& 4x^2 + ky^2 + 8kx + 20k + 24 = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & 4(x^2 + 2kx) + ky^2 = -20k - 24 \\
\Longleftrightarrow \quad & 4(x^2 + 2kx + k^2) + ky^2 = -20k - 24 + 4k^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & 4(x+k)^2 + ky^2 = 4(k^2 - 5k - 6) \\
\Longleftrightarrow \quad & 4(x+k)^2 + ky^2 = 4(k+1)(k-6)\,.
\end{aligned}$$

Estudo do sinal dos coeficientes k e $(k+1)(k-6)$ da equação:

	$-\infty < k < -1$	$k=-1$	$-1<k<0$	$k=0$	$0<k<6$	$k=6$	$6<k<+\infty$
k	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(k+1)(k-6)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$

Então, para:

• $k \in (-\infty, -1)$, a equação representa uma hipérbole de centro $(-k, 0)$ e reta focal = eixo$-OX$.

• $k = -1$, a equação $4(x-1)^2 - y^2 = 0$ representa o par de retas concorrentes $y = \pm 2(x-1)$ que passam pelo ponto $(1, 0)$.

• $k \in (-1, 0)$, a equação representa uma hipérbole de centro $(-k, 0)$ e reta focal $\ell : x = -k$ paralela ao eixo$-OY$.

• $k = 0$, a equação $4x^2 = -24$ representa o conjunto vazio.

• $k \in (0, 6)$, a equação representa o conjunto vazio, pois $4(x+k)^2 + ky^2 \geq 0$ e $4(k+1)(k-6) < 0$ neste intervalo.

• $k = 6$, a equação $4(x+6)^2 + 6y^2 = 0$ representa o ponto $(-6, 0)$.

• $k \in (6, +\infty)$, a equação, que pode ser escrita na forma

$$\frac{(x+k)^2}{\dfrac{4(k+1)(k-6)}{4}} + \frac{y^2}{\dfrac{4(k+1)(k-6)}{k}} = 1\,,$$

representa uma elipse de centro $(-k, 0)$ e reta focal ℓ = eixo$-OX$, pois $\dfrac{4(k+1)(k-6)}{4} > \dfrac{4(k+1)(k-6)}{k}$ neste intervalo. □

Exemplo 8

Sejam OXY um sistema de eixos ortogonais e $O\overline{X}\,\overline{Y}$ o sistema de eixos ortogonais, obtido pela rotação positiva do ângulo θ dos eixos OX e OY, onde $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$ e $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{3}{5}$.

Uma parábola $\mathcal{P}$, nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, tem foco no ponto $F = \left(\dfrac{12}{5}, \dfrac{16}{5}\right)$ e vértice no ponto $V = \left(\dfrac{12}{5}, -\dfrac{9}{5}\right)$.

(a) *Determine a equação da parábola nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ e nas coordenadas x e y.*

(b) *Determine o foco, o vértice, a reta focal e a diretriz da parábola nas coordenadas x e y.*

(c) *Faça um esboço da curva no sistema de eixos OXY, indicando seus* *elementos.*

Solução.

(a) Como $p = d(F,V) = \dfrac{25}{5} = 5$ e, nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, a reta focal $\ell : \overline{x} = \dfrac{12}{5}$ é paralela ao eixo$-O\overline{Y}$ e o foco F encontra-se acima do vértice V, temos que

$$\mathcal{P} : \left(\overline{x} - \frac{12}{5}\right)^2 = 20\left(\overline{y} + \frac{9}{5}\right)$$

é a equação da parábola, cuja diretriz é a reta $\mathcal{L} : \overline{y} = -\dfrac{9}{5} - p = -\dfrac{9}{5} - 5 = -\dfrac{34}{5}$.
Usando as relações de mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \cos\theta\ x + \operatorname{sen}\theta\ y = \frac{1}{5}(4x+3y) \\ \overline{y} &= -\operatorname{sen}\theta\ x + \cos\theta\ y = \frac{1}{5}(-3x+4y)\,, \end{aligned} \tag{1}$$

a equação da parábola, nas coordenadas x e y, é dada por:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{5}(4x+3y) - \frac{12}{5}\right)^2 = 20\left(\frac{1}{5}(-3x+4y) + \frac{9}{5}\right) \\ \Longleftrightarrow\ & (4x+3y-12)^2 = \frac{20\times 25}{5}(-3x+4y+9) \\ \Longleftrightarrow\ & (4x+3y)^2 - 24(4x+3y) + 144 = 100(-3x+4y+9) \\ \Longleftrightarrow\ & 16x^2 + 24xy + 9y^2 - 96x - 72y + 144 = -300x + 400y + 900 \\ \Longleftrightarrow\ & \boxed{\mathcal{P} : 16x^2 + 24xy + 9y^2 + 204x - 472y - 756 = 0} \end{aligned}$$

(b) Pelas relações de mudança de coordenadas (1), $\ell : \dfrac{1}{5}(4x+3y) = \dfrac{12}{5}$, isto é, $\ell : 4x + 3y = 12$, é a equação da reta focal, e $\mathcal{L} : \dfrac{1}{5}(-3x+4y) = -\dfrac{34}{5}$, isto é, $\mathcal{L} : -3x + 4y = -34$, é a equação da diretriz nas coordenadas x e y.
E, pelas relações de mudança de coordenadas

$$x = \cos\theta\,\overline{x} - \operatorname{sen}\theta\,\overline{y} = \frac{1}{5}(4\overline{x} - 3\overline{y})$$
$$y = \operatorname{sen}\theta\,\overline{x} + \cos\theta\,\overline{y} = \frac{1}{5}(3\overline{x} + 4\overline{y})\,,$$

obtemos que

$$F = \left(\frac{1}{5}\left(\frac{48}{5} - \frac{48}{5}\right), \frac{1}{5}\left(\frac{36}{5} + \frac{64}{5}\right)\right) = (0,4)\,,$$
$$V = \left(\frac{1}{5}\left(\frac{48}{5} + \frac{27}{5}\right), \frac{1}{5}\left(\frac{36}{5} - \frac{36}{5}\right)\right) = (3,0)$$

são o foco e o vértice, respectivamente, da parábola nas coordenadas x e y.

(c) Na figura 6 mostramos o esboço da parábola $\mathcal{P}$.

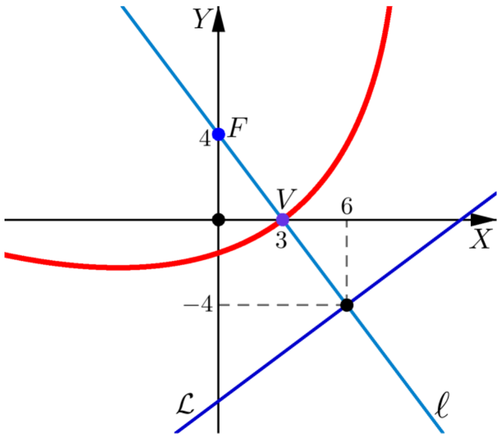

Figura 6: Parábola $\mathcal{P} : 16x^2 + 24xy + 9y^2 + 204x - 472y - 756 = 0$.

□

Exemplo 9

Esboce, detalhadamente, a região do plano dada pelo sistema de inequações:

$$\mathcal{R} : \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4 \\ 16x^2 + y^2 - 8y \geq 0 \\ -4x^2 + y^2 - 4y \leq 0 \\ |x| \leq 2\,. \end{cases}$$

Solução.

A região $\mathcal{R}$ é a interseção das quatro regiões do plano:

$$\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \geq 4\}$$

$$\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \,|\, 16x^2 + y^2 - 8y \geq 0\}$$

$$\mathcal{R}_3 = \{(x, y) \,|\, -4x^2 + y^2 - 4y \leq 0\}$$

$$\mathcal{R}_4 = \{(x, y) \,|\, |x| \leq 2\}\,.$$

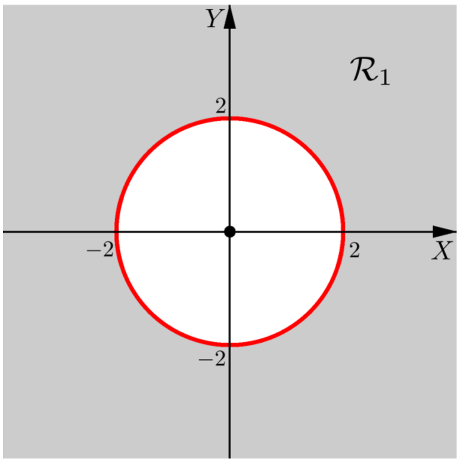

Figura 7: Circunferência $\mathcal{C}_1$ e região $\mathcal{R}_1$.

• Descrição da região $\mathcal{R}_1$.
A região $\mathcal{R}_1$ consiste dos pontos pertencentes ou exteriores à circunferência

$$\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 = 4$$

de centro na origem e raio 2.

• Descrição da região $\mathcal{R}_2$.
Para descrever a região $\mathcal{R}_2$, vamos primeiro determinar a cônica:

$$\mathcal{C}_2 : 16x^2 + y^2 - 8y = 0.$$

Completando o quadrado na equação da curva $\mathcal{C}_2$, obtemos:

$$\begin{aligned} & 16x^2 + y^2 - 8y = 0 \\ \iff & 16x^2 + (y^2 - 8y + 16) = 16 \\ \iff & 16x^2 + (y-4)^2 = 16 \\ \iff & \mathcal{C}_2 : x^2 + \frac{(y-4)^2}{16} = 1\,. \end{aligned}$$

Então $\mathcal{C}_2$ é a elipse de centro $(0, 4)$; reta focal $\ell =$ eixo$-OY$; reta não focal $\ell' : y = 4$; $a^2 = 16$, $b^2 = 1$, ou seja, $a = 4$ e $b = 1$; vértices sobre a reta focal $A_1 = (0, 0)$ e $A_2 = (0, 8)$; vértices sobre a reta não focal $B_1 = (-1, 4)$ e $B_2 = (1, 4)$. Portanto,

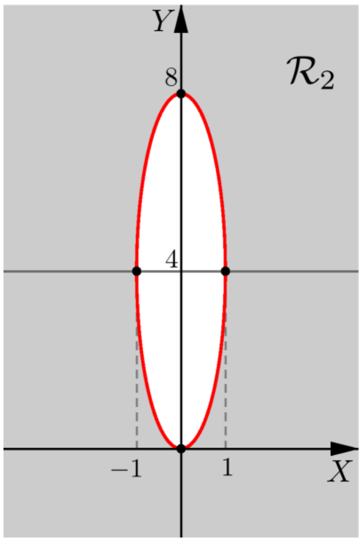

Figura 8: Elipse $\mathcal{C}_2$ e região $\mathcal{R}_2$.

$$\mathcal{R}_2 : 16x^2 + y^2 - 8y \geq 0 \iff \mathcal{R}_2 : x^2 + \frac{(y-4)^2}{16} \geq 1$$

consiste dos pontos do plano exteriores ou sobre a elipse $\mathcal{C}_2$.

• Descrição da região $\mathcal{R}_3$.

Para descrever a região $\mathcal{R}_3$, vamos primeiro identificar a cônica:

$$\mathcal{C}_3 : -4x^2 + y^2 - 4y = 0.$$

Completando o quadrado na equação de $\mathcal{C}_3$, temos

$$\begin{aligned} & -4x^2 + y^2 - 4y = 0 \\ \iff\ & -4x^2 + (y^2 - 4y + 4) = 4 \\ \iff\ & -4x^2 + (y-2)^2 = 4 \\ \iff\ & \mathcal{C}_3 : -x^2 + \frac{(y-2)^2}{4} = 1\,, \end{aligned}$$

que é a equação da hipérbole de centro $(0,2)$, reta focal $\ell =$ eixo$-OY$; reta não focal $\ell' : y = 2$, paralela ao eixo$-OX$; $a^2 = 4$ e $b^2 = 1$, ou seja, $a = 2$ e $b = 1$; vértices $A_1 = (0,0)$ e $A_2 = (0,4)$, e vértices imaginários $B_1 = (-1,2)$ e $B_2 = (1,2)$.

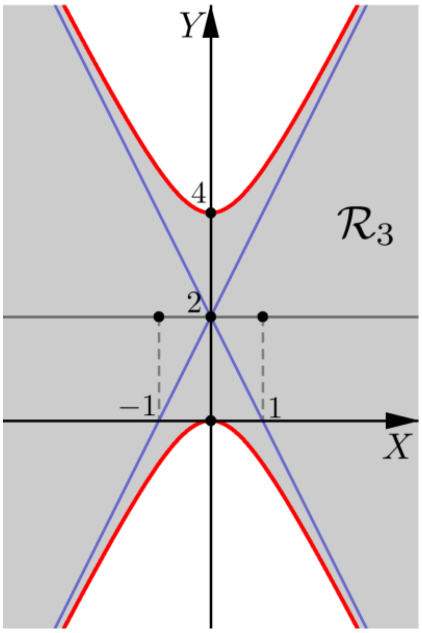

Figura 9: Hipérbole $\mathcal{C}_3$ e região $\mathcal{R}_3$.

A hipérbole divide o plano em três regiões, duas delas limitadas pelos ramos da hipérbole e a outra situada entre eles.

Como as coordenadas do centro $(0, 2)$ satisfazem à inequação $-4x^2+y^2-4y \leq 0$, concluímos que a região $\mathcal{R}_3$ consiste dos pontos entre os ramos da hipérbole ou sobre eles.

• Descrição da região $\mathcal{R}_4$.
Temos que:
$$|x| \leq 2 \Longleftrightarrow -2 \leq x \leq 2.$$
Portanto, a região $\mathcal{R}_4$ é o conjunto
$$\{(x, y) \,|\, -2 \leq x \leq 2,\ y \in \mathbb{R}\},$$
que consiste dos pontos da faixa vertical limitada pelas retas $r_1 : x = 2$ e $r_2 : x = -2$.

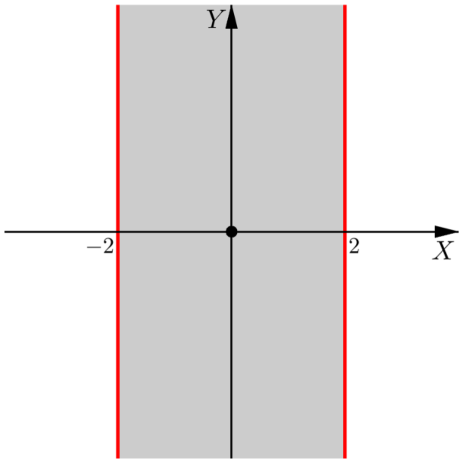

Figura 10: Retas r_1 e r_2 e região R_4.

• Descrição da região $\mathcal{R}$.
Finalmente, a região $\mathcal{R}$ consiste dos pontos exteriores à círculo $\mathcal{C}_1$ e à elipse $\mathcal{C}_2$, que estão entre os ramos da hipérbole $\mathcal{C}_3$ e na faixa $\mathcal{R}_4$, podendo tais pontos pertencerem também a uma das curvas do bordo C_1, C_2, C_3 ou a uma das retas r_1 ou r_2, como vemos nas figuras 11 e 12.

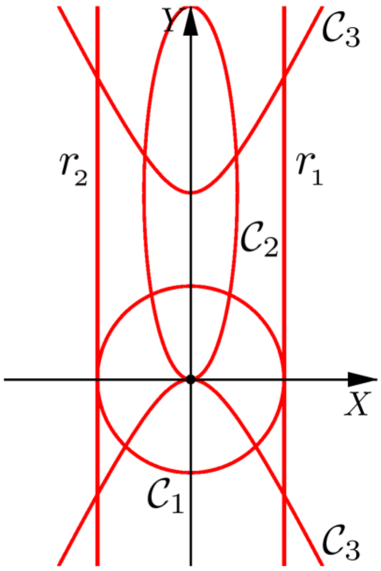

Figura 11: Curvas que limitam a região $\mathcal{R}$.

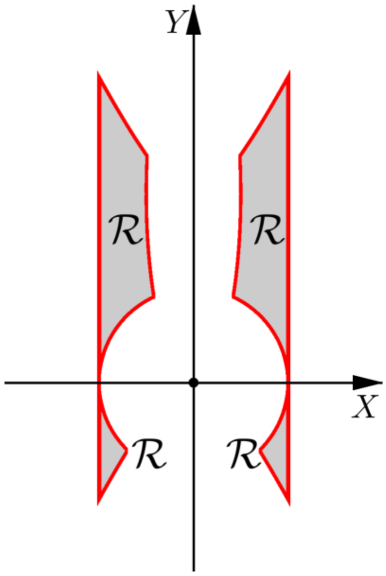

Figura 12: Região $\mathcal{R}$.

□

Exemplo 10

Classifique, em função do parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$, a família de curvas

$$x^2 + (\lambda - 2)y^2 + 2\lambda x + 2(\lambda - 2)y + 3\lambda - 3 = 0\,,$$

indicando, nos casos não degenerados, se a reta focal é paralela ao eixo$-OX$ ou ao eixo$-OY$.

Solução.
Completando os quadrados na equação da família, temos que:

$$\begin{aligned}
& (x^2 + 2\lambda x) + (\lambda - 2)(y^2 + 2y) = 3 - 3\lambda \\
\iff & (x^2 + 2\lambda x + \lambda^2) + (\lambda - 2)(y^2 + 2y + 1) = 3 - 3\lambda + \lambda^2 + \lambda - 2 \\
\iff & (x + \lambda)^2 + (\lambda - 2)(y + 1)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 \\
\iff & (x + \lambda)^2 + (\lambda - 2)(y + 1)^2 = (\lambda - 1)^2\,. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Para fazermos a classificação da família de curvas, precisamos estudar o sinal dos coeficientes $(\lambda - 2)$ e $(\lambda - 1)^2$ da equação (2):

	$-\infty < \lambda < 1$	$\lambda = 1$	$1 < \lambda < 2$	$\lambda = 2$	$2 < \lambda < +\infty$
$\lambda - 2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(\lambda - 1)^2$	$+$	0	$+$	$+$	$+$

Então, para:

- $\lambda \in (-\infty, 1)$, a equação representa uma hipérbole de centro $(-\lambda, -1)$ e reta focal $\ell : y = -1$ paralela ao eixo$-OX$.
- $\lambda = 1$, a equação $(x+1)^2 - (y+1)^2 = 0$ representa o par de retas concorrentes $y + 1 = \pm(x + 1)$ que se cortam no ponto $(-1, -1)$.
- $\lambda \in (1, 2)$, a equação representa uma hipérbole de centro $(-\lambda, -1)$ e reta focal $\ell : y = -1$ paralela ao eixo$-OX$.
- $\lambda = 2$, a equação $(x + 2)^2 = 1$ representa o par de retas $x + 2 = \pm 1$, ou seja, $x = -3$ e $x = -1$, paralelas ao eixo$-OY$.
- $\lambda \in (2, +\infty)$, a equação, que se escreve também na forma

$$\frac{(x+\lambda)^2}{(\lambda-1)^2} + \frac{(y+1)^2}{\dfrac{(\lambda-1)^2}{\lambda-2}} = 1\,,$$

representa:

∘ uma circunferência de centro $(-3,-1)$ e raio 2, se $\lambda = 3$, pois, neste caso, $(\lambda-1)^2 = \dfrac{(\lambda-1)^2}{\lambda-2} = 4$;

∘ uma elipse de centro $(-\lambda,-1)$ e reta focal $\ell : x = -\lambda$, paralela ao eixo$-OY$, se $\lambda \in (2,3)$, pois, neste intervalo, $(\lambda-1)^2 < \dfrac{(\lambda-1)^2}{\lambda-2}$;

∘ uma elipse de centro $(-\lambda,-1)$ e reta focal $\ell : y = -1$ paralela ao eixo$-OX$, se $\lambda \in (3,+\infty)$, pois, neste intervalo, $(\lambda-1)^2 > \dfrac{(\lambda-1)^2}{\lambda-2}$. □

Exemplo 11

Considere os pontos $F = (2,1)$ e $Q = (4,0)$.

(a) *Determine as equações das parábolas de reta focal ℓ perpendicular ao vetor $\overrightarrow{v} = (1,-2)$ e foco F, que contêm o ponto Q.*

(b) *Determine os vértices das parábolas obtidas acima.*

(c) *Faça um esboço das parábolas obtidas no mesmo sistema de eixos ortogonais OXY, indicando todos os seus elementos.*

Solução.

(a) Como a diretriz $\mathcal{L}$ é perpendicular à reta focal ℓ e $\overrightarrow{v} = (1,-2) \perp \ell$, temos que $(2,1) \perp \mathcal{L}$. Então, $\mathcal{L} : 2x + y = m$, para algum $m \in \mathbb{R}$.

Além disso, como $Q = (4,0)$ pertence à parábola, segue que $d(Q,F) = d(Q,\mathcal{L})$. Isto é,

$$\begin{aligned}
\sqrt{(4-2)^2+(0-1)^2} = \frac{|2\times 4 + 0\times 1 - m|}{\sqrt{5}} \quad &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{5} = \frac{|8-m|}{\sqrt{5}}\\
&\Longleftrightarrow \quad |m-8| = 5\\
&\Longleftrightarrow \quad m = 8 \pm 5\,.
\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{L} : 2x + y = 8 \pm 5$.

Caso 1. Parábola $\mathcal{P}_1$ de foco $F = (2, 1)$ e diretriz $\mathcal{L}_1 : 2x + y = 13$.
Neste caso, um ponto $P = (x, y) \in \mathcal{P}_1$ se, e só se, $d(P, F) = d(P, \mathcal{L}_1)$, ou seja,

$$\begin{aligned}
& d(P,F)^2 = d(P,\mathcal{L}_1)^2 \\
\iff \; & (x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{(2x+y-13)^2}{5} \\
\iff \; & 5(x^2+y^2-4x-2y+5) = 4x^2+4xy+y^2-52x-26y+169 \\
\iff \; & \boxed{\mathcal{P}_1 : x^2 - 4xy + 4y^2 + 32x + 16y - 144 = 0}
\end{aligned}$$

Caso 2. Parábola $\mathcal{P}_2$ de foco $F = (2, 1)$ e diretriz $\mathcal{L}_2 : 2x + y = 3$.
Assim, um ponto $P = (x, y) \in \mathcal{P}_2$ se, e só se, $d(P, F) = d(P, \mathcal{L}_2)$, ou seja,

$$\begin{aligned}
& d(P,F)^2 = d(P,\mathcal{L}_2)^2 \\
\iff \; & (x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{(2x+y-3)^2}{5} \\
\iff \; & 5(x^2+y^2-4x-2y+5) = 4x^2+4xy+y^2-12x-6y+9 \\
\iff \; & \boxed{\mathcal{P}_2 : x^2 - 4xy + 4y^2 - 8x - 4y + 16 = 0}
\end{aligned}$$

(b) Consideremos as duas parábolas obtidas no item anterior.

- O vértice V_1 da parábola $\mathcal{P}_1$ é o ponto médio do segmento A_1F, onde $A_1 = (x, y)$ é o ponto de interseção da reta focal $\ell : x - 2y = 0$ com a diretriz $\mathcal{L}_1 : 2x + y = 13$. Então, as coordenadas x e y do ponto A_1 satisfazem ao sistema:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y = 13\,. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, obtemos $x = \dfrac{26}{5}$ e $y = \dfrac{13}{5}$, isto é, $A_1 = \left(\dfrac{26}{5}, \dfrac{13}{5}\right)$.

Logo,

$$V_1 = \frac{A_1 + F}{2} = \frac{\left(\frac{26}{5}, \frac{13}{5}\right) + (2,1)}{2} = \left(\frac{36}{10}, \frac{18}{10}\right) = \left(\frac{18}{5}, \frac{9}{5}\right)\,.$$

- O vértice V_2 da parábola $\mathcal{P}_2$ é o ponto médio do segmento A_2F, onde $A_2 = (x, y)$ é o ponto de interseção da reta focal $\ell : x - 2y = 0$ com a diretriz

$\mathcal{L}_2 : 2x + y = 3$. Logo, as coordenadas x e y do ponto A_2 satisfazem ao sistema:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y = 3\,. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, obtemos $x = \dfrac{6}{5}$ e $y = \dfrac{3}{5}$, isto é, $A_2 = \left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$. Logo,

$$V_2 = \frac{A_2 + F}{2} = \frac{\left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right) + (2,1)}{2} = \left(\frac{16}{10}, \frac{8}{10}\right) = \left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)\,.$$

(c) Na figura 13, mostramos o esboço das parábolas $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ no mesmo sistema de eixos ortogonais OXY.

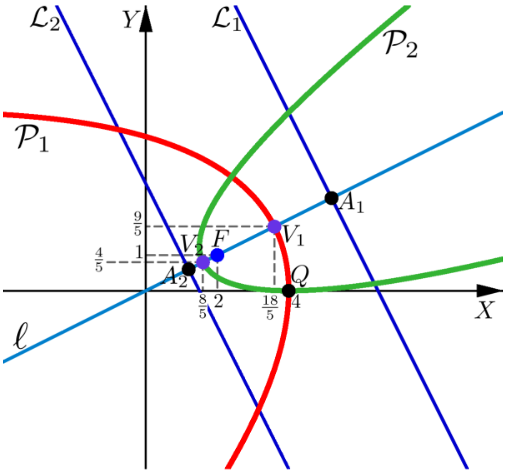

Figura 13: Parábolas $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$.

□

Exemplo 12

Sejam OXY um sistema de eixos ortogonais e $O\overline{X}\,\overline{Y}$ o sistema de eixos ortogonais obtido pela rotação positiva de 45^o dos eixos OX e OY em torno da origem. Uma hipérbole nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ tem centro na origem, um de seus vértices no ponto $(\sqrt{2}, 0)$ e a reta $\overline{y} = 2\overline{x}$ como uma de suas assíntotas.

(a) *Determine a equação da hipérbole nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ e nas coordenadas x e y.*

(b) *Determine o centro, os vértices, os vértices imaginários e as assíntotas* *da hipérbole nas coordenadas x e y.*

(c) *Faça um esboço da curva no sistema de eixos OXY, indicando todos os elementos encontrados no item* **(b)**.

Solução.

(a) Nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, a reta focal ℓ é o eixo$-O\overline{X}$, pois o centro $C = (0,0)$ e o vértice $V = (\sqrt{2}, 0)$ pertencem ao eixo$-O\overline{X}$. Além disso, $a = d(C,V) = \sqrt{2}$ e $\dfrac{b}{a} = 2$, pois $\overline{y} = 2\overline{x}$ é uma assíntota da hipérbole. Então, $b = 2a = 2\sqrt{2}$, e

$$\mathcal{H} : \frac{\overline{x}^2}{2} - \frac{\overline{y}^2}{8} = 1$$

é a equação da hipérbole nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$.
Usando as relações de mudança de coordenadas

$$\begin{cases} \overline{x} = \cos 45^o\, x + \operatorname{sen} 45^o\, y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\[2ex] \overline{y} = -\operatorname{sen} 45^o\, x + \cos 45^o\, y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x+y), \end{cases} \qquad (3)$$

obtemos a equação da hipérbole nas coordenadas x e y:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times \frac{2}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{8} \times \frac{2}{4}(-x+y)^2 = 1 \\ \iff\ & 4(x+y)^2 - (-x+y)^2 = 16 \\ \iff\ & 4(x^2+2xy+y^2) - (x^2-2xy+y^2) = 16 \\ \iff\ & 3x^2 + 10xy + 3y^2 = 16 \\ \iff\ & \boxed{\mathcal{H} : 3x^2 + 10xy + 3y^2 - 16 = 0} \end{aligned}$$

(b) Nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, a hipérbole tem:

- centro: $C = (0,0)$;
- vértices: $A_1 = (-\sqrt{2}, 0)$ e $A_2 = (\sqrt{2}, 0)$;
- vértices imaginários: $B_1 = (0, -2\sqrt{2})$ e $B_2 = (0, 2\sqrt{2})$;
- reta focal: $\ell : \overline{y} = 0$;
- reta não focal: $\ell' : \overline{x} = 0$;

• assíntotas: $\overline{y} = \pm 2\overline{x}$.
Por (3), obtemos que $\ell : -x + y = 0$ é a reta focal; $\ell' : x + y = 0$ é a reta não focal e $\frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y) = \pm 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)$, isto é, $r_- : y = -3x$ e $r_+ : y = -\frac{1}{3}x$ são as assíntotas da hipérbole nas coordenadas x e y.
E, pelas relações de mudança de coordenadas

$$x = \cos 45^o\,\overline{x} - \operatorname{sen} 45^o\,\overline{y} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} - \overline{y})$$

$$y = \operatorname{sen} 45^o\,\overline{x} + \cos 45^o\,\overline{y} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} + \overline{y})\,,$$

obtemos que $C = (0, 0)$ é o centro, $A_1 = (-1, -1)$ e $A_2 = (1, 1)$ são os vértices; $B_1 = (2, -2)$ e $B_2 = (-2, 2)$ são os vértices imaginários da hipérbole nas coordenadas x e y.
(c) Na figura 14 mostramos o esboço da hipérbole $\mathcal{H}$.

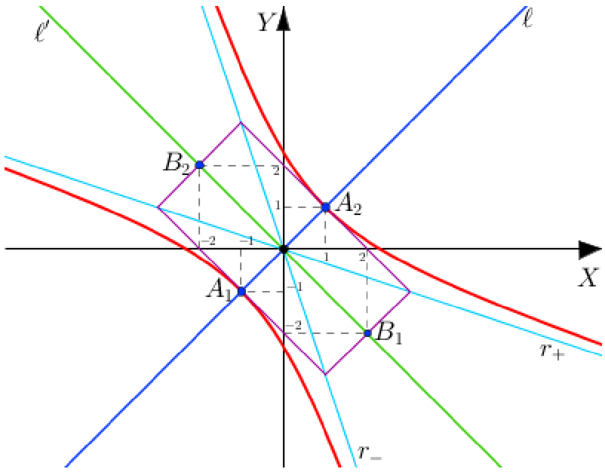

Figura 14: Hipérbole $\mathcal{H} : 3x^2 + 10xy + 3y^2 - 16 = 0$.

□

Exemplo 13

Sejam $V_1 = (7, 1)$ e $V_2 = (2, 5)$ os vértices de uma elipse com reta focal paralela a um dos eixos coordenados.

(a) *Determine o centro, a reta focal, a reta não focal, os vértices e os focos da elipse $\mathcal{E}$, supondo que o vértice V_1 pertença à reta focal.*

(b) *Determine o centro, a reta focal, a reta não focal, os vértices e os focos da elipse $\overline{\mathcal{E}}$, supondo que o vértice V_2 pertença à reta focal.*

(c) *Faça um esboço das duas elipses encontradas acima num mesmo sistema de eixos ortogonais, indicando todos os seus elementos.*

Solução.

Consideremos o retângulo de lados paralelos aos eixos coordenados e vértices nos pontos $V_1 = (7, 1)$ e $V_2 = (2, 5)$.

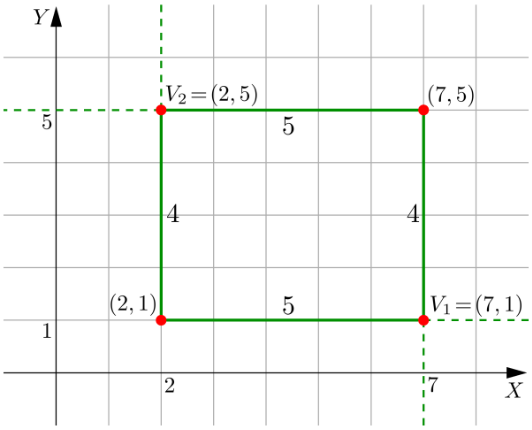

Figura 15: Retângulo de vértices V_1 e V_2.

Como $a > b$ numa elipse, temos que $a = 5$ e $b = 4$ nas elipses de vértices V_1 e V_2 e reta focal paralela a um dos eixos coordenados.

(a) Se o vértice $V_1 = (7, 1)$ pertence à reta focal da elipse, temos que $\ell : y = 1$ é a reta focal, $\ell' : x = 2$ é a reta não focal, $C = (2, 1)$ é o centro, $A_1 = (-3, 1)$ e $A_2 = V_1 = (7, 1)$ são os vértices sobre a reta focal, $B_1 = (2, -3)$ e $B_2 = V_2 = (2, 5)$ são os vértices sobre a reta não focal, $F_1 = (-1, 1)$ e $F_2 = (5, 1)$ são os focos, pois $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 3$, e

$$\mathcal{E} : \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$

é a equação da elipse $\mathcal{E}$.

(b) Se o vértice $V_2 = (2, 5)$ pertence à reta focal da elipse $\overline{\mathcal{E}}$, temos que $\overline{\ell} : y = 5$ é a reta focal, $\overline{\ell}' : x = 7$ é a reta não focal, $\overline{C} = (7, 5)$ é o centro, $\overline{A}_1 = V_2 = (2, 5)$ e $\overline{A}_2 = (12, 5)$ são os vértices sobre a reta focal, $\overline{B}_1 = (7, 9)$ e $B_2 = V_1 = (7, 1)$ são os vértices sobre a reta não focal, $\overline{F}_1 = (4, 5)$ e

$\overline{F}_2 = (10, 5)$ são os focos, e

$$\overline{\mathcal{E}} : \frac{(x-7)^2}{25} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1$$

é a equação da elipse $\overline{\mathcal{E}}$.

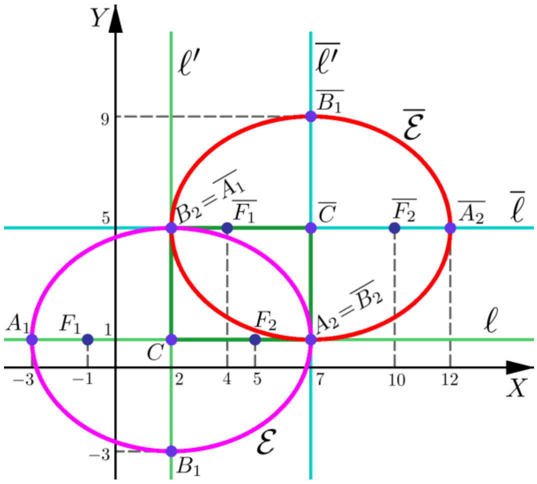

Figura 16: Elipses $\mathcal{E}$ e $\overline{\mathcal{E}}$.

(c) Na figura 16 mostramos as elipses $\mathcal{E}$ e $\overline{\mathcal{E}}$ no mesmo sistema de eixos ortogonais.

□

Exemplo 14

Considere os pontos $A = (4, 1)$ e $B = (3, 2)$.

(a) *Determine as equações e os principais elementos das duas hipérboles que possuem B como vértice imaginário, A como vértice e reta focal paralela a um dos eixos coordenados.*

(b) *Faça um esboço das duas hipérboles num mesmo sistema de eixos ortogonais, indicando todos os seus elementos (menos os focos).*

Solução.

Caso 1. Reta focal ℓ paralela ao eixo$-OX$.

Como $A = (4, 1) \in \ell$ e $B = (3, 2) \in \ell'$, onde ℓ' é a reta não focal, segue que $\ell : y = 1$ e $\ell' : x = 3$. Então, o centro C da hipérbole, ponto de interseção da reta focal com a reta não focal, tem coordenadas $x = 3$ e $y = 1$, isto é, $C = (3, 1)$.

Além disso, $a = d(C, A) = 1$, $b = d(C, B) = 1$ e $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$.

Logo,

$$\mathcal{H} : (x-3)^2 - (y-1)^2 = 1$$

é a equação da hipérbole.

Nessa hipérbole, $F_1 = (3-\sqrt{2}, 1)$ e $F_2 = (3+\sqrt{2}, 1)$ são os focos; $A_1 = (2,1)$ e $A_2 = A = (4,1)$ são os vértices; $B_1 = (3,0)$ e $B_2 = B = (3,2)$ são os vértices imaginários e $y-1 = \pm(x-3)$ são as assíntotas.

Caso 2. Reta focal $\overline{\ell}$ paralela ao eixo$-OY$.

Neste caso, $\overline{\ell} : x = 4$ é a reta focal e $\overline{\ell'} : y = 2$ é a reta não focal da hipérbole $\overline{\mathcal{H}}$, com reta focal paralela ao eixo$-OY$, vértice $A = (4,1)$ e vértice imaginário $B = (3,2)$. Então $\overline{C} = (4,2)$ é o centro, $\overline{a} = d(\overline{C}, A) = 1$, $\overline{b} = d(\overline{C}, B) = 1$ e $\overline{c} = \sqrt{\overline{a}^2 + \overline{b}^2} = \sqrt{2}$, e

$$\overline{\mathcal{H}} : (y-2)^2 - (x-4)^2 = 1$$

é a equação da hipérbole $\overline{\mathcal{H}}$.

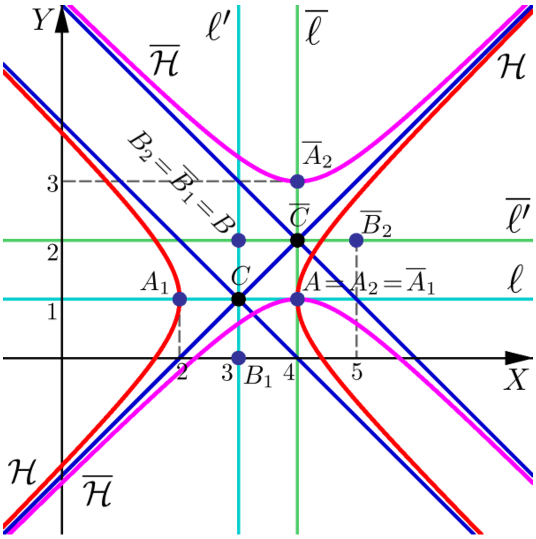

Figura 17: Hipérboles $\mathcal{H}$ e $\overline{\mathcal{H}}$.

Além disso, $\overline{F}_1 = (4, 2-\sqrt{2})$ e $\overline{F}_2 = (4, 2+\sqrt{2})$ são os focos; $\overline{A}_1 = A = (4,1)$ e $\overline{A}_2 = (4,3)$ são os vértices; $\overline{B}_1 = B = (3,2)$ e $\overline{B}_2 = (5,2)$ são os vértices imaginários e $x-4 = \pm(y-2)$ são as assíntotas.

(b) Na figura 17 mostramos as hipérboles $\mathcal{H}$ e $\overline{\mathcal{H}}$ num mesmo sistema de eixos ortogonais.

□

Exemplo 15

Considere as curvas

$$\mathcal{C}_1 : x^2 - 20x + y + 100 = 0\,,$$
$$\mathcal{C}_2 : x^2 - y^2 - 6x = 0\,,$$
$$\mathcal{C}_3 : x^2 + 16y^2 - 6x - 7 = 0\,.$$

(a) *Classifique as curvas e determine todos os seus elementos.*

(b) *Faça um esboço detalhado da região do plano dada pelo sistema de inequações:*

$$\mathcal{R}: \begin{cases} x^2 - 20x + y + 100 \geq 0 \\ x^2 - y^2 - 6x \geq 0 \\ x^2 + 16y^2 - 6x - 7 \geq 0 \\ x \leq 10 \\ y \geq -4\,. \end{cases}$$

Observação: Ache as intersecções de $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ com a reta $y = -4$.

Solução.

(a) Curva $\mathcal{C}_1 : x^2 - 20x + y + 100 = 0$.

Completando o quadrado, a equação de $\mathcal{C}_1$ na forma canônica é dada por:

$$\mathcal{C}_1 : x^2 - 20x = -y - 100$$
$$\mathcal{C}_1 : x^2 - 20x + 100 = -y - 100 + 100$$
$$\mathcal{C}_1 : (x-10)^2 = -y.$$

Logo, $\mathcal{C}_1$ é a parábola de reta focal $\ell : x = 10$, paralela ao eixo$-OY$, vértice $V = (10, 0)$, $4p = 1$, ou seja, $p = \dfrac{1}{4}$, e foco $F = \left(10, -\dfrac{1}{4}\right)$.

Curva $\mathcal{C}_2 : x^2 - 6x - y^2 = 0$.

A equação da curva $\mathcal{C}_2$ se escreve, completando o quadrado, da seguinte forma:

$$\mathcal{C}_2 : x^2 - 6x - y^2 = 0$$
$$\mathcal{C}_2 : (x^2 - 6x + 9) - y^2 = 9$$
$$\mathcal{C}_2 : (x-3)^2 - y^2 = 9$$
$$\mathcal{C}_2 : \frac{(x-3)^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1\,.$$

Logo, $\mathcal{C}_2$ é a hipérbole com reta focal $\ell : y = 0$; reta não focal $\ell' : x = 3$; centro $C = (3, 0)$; $a = b = 3$; $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 3\sqrt{2}$; vértices $A_1 = (0, 0)$ e $A_2 = (6, 0)$; vértices imaginários $B_1 = (3, -3)$ e $B_2 = (3, 3)$; assíntotas

$r_\pm : y = \pm(x-3)$ e focos $F_1 = (3-3\sqrt{2}, 0)$ e $F_2 = (3+3\sqrt{2}, 0)$.

Curva $\mathcal{C}_3 : x^2 - 6x + 16y^2 - 7 = 0$.

Completando o quadrado na equação, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{C}_3 : x^2 - 6x + 16y^2 - 7 = 0\\
&\mathcal{C}_3 : (x^2 - 6x + 9) + 16y^2 = 7 + 9\\
&\mathcal{C}_3 : (x-3)^2 + 16y^2 = 16\\
&\mathcal{C}_3 : \frac{(x-3)^2}{16} + y^2 = 1\,.
\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{C}_3$ é a equação da elipse de reta focal $\ell : y = 0$; reta não focal $\ell' : x = 3$; centro $C = (3, 0)$; $a = 4$ e $b = 1$; $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{15}$; vértices sobre a reta focal $A_1 = (-1, 0)$ e $A_2 = (7, 0)$; vértices sobre a reta não focal $B_1 = (3, -1)$ e $B_2 = (3, 1)$; focos $F_1 = (3 - \sqrt{15}, 0)$ e $F_2 = (3 + \sqrt{15}, 0)$.

(b) A região $\mathcal{R}$ é a interseção das regiões:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}_1 : x^2 - 20x + y + 100 \geq 0\\
&\mathcal{R}_2 : x^2 - y^2 - 6x \geq 0\\
&\mathcal{R}_3 : x^2 + 16y^2 - 6x - 7 \geq 0\\
&\mathcal{R}_4 : x \leq 10\\
&\mathcal{R}_5 : y \geq -4\,.
\end{aligned}$$

Região $\mathcal{R}_1 : x^2 - 20x + y + 100 \geq 0$.

A parábola $\mathcal{C}_1 : x^2 - 20x + y + 100 = 0$ divide o plano em duas regiões disjuntas, uma das quais contém o foco $F = \left(10, -\frac{1}{4}\right)$.

Substituindo as coordenadas do foco na expressão $x^2 - 20x + y + 100$, obtemos:

$$10^2 - 20 \times 10 - \frac{1}{4} + 100 = 100 - 200 - \frac{1}{4} + 100 = -\frac{1}{4} < 0\,.$$

Portanto, $\mathcal{R}_1$ é a união da região determinada pela parábola que não contém o foco F com os pontos da parábola, onde a igualdade na inequação, que define $\mathcal{R}_1$, é satisfeita.

Na figura 18, mostramos a região $\mathcal{R}_1$.

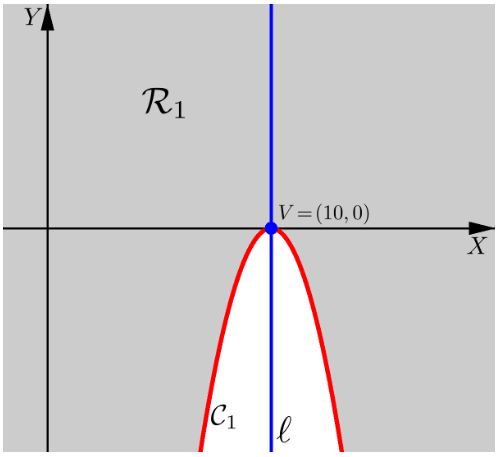

Figura 18: Região $\mathcal{R}_1$.

Região $\mathcal{R}_2 : x^2 - y^2 - 6x \geq 0$.

A hipérbole $\mathcal{C}_2 : x^2 - y^2 - 6x = 0$ divide o plano em três regiões disjuntas, uma das quais contém o centro $C = (3, 0)$ e as outras contêm os focos. A expressão $x^2 - y^2 - 6x$ tem sinal constante em cada uma destas regiões, sendo iguais os sinais nas regiões que contêm os focos.

Substituindo as coordenadas do centro na expressão $x^2 - y^2 - 6x$, obtemos:

$$3^2 - 0^2 - 6 \times 3 = 9 - 0 - 18 = -9 < 0\,.$$

Portanto, $\mathcal{R}_2$ consiste da região determinada pela hipérbole $\mathcal{C}_2$ que contêm os focos, incluindo os ramos da curva $\mathcal{C}_2$, onde a igualdade $x^2 - y^2 - 6x = 0$ é verificada.

Na figura 19, mostramos a região $\mathcal{R}_2$.

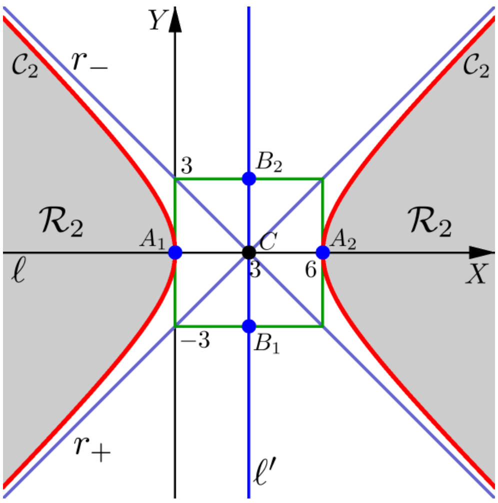

Figura 19: Região $\mathcal{R}_2$.

Região $\mathcal{R}_3 : x^2 + 16y^2 - 6x - 7 \geq 0$.

A elipse $\mathcal{C}_3 : x^2 + 16y^2 - 6x - 7 = 0$ divide o plano em duas regiões, uma das quais (denominada interior) contém o centro $C = (3, 0)$. O sinal da expressão $x^2 + 16y^2 - 6x - 7$ no centro C é:

$$3^2 + 16 \times 0^2 - 6 \times 3 - 7 = 9 + 0 - 18 - 7 = -16 < 0\,.$$

Portanto, a região $\mathcal{R}_3$ é a região exterior à elipse $\mathcal{C}_3$ mais a própria curva, onde a igualdade $x^2 + 16y^2 - 6x - 7 = 0$ é satisfeita.

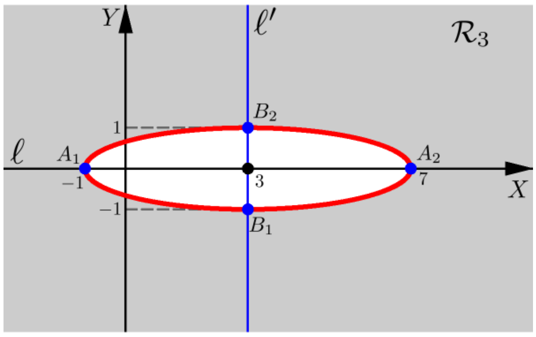

Figura 20: Região $\mathcal{R}_3$.

Regiões $\mathcal{R}_4 : x \leq 10$ e $\mathcal{R}_5 : y \geq -4$.

A região $\mathcal{R}_4$ consiste dos pontos do plano à esquerda da reta $x = 10$, incluindo os pontos da reta, e a região $\mathcal{R}_5$ consiste dos pontos do plano acima da reta horizontal $y = -4$, incluindo os pontos da reta.

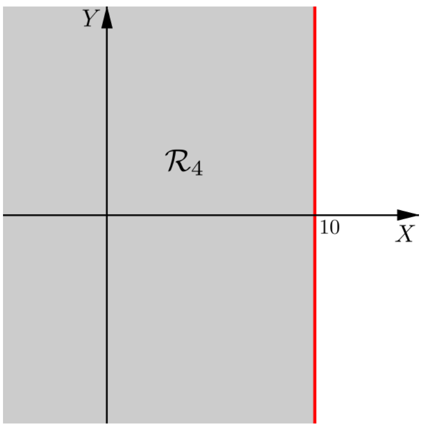

Figura 21: Região $\mathcal{R}_4$.

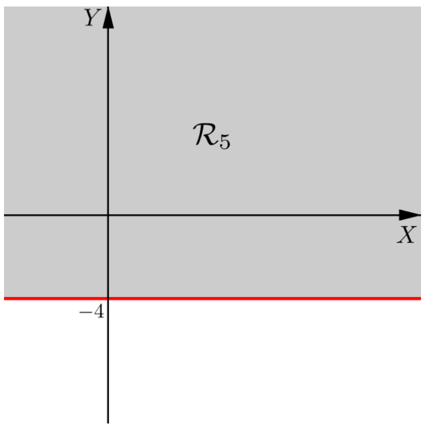

Figura 22: Região $\mathcal{R}_5$.

Região $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_3 \cap \mathcal{R}_4 \cap \mathcal{R}_5$.

Para esboçarmos corretamente a região $\mathcal{R}$, devemos determinar:

- as interseções da parábola $\mathcal{C}_1$ com as retas $x = 10$ e $y = -4$.

A parábola $\mathcal{C}_1$ intersecta a reta vertical $x = 10$ exatamente no vértice $(10, 0)$. Para achar a interseção de $\mathcal{C}_1$ com a reta horizontal $y = -4$, devemos substituir y por -4 na equação $\mathcal{C}_1 : y = -(x-10)^2$:

$$-4 = -(x-10)^2 \Longrightarrow (x-10)^2 = 4 \Longrightarrow x - 10 = \pm 2 \Longrightarrow x = 10 \pm 2\,.$$

Temos, então, que

$$\mathcal{C}_1 \cap \{y = -4\} = \{(8, -4), (12, -4)\}.$$

- as interseções da hipérbole $\mathcal{C}_2$ com as retas $x = 10$ e $y = -4$.

Para achar a interseção de $\mathcal{C}_2$ com a reta horizontal $y = -4$, substituímos y por -4 na equação $\mathcal{C}_2 : (x-3)^2 - y^2 = 9$:

$$(x-3)^2 - (-4)^2 = 9 \Longrightarrow (x-3)^2 - 16 = 9 \Longrightarrow (x-3)^2 = 16 + 9 = 25$$
$$\Longrightarrow x - 3 = \pm 5 \Longrightarrow x = 3 \pm 5\,.$$

Logo,

$$\mathcal{C}_2 \cap \{y = -4\} = \{(-2, -4), (8, -4)\}.$$

Em particular, observe que

$$\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \{y = -4\} = \{(8, -4)\}.$$

Para achar a interseção de $\mathcal{C}_2$ com a reta vertical $x = 10$, substituímos x por 10 na equação $\mathcal{C}_2 : (x-3)^2 - y^2 = 9$:

$$(10-3)^2 - y^2 = 9 \Longrightarrow 7^2 - y^2 = 9 \Longrightarrow y^2 = 49 - 9 = 40 \Longrightarrow y = \pm 2\sqrt{10}\,.$$

Logo,

$$\mathcal{C}_2 \cap \{x = 10\} = \{(10, -2\sqrt{10}), (10, 2\sqrt{10})\}.$$

Nas figuras 23 e 24 mostramos todas as curvas envolvidas e a região $\mathcal{R}$. □

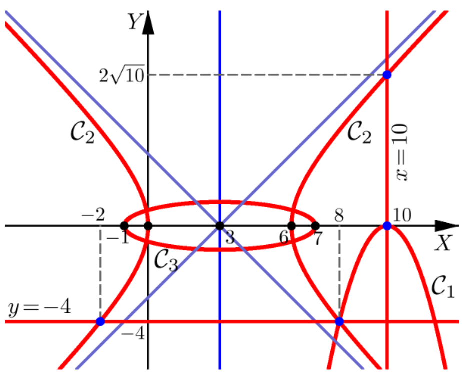

Figura 23: Curvas $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$.

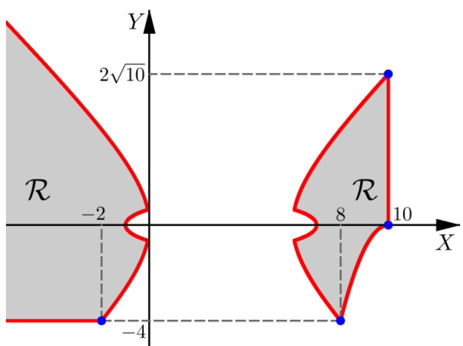

Figura 24: Região $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_3 \cap \mathcal{R}_4 \cap \mathcal{R}_5$.

Exemplo 16

Classifique, em função do parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$, a família de curvas

$$(\lambda-1)x^2+(\lambda-2)y^2-2\lambda(\lambda-1)x+\lambda^3-2\lambda^2-2\lambda+3=0\,,$$

indicando, nos casos não degenerados, se a reta focal é paralela ao eixo$-OX$ ou ao eixo$-OY$.

Solução.
Completando o quadrado, temos que:

$$\begin{aligned}
& (\lambda-1)x^2+(\lambda-2)y^2-2\lambda(\lambda-1)x+\lambda^3-2\lambda^2-2\lambda+3=0\\
\iff\ & (\lambda-1)(x^2-2\lambda x)+(\lambda-2)y^2=-\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda-3\\
\iff\ & (\lambda-1)(x^2-2\lambda x+\lambda^2)+(\lambda-2)y^2=-\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda-3+\lambda^2(\lambda-1)\\
\iff\ & (\lambda-1)(x-\lambda)^2+(\lambda-2)y^2=-\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda-3+\lambda^3-\lambda^2\\
\iff\ & (\lambda-1)(x-\lambda)^2+(\lambda-2)y^2=\lambda^2+2\lambda-3\\
\iff\ & (\lambda-1)(x-\lambda)^2+(\lambda-2)y^2=(\lambda-1)(\lambda+3)\,.
\end{aligned}$$

Para fazermos a classificação, precisamos estudar o sinal dos coeficientes $\lambda-1$, $\lambda-2$ e $(\lambda-1)(\lambda+3)$ da equação:

	$-\infty<\lambda<-3$	$\lambda=-3$	$-3<\lambda<1$	$\lambda=1$	$1<\lambda<2$	$\lambda=2$	$2<\lambda<+\infty$
$\lambda-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\lambda-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(\lambda-1)(\lambda+3)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$

Então, para:

• $\lambda\in(-\infty,-3)$, a equação representa o conjunto vazio, pois $(\lambda-1)(x-\lambda)^2\leq 0$, $(\lambda-2)y^2\leq 0$ e $(\lambda+3)(\lambda-1)>0$.

• $\lambda=-3$, a equação $-4(x+3)^2-5y^2=0$ representa o conjunto unitário que consiste do ponto $(-3,0)$.

• $\lambda\in(-3,1)$, a equação, que se escreve também na forma

$$\frac{(x-\lambda)^2}{\dfrac{(\lambda-1)(\lambda+3)}{\lambda-1}}+\frac{y^2}{\dfrac{(\lambda-1)(\lambda+3)}{\lambda-2}}=1\,,$$

representa uma elipse com centro $(\lambda,0)$ e reta focal igual ao eixo$-OX$, pois

$$\frac{(\lambda-1)(\lambda+3)}{\lambda-1}=\frac{(1-\lambda)(\lambda+3)}{1-\lambda}>\frac{(1-\lambda)(\lambda+3)}{2-\lambda}=\frac{(\lambda+3)(\lambda-1)}{\lambda-2}>0\,,$$

uma vez que $0<1-\lambda<2-\lambda$ e $\lambda+3>0$ para λ neste intervalo.

• $\lambda = 1$, a equação $-y^2 = 0$, ou seja, $y = 0$, representa uma reta (o eixo$-OX$).

• $\lambda \in (1, 2)$, a equação representa uma hipérbole de centro $(\lambda, 0)$ e reta focal igual ao eixo$-OX$, pois

$$\frac{(\lambda-1)(\lambda+3)}{\lambda-1} > 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{(\lambda-1)(\lambda+3)}{\lambda-2} < 0\,,$$

para todo λ neste intervalo.

• $\lambda = 2$, a equação $(x-2)^2 = 5$, ou seja, $x = 2 \pm \sqrt{5}$, representa um par de retas paralelas ao eixo$-OY$.

• $\lambda \in (2, +\infty)$, a equação, que se escreve na forma

$$\frac{(x-\lambda)^2}{\dfrac{(\lambda-1)(\lambda+3)}{\lambda-1}} + \frac{y^2}{\dfrac{(\lambda-1)(\lambda+3)}{\lambda-2}} = 1\,,$$

representa uma elipse de centro $(\lambda, 0)$ e reta focal paralela ao eixo$-OY$, pois $\lambda - 1 > \lambda - 2 > 0$ e $(\lambda-1)(\lambda+3) > 0$ para todo λ neste intervalo. $\square$

Exemplo 17

Seja $\mathcal{P}$ uma parábola com reta focal paralela ao eixo$-OX$ e foco $F = (0, 3)$, que intersecta o eixo$-OX$ no ponto $(4, 0)$ e o eixo$-OY$ no ponto $(0, 2)$.

(a) *Determine o vértice, a diretriz e a equação da parábola $\mathcal{P}$.*

(b) *Faça um esboço de $\mathcal{P}$, indicando seus elementos.*

Solução.

(a) Como a reta focal ℓ da parábola é paralela ao eixo$-OX$ e o foco $F = (0, 3)$ pertence a ℓ, temos que $\ell : y = 3$, $V = (x_0, 3)$ é o vértice, para algum $x_0 \in \mathbb{R}$, e

$$(y-3)^2 = \pm 4p(x - x_0)$$

é a forma da equação de $\mathcal{P}$.

Além disso, como $\mathcal{P} \cap \text{eixo} - OX = \{(4, 0)\}$ e $\mathcal{P} \cap \text{eixo} - OY = \{(0, 2)\}$, obtemos:

$$(0-3)^2 = \pm 4p(4 - x_0) \qquad \text{e} \qquad (2-3)^2 = \pm 4p(0 - x_0)\,,$$

isto é,

$$9 = \pm 4p(4 - x_0) \qquad \text{e} \qquad 1 = \pm 4p(-x_0)\,.$$

Logo, $9 = \pm 16p \pm 4p(-x_0) = \pm 16p + 1$, ou seja, $8 = \pm 16p$.

Sendo $p > 0$, concluímos que $8 = 16p$, isto é, $p = \dfrac{1}{2}$, e $1 = 4p(-x_0) = -2x_0$, ou seja, $x_0 = -\dfrac{1}{2}$.

Obtemos, assim, o vértice $V = \left(-\dfrac{1}{2}, 3\right)$ da parábola e sua equação:

$$\mathcal{P} : (y-3)^2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

A diretriz de $\mathcal{P}$ é a reta $\mathcal{L} : x = -\dfrac{1}{2} - p = -1$, pois $\mathcal{L}$ é perpendicular a ℓ, o foco F está à direita de V e $d(V, \mathcal{L}) = p = \dfrac{1}{2}$.

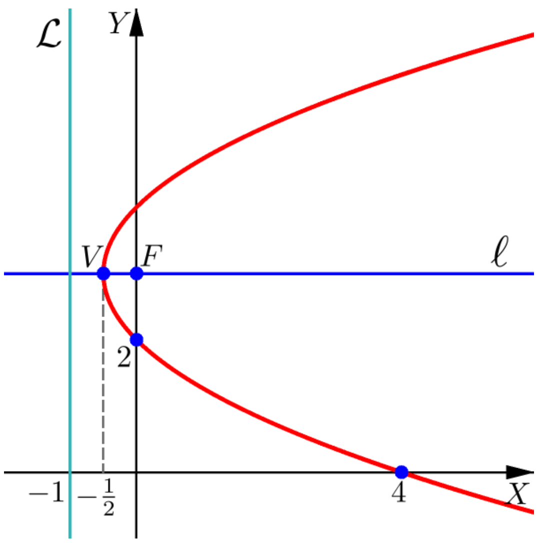

Figura 25: Parábola $\mathcal{P} : (y-3)^2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

(b) Na figura 25 mostramos o gráfico de $\mathcal{P}$ e seus principais elementos.

$\square$

Exemplo 18

Esboçe, detalhadamente, a região do plano dada pela inequação:

$$\mathcal{R} : (|x| - 4)(4x^2 + 9y^2 - 40x - 54y + 145) < 0.$$

Solução.

Completando o quadrado na equação

$$4x^2 + 9y^2 - 40x - 54y + 145 = 0,$$

obtemos:

$$\begin{aligned} & 4(x^2-10x)+9(y^2-6y)=-145 \\ \iff\ & 4(x^2-10x+25)+9(y^2-6y+9)=-145+100+81 \\ \iff\ & 4(x-5)^2+9(y-3)^2=36 \\ \iff\ & \frac{(x-5)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1\,, \end{aligned}$$

que é a equação da elipse de centro $C=(5,3)$, reta focal $\ell : y=3$ (paralela ao eixo$-OX$), $a=3$, $b=2$, vértices sobre a reta focal $A_1=(2,3)$ e $A_2=(8,3)$, e vértices sobre a reta não focal $B_1=(5,1)$ e $B_2=(5,5)$.
Então, a inequação, que define a região $\mathcal{R}$, pode ser escrita na forma:

$$\mathcal{R} : (|x|-4)\left(\frac{(x-5)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}-1\right)<0.$$

Assim, $\mathcal{R}=\mathcal{R}_1\cup\mathcal{R}_2$, onde:

$$\mathcal{R}_1 : \begin{cases} |x|-4<0 \\ \dfrac{(x-5)^2}{9}+\dfrac{(y-3)^2}{4}-1>0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_2 : \begin{cases} |x|-4>0 \\ \dfrac{(x-5)^2}{9}+\dfrac{(y-3)^2}{4}-1<0. \end{cases}$$

A região $\mathcal{R}_1$,

$$\mathcal{R}_1=\{(x,y)|\,x\in(-4,4)\,\}\cap\left\{\,(x,y)\,|\,\frac{(x-5)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}>1\,\right\}\,,$$

consiste dos pontos exteriores à elipse contidos na faixa limitada pelas retas verticais $x=-4$ e $x=4$, excluindo os pontos da elipse e das retas.
Na figura 26 mostramos a região $\mathcal{R}_1$.

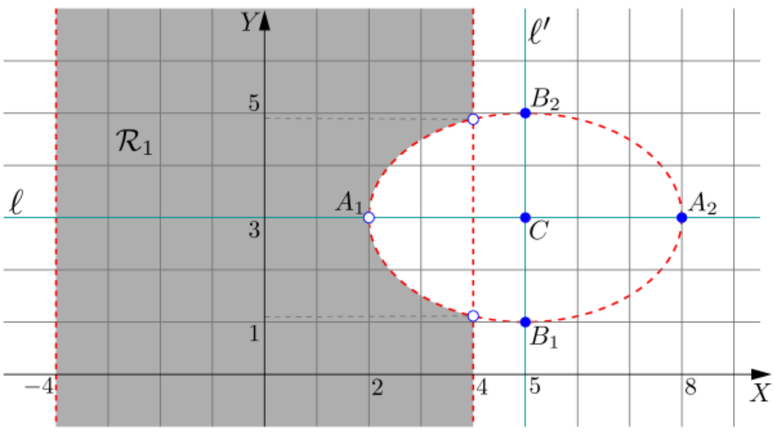

Figura 26: Região $\mathcal{R}_1$.

A região $\mathcal{R}_2$,

$$\mathcal{R}_2 = \{\, (x,y) \,|\, x \in (-\infty, -4) \cup (4, +\infty) \,\} \cap \left\{ (x,y) \,|\, \frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} < 1 \right\},$$

consiste dos pontos exteriores à faixa limitada pelas retas $x = -4$ e $x = 4$ que estão na região interior à elipse, excluindo os pontos das retas e da elipse. Na figura 27 mostramos a região $\mathcal{R}_2$:

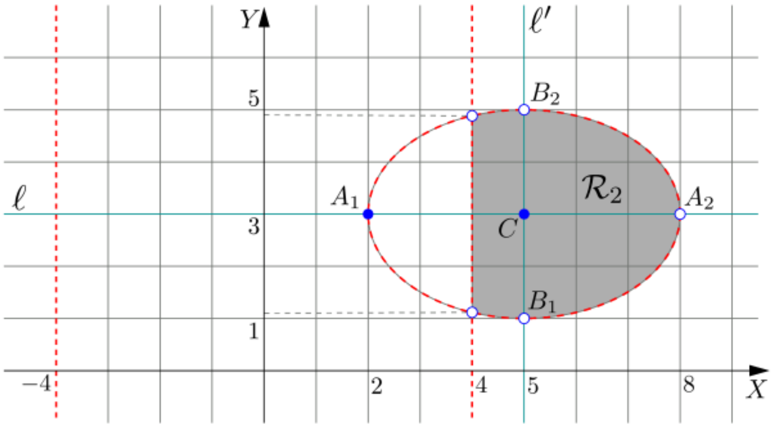

Figura 27: Região $\mathcal{R}_2$.

Portanto, o esboço da região $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ é:

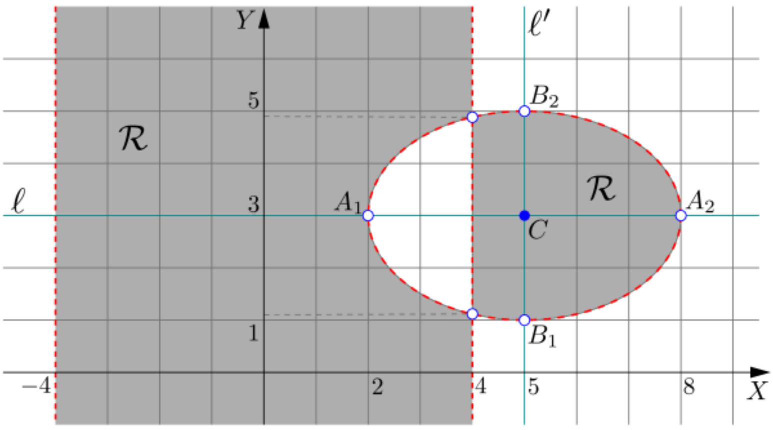

Figura 28: Região $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$.

□

Exemplo 19

Verifique que a equação do segundo grau

$$-7x^2 + 8xy - y^2 + \sqrt{5}(-x + y) = 0 \tag{4}$$

representa um par de retas concorrentes e determine suas equações.

Solução.

A equação tem coeficientes:

$$A=-7\,,B=8\,,C=-1\,,D=-\sqrt{5}\,,E=\sqrt{5}\text{ e }F=0\,.$$

Como $A\neq C$, devemos girar o eixo$-OX$ e o eixo$-OY$ de um ângulo θ, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$, no sentido positivo, tal que $\operatorname{tg}2\theta=\dfrac{B}{A-C}=\dfrac{8}{-7-(-1)}=-\dfrac{8}{6}=-\dfrac{4}{3}$, e escrever a equação nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ do novo sistema de eixos ortogonais $O\overline{X}\,\overline{Y}$, obtido após a rotação positiva de ângulo θ do sistema de eixos ortogonais OXY.

Sendo $\operatorname{tg}2\theta=-\dfrac{4}{3}<0$, temos que $\cos 2\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{16}{9}}}=-\dfrac{3}{5}$. Logo,

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\qquad\text{e}\qquad\operatorname{sen}\theta=\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\,.$$

Efetuando a mudança de coordenadas dada pelas relações

$$\begin{cases}x=\cos\theta\,\overline{x}-\operatorname{sen}\theta\,\overline{y}\\ y=\operatorname{sen}\theta\,\overline{x}+\cos\theta\,\overline{y}\end{cases},\qquad\text{ou seja,}\qquad\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\overline{x}-2\,\overline{y})\\[2ex] y=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2\overline{x}+\overline{y})\,,\end{cases}$$

na equação (4), obtemos a equação nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$

$$\overline{A}\,\overline{x}^2+\overline{C}\,\overline{y}^2+\overline{D}\,\overline{x}+\overline{E}\,\overline{y}+\overline{F}=0\,,$$

onde $\overline{F}=F=0$,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\overline{A}&0\\0&\overline{C}\end{pmatrix}&=\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7&4\\4&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&2\\18&-9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5&0\\0&-45\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-9\end{pmatrix}\end{aligned}$$

e

$$\begin{pmatrix} \overline{D} \\ \overline{E} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Assim, a equação nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ é:

$$\overline{x}^2 - 9\overline{y}^2 + \overline{x} + 3\overline{y} = 0\,.$$

Completando os quadrados, obtemos:

$$\begin{aligned}
(\overline{x}^2 + \overline{x}) - 9(\overline{y}^2 - \frac{1}{3}\overline{y}) = 0 \iff & (\overline{x}^2 + \overline{x} + \frac{1}{4}) - 9(\overline{y}^2 - \frac{1}{3}\overline{y} + \frac{1}{36}) = \frac{1}{4} - 9 \times \frac{1}{36} \\
\iff & (\overline{x} + \frac{1}{2})^2 - 9(\overline{y} - \frac{1}{6})^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \\
\iff & (\overline{x} + \frac{1}{2})^2 = 9(\overline{y} - \frac{1}{6})^2 \\
\iff & \overline{x} + \frac{1}{2} = \pm 3(\overline{y} - \frac{1}{6})\,.
\end{aligned}$$

Logo, nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, a equação (4) representa o par de retas concorrentes:

$$\overline{x} + \frac{1}{2} = 3(\overline{y} - \frac{1}{6}) \qquad \text{e} \qquad \overline{x} + \frac{1}{2} = -3(\overline{y} - \frac{1}{6})\,,$$

ou seja,

$$\overline{x} - 3\overline{y} = -1 \qquad \text{e} \qquad \overline{x} + 3\overline{y} = 0\,.$$

Para achar as equações das retas nas coordenadas x e y, devemos usar as relações de mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} \overline{x} = \cos\theta\, x + \operatorname{sen}\theta\, y \\ \overline{y} = -\operatorname{sen}\theta\, x + \cos\theta\, y \end{cases}, \qquad \text{ou seja,} \qquad \begin{cases} \overline{x} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x + 2\,y) \\ \overline{y} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2x + y)\,. \end{cases}$$

Substituindo $\overline{x}$ e $\overline{y}$ nas equações das retas, obtemos:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y) - 3 \times \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x + y) = -1$$

e

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y) + 3 \times \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x + y) = 0\,,$$

ou seja,

$$7x - y = -\sqrt{5} \qquad \text{e} \qquad -x + y = 0\,.$$

□

Capítulo 19

Coordenadas polares

Neste capítulo, veremos que há outra maneira de expressar a posição de um ponto no plano, distinta da forma cartesiana. Embora os sistemas cartesianos sejam muito utilizados, há curvas no plano cuja equação toma um aspecto muito simples em relação a um referencial não cartesiano.

Definição 1

Um *sistema de coordenadas polares* $O\rho\theta$ *no plano* consiste de um ponto O, denominado *polo* ou *origem*, e de uma semirreta OA, com origem em O, denominada *eixo polar*.

Dado um ponto P do plano, suas coordenadas, neste sistema, são os valores ρ e θ, onde ρ é a distância de P a O e θ é a medida do ângulo do eixo polar para a semirreta OP. Escrevemos:

$$\boxed{P = (\rho, \theta)}$$

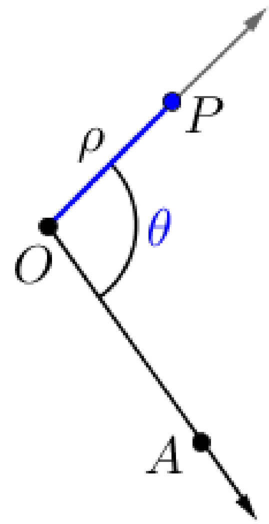

Figura 1: Coordenadas polares.

Convencionamos que a medida do ângulo tomada de OA para OP no sentido anti-horário é positiva e negativa no sentido horário.

Observação 1

(I) A primeira coordenada polar ρ de um ponto distinto do polo é sempre maior que zero, pois ela representa a distância do ponto ao polo. Mas podemos tomar também valores negativos para ρ, convencionando-se, neste caso, marcar a distância $|\rho|$ na semirreta oposta, ou seja, o ponto $P = (\rho, \theta)$, com $\rho < 0$, corresponde ao ponto $P = (-\rho, \theta + \pi)$.

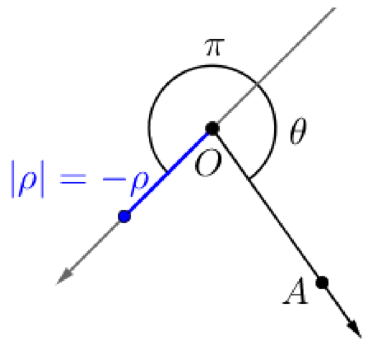

Figura 2: $(\rho, \theta) = (-\rho, \theta + \pi)$

(II) Se a primeira coordenada polar de um ponto for zero, então este ponto é o polo. O ângulo do polo não está definido.

(III) Podemos usar a medida em radianos ou em graus para os ângulos. Por exemplo, $P = (2, 30^o) = (2, \pi/6)$.

(IV) O par (ρ, θ) determina, de maneira única, um ponto do plano. No entanto, um ponto no plano pode ser determinado por meio de várias coordenadas polares distintas, pois, de acordo com a construção acima, as medidas θ e $\theta + 2\pi k$, onde $k \in \mathbb{Z}$, estão associadas ao mesmo ângulo e, portanto, (ρ, θ) e $(\rho, \theta + 2\pi k)$ representam o mesmo ponto do plano. Além disso, pela observação **(I)**, como $(\rho, \theta) = (-\rho, \theta + \pi)$ se $\rho < 0$, então $(-\rho, \theta + \pi) = (\rho, \theta + 2\pi) = (\rho, \theta)$ se $\rho > 0$. Ou seja, $(\rho, \theta) = (-\rho, \theta + \pi)$ para todo $\rho \in \mathbb{R}$.

Assim, $(\rho, \theta) = (-\rho, \theta + (2k + 1)\pi)$, quaisquer que sejam $k \in \mathbb{Z}$ e $\rho \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1

No sistema de coordenadas polares $O\rho\theta$ mostrado na figura 3,

Figura 3: Sistema $O\rho\theta$

localize os seguintes pontos e determine outras coordenadas polares que os representem:

(a) $P_1 = (1, 0^o)$.

Solução.

Figura 4: Ponto P_1 no sistema $O\rho\theta$

Podemos representar também P_1 das seguintes maneiras: $P_1 = (-1, 180^o) = (1, 360^o\, k)$, $k \in \mathbb{Z}$. □

(b) $P_2 = (4, -\pi/4)$.

Solução.

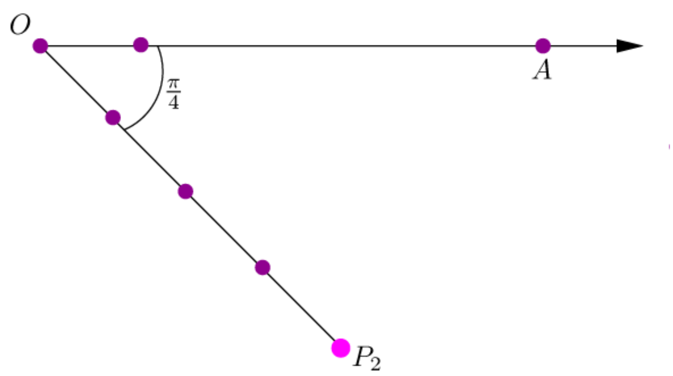

Figura 5: Ponto P_2 no sistema $O\rho\theta$

Por exemplo, $P_2 = (-4, -\pi/4 + \pi) = (4, -\pi/4 + 2\pi k)$, para $k \in \mathbb{Z}$, são outras maneiras de representar o ponto P_2. □

(c) $P_3 = (-1, 0^o)$.

Solução.

Figura 6: Ponto P_3 no sistema $O\rho\theta$

Neste caso, como $\rho = -1$, temos que $P_3 = (1, 0^o + 180^o) = (1, 180^o) = (1, \pi) = (1, \pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$. □

(d) $P_4 = (-2, \pi/3)$.

Solução.

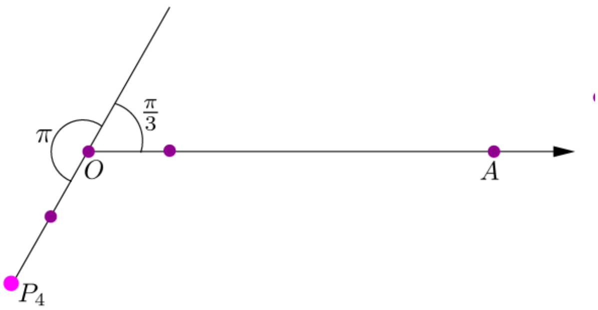

Figura 7: Ponto P_4 no sistema $O\rho\theta$

Sendo $\rho < 0$, temos que $P_4 = (2, \pi/3 + \pi) = (2, 4\pi/3 + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$. □

Exemplo 2

Seja $O\rho\theta$ um sistema de coordenadas polares no plano. Determine os pontos $P = (\rho, \theta)$ do plano que satisfazem à equação $\rho = 3$.

Solução.
Como na equação só figura a variável ρ, a outra, θ, é arbitrária.
Isso significa que a equação só estabelece condição sobre a distância do ponto ao eixo polar, não importando a medida do ângulo.
Portanto, os pontos do plano que satisfazem à equação são aqueles cuja distância ao polo O é igual a 3.
O conjunto solução é, portanto, o círculo de centro O e raio 3 (Figura 8).

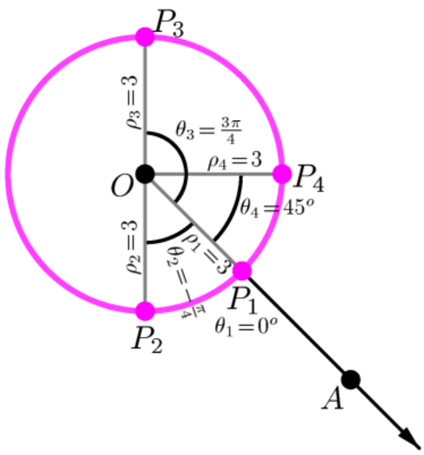

Figura 8: Pontos com $\rho = 3$.

□

Observação 2

Pelo primeiro item da observação 1, $\rho = -3$ também é uma equação polar do círculo acima. Em geral, $\rho = a$ é a equação polar de um círculo de raio $|a|$ centrado na origem.

Exemplo 3

Seja $O\rho\theta$ um sistema de coordenadas polares no plano. Determine o conjunto r dos pontos $P = (\rho, \theta)$ do plano que satisfazem à equação $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Solução.

Novamente, como na equação só figura uma variável, a outra é arbitrária. Logo,

$$r = \{(\rho, \theta) \,|\, \theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{e} \quad \rho \in \mathbb{R}\},$$

ou seja, r é a reta que passa pelo polo O e tem inclinação $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ em relação à semirreta OA (Figura 9).

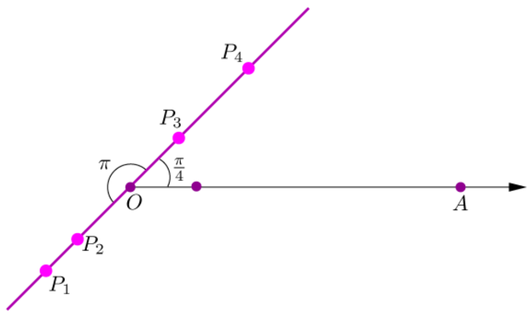

Figura 9: Pontos $P_1, \ldots, P_4$ na reta r.

□

Observação 3

Qualquer reta que passa pelo polo O tem equação polar da forma $\theta = \theta_0$, onde θ_0 é uma constante. Além disso, a equação $\theta = \theta_0 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, representa a mesma reta no plano.

1. Relações entre coordenadas polares e coordenadas cartesianas.

Seja $O\rho\theta$ um sistema de coordenadas polares no plano. Consideremos o sistema cartesiano ortogonal OXY tal que o eixo polar seja o semieixo positivo OX e o eixo$-OY$ seja obtido rotacionando o eixo$-OX$ de 90^o no sentido anti-horário.

Seja $P \neq O$ um ponto no plano com coordenadas ρ e θ no sistema $O\rho\theta$ e coordenadas x e y no sistema OXY. As relações entre estas coordenadas são dadas por:

$$\boxed{x = \rho\cos\theta \quad \text{e} \quad y = \rho\,\text{sen}\,\theta}$$

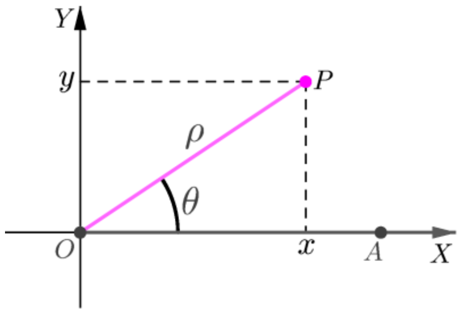

Figura 10: Sistemas polar $O\rho\theta$ e cartesiano OXY.

Destas relações, obtemos:

$$x^2 = \rho^2\cos^2\theta\,,\ y^2 = \rho^2\,\text{sen}^2\,\theta\,,\ \cos\theta = \frac{x}{\rho}\,,\ \text{sen}\,\theta = \frac{y}{\rho}\ \text{ e }\ \frac{y}{x} = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \text{tg}\,\theta\,,$$

das quais concluímos:

$$\boxed{\rho = \sqrt{x^2+y^2}\,, \quad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \quad \text{sen}\,\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{e} \quad \text{tg}\,\theta = \frac{y}{x}}$$

De fato, para obter a primeira relação, basta observar que

$$x^2 + y^2 = \rho^2(\cos^2\theta + \text{sen}^2\,\theta) = \rho^2\,,$$

o que implica $\rho = |\rho| = \sqrt{x^2+y^2}$, pois $\rho \geq 0$. As outras relações são obtidas substituindo $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ nas equações $\cos\theta = \dfrac{x}{\rho}$ e $\text{sen}\,\theta = \dfrac{y}{\rho}$.

Pela observação 1, podemos tomar $\rho < 0$. Neste caso, teremos:

$$\rho' = -\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

Portanto, devemos considerar o ângulo θ' tal que $\cos\theta' = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e $\text{sen}\,\theta' = -\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ para continuarem válidas as igualdades $x = \rho'\cos\theta'$ e $y = \rho'\,\text{sen}\,\theta'$.

Como $\cos\theta' = -\cos\theta$ e $\text{sen}\,\theta' = -\,\text{sen}\,\theta$, vemos que $\theta' = \theta + \pi$, o que justifica a convenção feita anteriormente de que (ρ,θ) e $(-\rho,\theta+\pi)$ representam o mesmo ponto em coordenadas polares.

Convenção: *Daqui em diante, sempre que fizermos referência a um sistema polar $O\rho\theta$ e a um sistema cartesiano OXY, no mesmo contexto, admitiremos que o semieixo OX positivo é o eixo polar, caso este último não tenha sido definido explicitamente.*

Exemplo 4

Determine as coordenadas cartesianas ou polares dos seguintes pontos:

(a) $P = (\rho, \theta) = (2, \pi/2)$.

Solução.

Como $\rho = 2$ e $\theta = \pi/2$, temos que

$$x = \rho \cos\theta = 2\cos\pi/2 = 0$$

$$y = \rho \operatorname{sen}\theta = 2\operatorname{sen}\pi/2 = 2$$

são as coordenadas cartesianas de P.

□

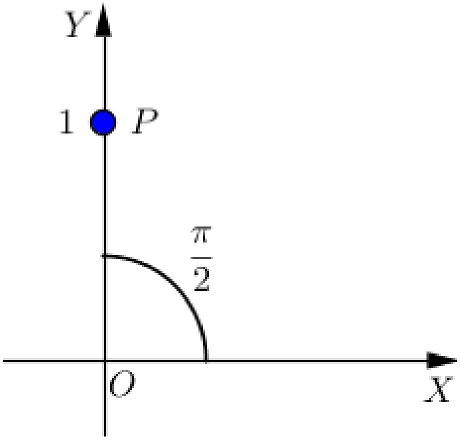

Figura 11: $P = (2, \pi/2)$ em coordenadas polares e $P = (0, 2)$ em coordenadas cartesianas

(b) $P = (x, y) = (1, 1)$.

Solução.

Sendo $x = 1$ e $y = 1$, temos que

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, ou seja, $\theta = \pi/4$ ou $\theta = \pi/4 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Então,

$P = (\rho, \theta) = (\sqrt{2}, \pi/4) = (\sqrt{2}, \pi/4 + 2\pi k)$

é o ponto P dado em coordenadas polares.

Também

$$\left(-\sqrt{2}, \pi/4 + (2k+1)\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z},$$

é outra representação de P em coordenadas polares.

□

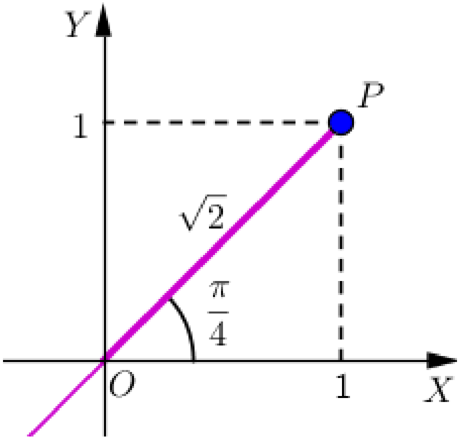

Figura 12: $P = (1, 1)$ em coordenadas cartesianas e $P = (\sqrt{2}, \pi/4)$ em coordenadas polares

(c) $P = (\rho, \theta) = (-3, \pi/2)$.

Solução.

Como $P = (-3, \pi/2) = (3, \pi/2+\pi) = (3, 3\pi/2)$, vemos que

$$x = \rho\cos\theta = -3\cos\frac{\pi}{2} = 3\cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

$$y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta = -3\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2} = 3\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{2} = -3$$

são as coordenadas cartesianas de P.

□

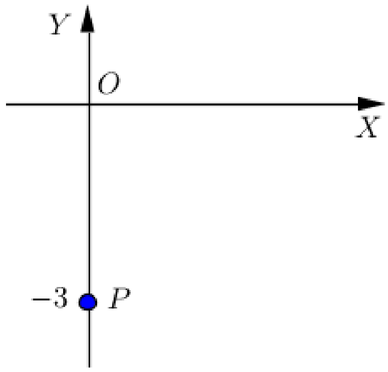

Figura 13: $P = (-3, \pi/2)$ em coordenadas polares e $P = (0, -3)$ em coordenadas cartesianas

(d) $P = (\rho, \theta) = (-\sqrt{2}, 5\pi/4)$.

Solução.

Sendo $P = (-\sqrt{2}, 5\pi/4) = (\sqrt{2}, 5\pi/4 + \pi) = (\sqrt{2}, 9\pi/4) = (\sqrt{2}, \pi/4)$, temos que

$$x = -\sqrt{2}\cos 5\pi/4 = \sqrt{2}\cos\pi/4 = 1$$

$$y = -\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,5\pi/4 = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\pi/4 = 1$$

são as coordenadas cartesianas do ponto P.

□

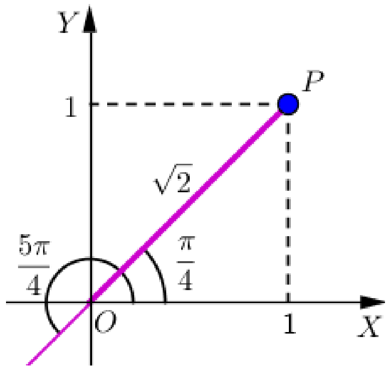

Figura 14: Ponto $P = (-\sqrt{2}, 5\pi/4)$ em coordenadas polares e $P = (1, 1)$ em coordenadas cartesianas

(e) $P = (x, y) = (4, 5)$.

Solução.

Como $x = 4$ e $y = 5$,

$$\rho = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41},$$

$$\cos\theta_0 = \frac{4}{\sqrt{41}} \text{ e } \mathrm{sen}\,\theta_0 = \frac{5}{\sqrt{41}}.$$

Portanto,

$$(\rho, \theta) = (\sqrt{41}, \theta_0) = (-\sqrt{41}, \theta_0 + \pi)$$

é o ponto P dado em coordenadas polares.

□

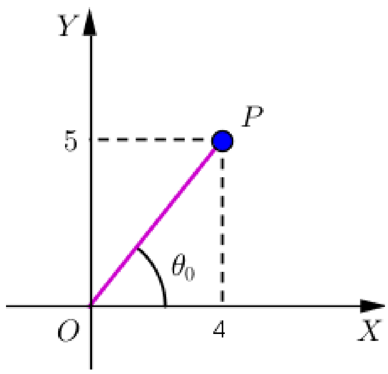

Figura 15: $P = (4, 5)$ em coordenadas cartesianas e $P = (\sqrt{41}, \theta_0)$ em coordenadas polares

(f) $P = (x, y) = (0, -4)$.

Solução.

Como $x = 0$ e $y = -4$, temos que

$$\rho = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = \sqrt{16} = 4,$$

$$\cos\theta = \frac{0}{4} = 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{-4}{4} = -1.$$

Logo, $(\rho, \theta) = (4, 3\pi/2) = (-4, 3\pi/2 + \pi) = (-4, 5\pi/2) = (-4, \pi/2)$ é o ponto P dado em coordenadas polares.

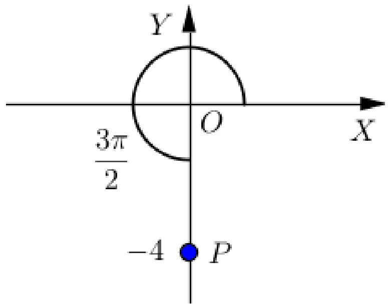

Figura 16: $P = (0, -4)$ em coordenadas cartesianas e $P = (-4, \pi/2)$ em coordenadas polares

□

Para esboçarmos uma curva, dada em coordenadas cartesianas (x, y) ou em coordenadas polares (ρ, θ), é bastante útil conhecermos suas simetrias para simplificar nossa análise.

Lembre-se de que dois pontos distintos P e Q são simétricos em relação a uma reta r se, e só se, $\overrightarrow{PQ} \perp r$ e $d(P, r) = d(Q, r)$.

Uma curva $\mathcal{C}$ é *simétrica* em relação:

- *ao eixo-OX* quando:

$$\begin{cases} (x, y) \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow (x, -y) \in \mathcal{C} \\ (\rho, \theta) \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow (\rho, -\theta) \in \mathcal{C} \quad \text{ou} \quad (-\rho, \pi - \theta) \in \mathcal{C}; \end{cases}$$

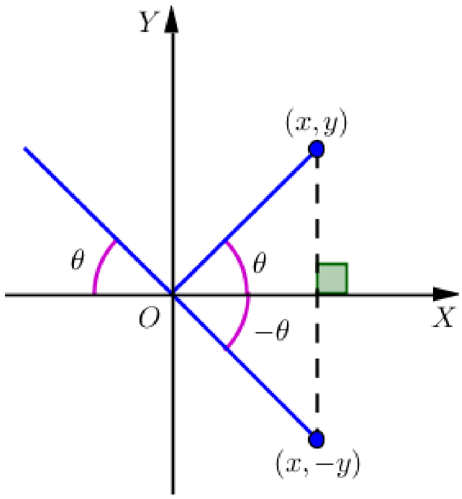

Figura 17: Simetria em relação ao eixo$-OX$.

• *ao eixo-OY* quando:

$$\begin{cases} (x,y) \in \mathcal{C} \iff (-x,y) \in \mathcal{C} \\ (\rho,\theta) \in \mathcal{C} \iff (\rho, \pi-\theta) \in \mathcal{C} \quad \text{ou} \quad (-\rho,-\theta) \in \mathcal{C}; \end{cases}$$

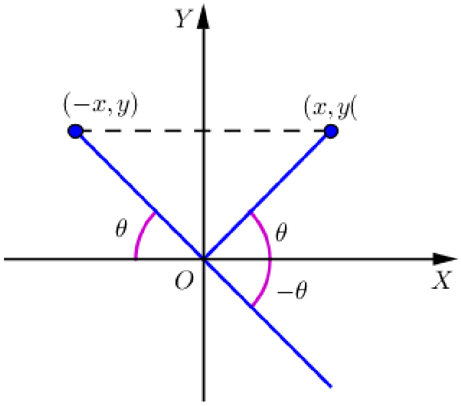

Figura 18: Simetria em relação ao eixo$-OY$.

• *à reta $y=x$* quando:

$$\begin{cases} (x,y) \in \mathcal{C} \iff (y,x) \in \mathcal{C} \\ (\rho,\theta) \in \mathcal{C} \iff (\rho, \frac{\pi}{2}-\theta) \in \mathcal{C} \quad \text{ou} \quad (-\rho,\frac{3\pi}{2}-\theta) \in \mathcal{C}; \end{cases}$$

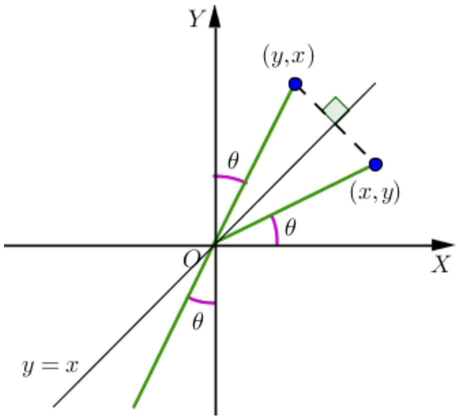

Figura 19: Simetria em relação à reta $y=x$.

• *à reta $y=-x$* quando:

$$\begin{cases} (x,y) \in \mathcal{C} \iff (-y,-x) \in \mathcal{C} \\ (\rho,\theta) \in \mathcal{C} \iff (\rho, \frac{3\pi}{2}-\theta) \in \mathcal{C} \quad \text{ou} \quad (-\rho,\frac{\pi}{2}-\theta) \in \mathcal{C}. \end{cases}$$

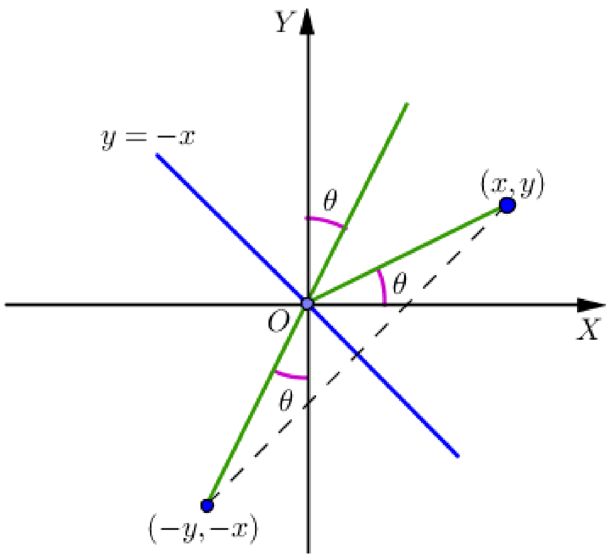

Figura 20: Simetria em relação à reta $y = -x$.

Para verificar as simetrias, é preferível usar as coordenadas cartesianas, devido à duplicidade de possibilidades em coordenadas polares.

Exemplo 5

Determine as equações cartesianas das curvas abaixo dadas em coordenadas polares e faça um esboço.

(a) $\mathcal{C} : \rho = 2\,.$

Solução.

Substituindo a relação $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, temos:

$$\begin{aligned} \rho = 2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \\ &\Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 4\,. \end{aligned}$$

Portanto, a equação $\rho = 2$ corresponde à equação cartesiana do círculo centrado na origem e de raio 2. □

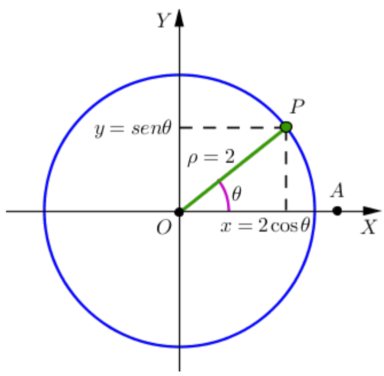

Figura 21: Círculo $\rho = 2$.

(b) $\mathcal{C} : \theta = \dfrac{3\pi}{4}$

Solução.

Substituindo a relação $\dfrac{y}{x} = \operatorname{tg}\theta$ na equação dada, obtemos:

$$\theta = \frac{3\pi}{4} \Longleftrightarrow \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = \frac{\operatorname{sen}((3\pi)/4)}{\cos((3\pi)/4)} = \frac{\sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}/2} = -1\,.$$

Portanto, a equação correspondente no sistema cartesiano de coordenadas é $\frac{y}{x} = -1$, isto é, $y = -x$, que é a equação da reta bissetriz do segundo e do quarto quadrantes.

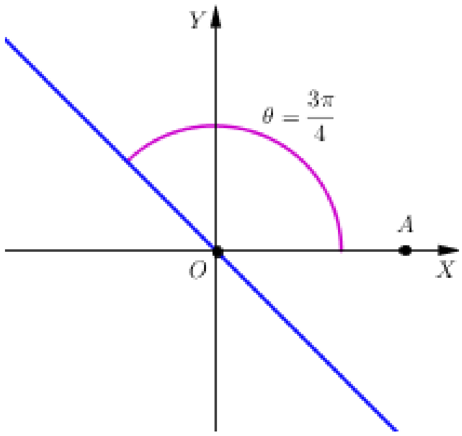

Figura 22: Reta $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

□

(c) $\mathcal{C} : \rho\,\cos(\theta - \pi/3) = 2\,.$

Solução.

Usando a identidade $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$, temos:

$$\rho\,\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \Longleftrightarrow \rho\,\cos\theta\,\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \rho\,\operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\,.$$

Das relações:

$$x = \rho\,\cos\theta\,,\;\; y = \rho\,\operatorname{sen}\theta\,,\;\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$

obtemos

$$\mathcal{C} : x\left(\frac{1}{2}\right) + y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\,,$$

ou seja,

$$\mathcal{C} : x + y\sqrt{3} - 4 = 0\,,$$

é a reta normal ao vetor $\overrightarrow{v} = (1, \sqrt{3})$ que passa pelo ponto $P = (4, 0)$.

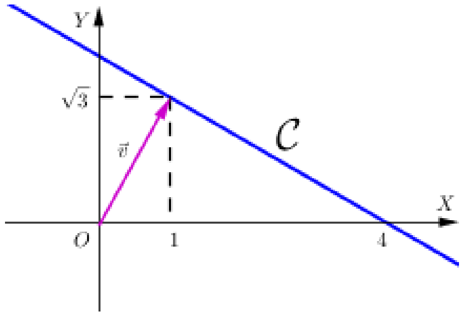

Figura 23: Reta $r : \rho\cos(\theta - \pi/3) = 2$, ou seja, $r : x + y\sqrt{3} - 4 = 0$.

□

(d) $\mathcal{C} : \rho\cos\theta = 3\,.$

Solução.
Como $x = \rho\cos\theta$, temos que $\mathcal{C} : x = 3$ é a reta vertical que intersecta o eixo$-OX$ no ponto $(3,0)$.

□

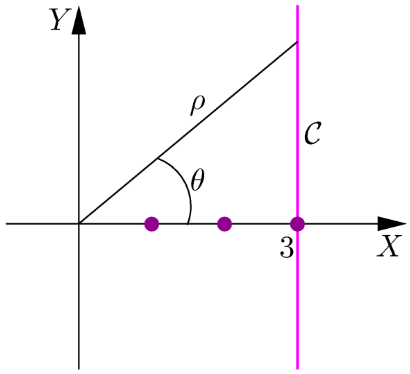

Figura 24: Curva $\mathcal{C} : \rho\cos\theta = 3$

(e) $\mathcal{C} : \rho = 2b\,\mathrm{sen}\,\theta\,, \quad b > 0\,.$

Solução.

Sendo $\rho = \pm\sqrt{x^2+y^2}$ e $\mathrm{sen}\,\theta = \pm\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

obtemos que

$$\begin{aligned} & \pm\sqrt{x^2+y^2} = \pm\frac{2by}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \iff\ & x^2+y^2 = 2by \\ \iff\ & x^2+y^2-2by = 0 \\ \iff\ & x^2+(y-b)^2 = b^2 \end{aligned}$$

é a equação cartesiana da curva $\mathcal{C}$, que representa o círculo de raio b e centro $(0,b)$.

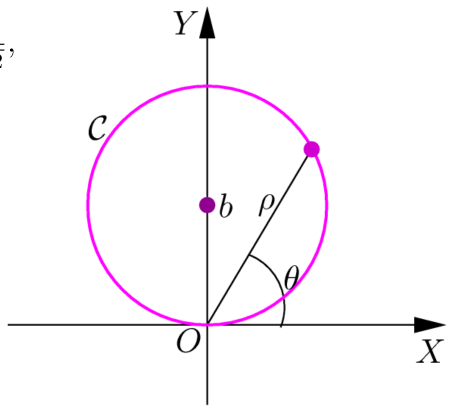

Figura 25: Curva $\mathcal{C} : \rho = 2b\,\mathrm{sen}\,\theta$, $b > 0$.

□

(f) $\mathcal{C} : \rho^2 - 4\rho\cos\theta + 2 = 0.$

Solução.

Substituindo as relações $\rho^2 = x^2 + y^2$ e $x = \rho\cos\theta$ na equação dada, temos

$$x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0 \Longleftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 2\,,$$

que é a equação cartesiana do círculo de centro $(2,0)$ e raio $\sqrt{2}$.

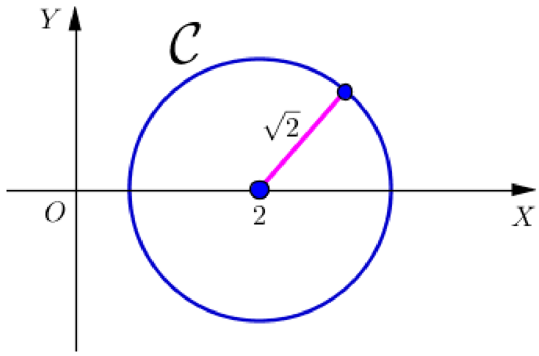

Figura 26: Círculo $\mathcal{C}$ e arcos $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$

□

(g) $\mathcal{C} : \rho = \dfrac{2}{3-\cos\theta}$.

Solução.

Observe que $\rho > 0$ para todo $\theta \in [0, 2\pi]$. Substituindo $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ e $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ na equação polar de $\mathcal{C}$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+y^2} = \frac{2}{3-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}} \quad &\Longleftrightarrow \quad 3\sqrt{x^2+y^2} - x = 2\\
&\Longleftrightarrow \quad 3\sqrt{x^2+y^2} = x+2\\
&\Longleftrightarrow \quad 9(x^2+y^2) = x^2+4x+4\\
&\Longleftrightarrow \quad 8x^2 - 4x + 9y^2 = 4\\
&\Longleftrightarrow \quad 8\left(x^2 - \frac{x}{2}\right) + 9y^2 = 4\\
&\Longleftrightarrow \quad 8\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 + 9y^2 = 4 + 8\times\frac{1}{16} = \frac{9}{2}\\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{9}{16}} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1
\end{aligned}$$

é a equação cartesiana de $\mathcal{C}$. Portanto, $\mathcal{C}$ é uma elipse de centro $C = \left(\frac{1}{4}, 0\right)$, $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, reta focal $\ell : y = 0$, reta não focal $\ell' : x = \frac{1}{4}$, vértices sobre a reta focal $A_1 = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ e $A_2 = (1, 0)$, vértices sobre a reta não focal $B_1 = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $B_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

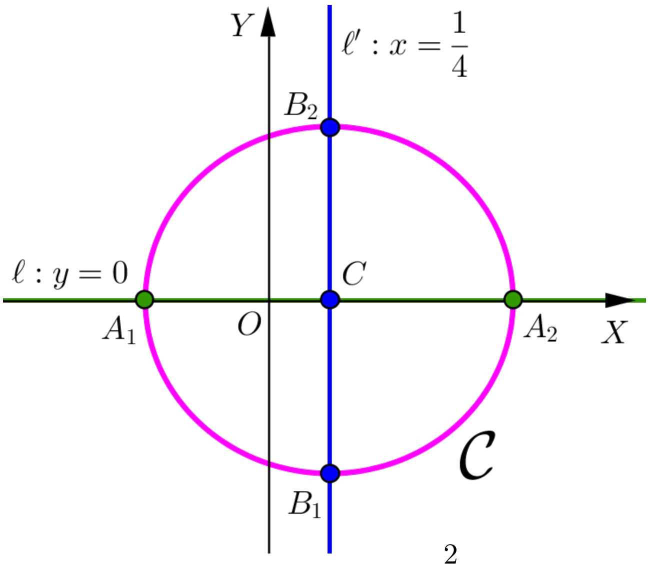

Figura 27: Curva $\mathcal{C} : \rho = \dfrac{2}{3 - \cos\theta}$

$\square$

(h) $\mathcal{C} : \rho = 1 + \operatorname{sen} 2\theta\,.$

Solução.

Pela relação trigonométrica

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta\,,$$

obtemos que

$$\rho = 1 + 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta\,.$$

Além disso, como $\rho \geq 0$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$, temos que

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 + \frac{2xy}{x^2 + y^2} \iff (x^2 + y^2)^{3/2} = x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2 \quad (1)$$

é a equação cartesiana da curva.

Por (1), é fácil verificar que a curva $\mathcal{C}$ é simétrica em relação à reta $y = x$ (isto é, $(x, y) \in \mathcal{C} \iff (y, x) \in \mathcal{C}$) e à reta $y = -x$ (isto é, $(x, y) \in \mathcal{C} \iff (-y, -x) \in \mathcal{C}$) Logo, basta analisar a curva $\rho = 1 + \operatorname{sen} 2\theta$ para θ no intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Temos: $\rho = 0$ para $\theta = -\frac{\pi}{4}$; $\rho = 1$ para $\theta = 0$; $\rho = 2$ para $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $\rho > 0$ para $\theta \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

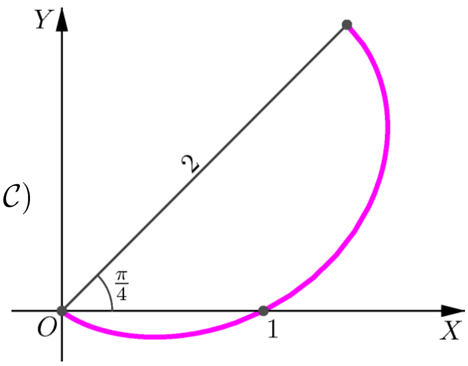

Figura 28: Curva $\mathcal{C}$ no intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

Na figura 28, mostramos o esboço da curva no intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Pelas simetrias da curva, é fácil ver que o esboço de $\mathcal{C}$ é o mostrado na figura 29.

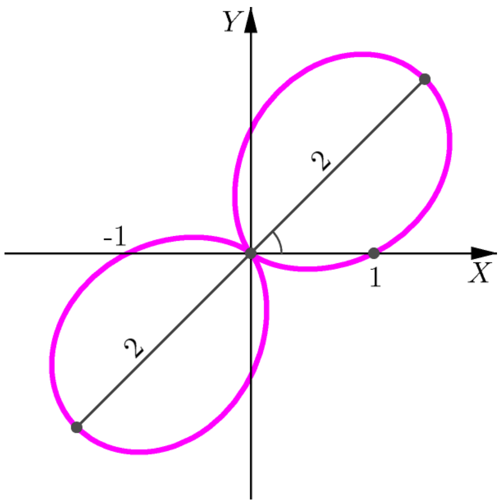

Figura 29: Curva $\mathcal{C} : \rho = 1 + \operatorname{sen} 2\theta$

□

(i) $\mathcal{C} : \rho = 1 + 2\cos\theta$.

Solução.

Neste exemplo, ρ pode assumir valores negativos e positivos.

Logo, $\rho = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ e $\cos\theta = \dfrac{\pm x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Substituindo ρ e θ na equação dada, obtemos que

$$\pm\sqrt{x^2+y^2} = 1 \pm \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} \iff x^2+y^2 = \pm\sqrt{x^2+y^2}+2x$$
$$\iff (x^2+y^2-2x)^2 = x^2+y^2$$

é a equação cartesiana da curva. É fácil verificar que esta curva é simétrica em relação ao eixo$-OX$, mas não é simétrica em relação ao eixo$-OY$. Portanto, para esboçá-la, basta variar o parâmetro θ no intervalo $[0,\pi]$.

Para $\theta \in [0,\pi]$, temos:

- $\rho = 1+2\cos\theta = 0$ se, e só se, $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$, ou seja, $\rho = 0$ se, e só se, $\theta_0 = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$;
- $\rho > 0$ se, e só se, $-\dfrac{1}{2} < \cos\theta \leq 1$, ou seja, se, e só se, $0 \leq \theta < \dfrac{2\pi}{3}$;
- $\rho < 0$ se, e só se, $-1 \leq \cos\theta < -\dfrac{1}{2}$, ou seja, se, e só se, $\dfrac{2\pi}{3} < \theta \leq \pi$.

Tomando os pontos $P_1 = (3,0)$, $P_2 = (2,\pi/3)$, $P_3 = (1,\pi/2)$, $P_4 = (0,2\pi/3)$ e $P_5 = (-1,\pi)$ em coordenadas polares da curva, podemos esboçar a parte da curva correspondente ao intervalo $[0,\pi]$ (ver Fig. 30).

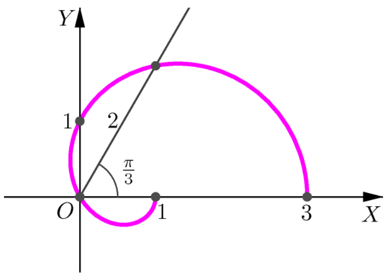

Figura 30: Curva $\mathcal{C}$ descrita variando θ em $[0,\pi]$

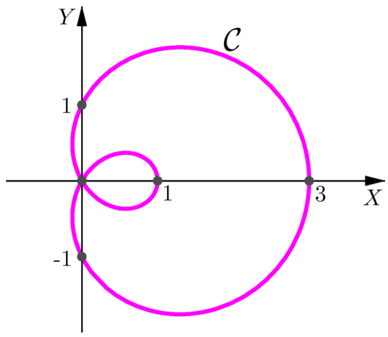

Figura 31: Curva $\mathcal{C}$

Sendo a curva simétrica em relação ao eixo$-OX$, obtemos o esboço completo da curva $\mathcal{C}$ (ver Fig. 31). $\square$

(j) $\mathcal{C} : \rho^2 = \cos\theta$.

Solução.

Sendo $\rho = \pm\sqrt{x^2+y^2}$ e $\cos\theta = \dfrac{\pm x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, obtemos a equação cartesiana da curva:

$$x^2 + y^2 = \frac{\pm x}{\sqrt{x^2+y^2}} \iff (x^2+y^2)^{3/2} = \pm x \iff (x^2+y^2)^3 = x^2\,.$$

Como esta curva é simétrica em relação aos eixos OX e OY, basta analizá-la no intervalo $[0, \pi/2]$.

Temos que $\rho = 0$ se, e só se, $\cos\theta = 0$, ou seja, $\rho = 0$ se, e só se, $\theta = \pi/2$ para $\theta \in [0, \pi/2]$.

Considerando os pontos $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = \left(1/2^{1/4}\,,\, \pi/4\right)$ e $P_3 = (0\,,\,\pi/2)$ da curva em coordenadas polares, podemos esboçar seu traço situado no primeiro quadrante (ver Fig. 32).

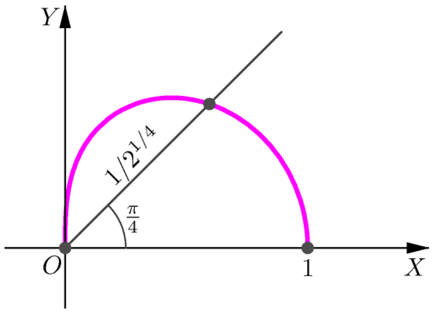

Figura 32: Curva $\mathcal{C}$ no primeiro quadrante

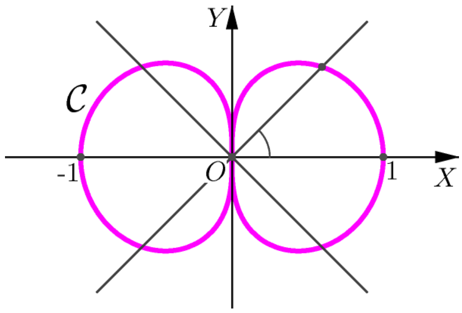

Figura 33: Curva $\mathcal{C}$

Usando as simetrias em relação aos eixos OX e OY, podemos esboçar a curva $\mathcal{C}$ (Fig. 33). $\square$

(k) $\mathcal{C} : \rho = 2\,\mathrm{sen}^2\,\dfrac{\theta}{2}\,.$

Solução.

Usando a relação trigonométrica

$$2\,\mathrm{sen}^2\,\frac{\theta}{2} = 1 - \cos\theta\,,$$

obtemos que $\mathcal{C} : \rho = 1 - \cos\theta\,.$

Sendo $\rho \geq 0$, temos que $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ e $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Logo,

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+y^2} = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} &\iff x^2+y^2 = \sqrt{x^2+y^2} - x \\ &\iff x^2+y^2+x = \sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}$$

é a equação cartesiana de $\mathcal{C}$.

É fácil verificar que $\mathcal{C}$ é simétrica em relação ao eixo$-OX$, mas não é simétrica

em relação ao eixo$-OY$. Basta, então, analisar a curva no intercalo $[0, \pi]$.
Como $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1, \pi/2)$ e $P_3 = (2, \pi)$ são pontos da curva $\mathcal{C}$ no intervalo $[0, \pi]$, o esboço de $\mathcal{C}$, nos primeiro e segundo quadrantes, é da forma:

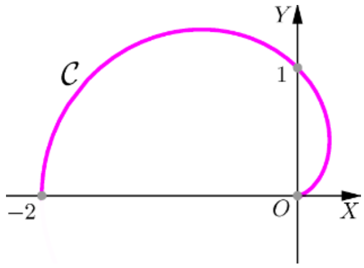

Figura 34: Curva $\mathcal{C}$ no primeiro e segundo quadrantes

Usando a simetria de $\mathcal{C}$ em relação ao eixo$-OX$, podemos esboçá-la:

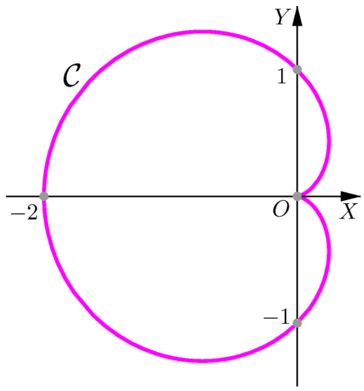

Figura 35: Curva $\mathcal{C}$, a cardióide

Esta curva é chamada cadióide por se assemelhar a um coração. $\square$

(1) $\mathcal{C} : \rho = \cos 2\theta$.

Solução.

Como $\rho = \pm\sqrt{x^2+y^2}$ e $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, obtemos que

$$\pm\sqrt{x^2+y^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \iff \pm(x^2+y^2)^{3/2} = x^2-y^2$$
$$\iff (x^2+y^2)^3 = (x^2-y^2)^2$$

é a equação cartesiana da curva, que é simétrica em relação aos eixos OX e OY e às retas $y = x$ e $y = -x$.

Basta, então, analisar a curva no intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$. Temos que

- $\rho > 0$ para $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right)$;

- $\rho = \cos 2\theta = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ para $\theta = \dfrac{\pi}{4}$;
- $\rho = \cos 2\theta = \cos 0 = 1$ para $\theta = 0$.

Logo, a figura 36 é um esboço da curva para θ variando no intervalo $[0, \pi/4]$.

Usando as simetrias em relação aos eixos OX e OY e em relação à reta $y = x$, obtemos o esboço completo da curva (figura 20).

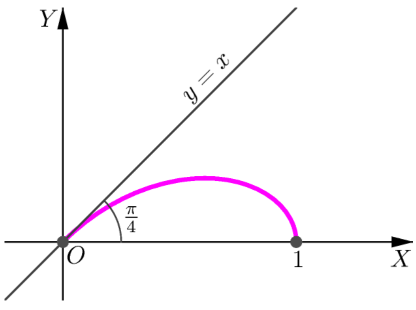

Figura 36: Curva $\mathcal{C}$ com θ variando no intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$

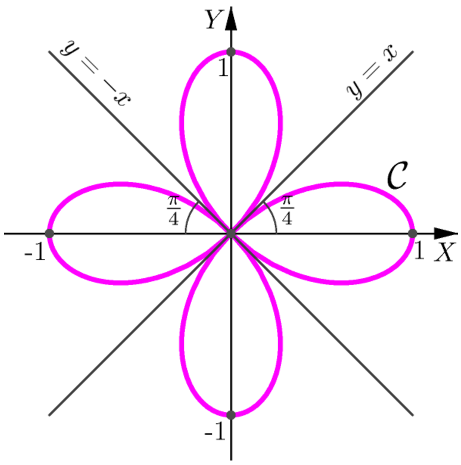

Figura 37: Curva $\mathcal{C}$

□

(m) $\mathcal{C} : \rho = \operatorname{sen} 3\theta$.

Solução.

Sendo

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 3\theta &= \operatorname{sen}(\theta + 2\theta) = \operatorname{sen}\theta\cos 2\theta + \cos\theta \operatorname{sen} 2\theta\\ &= \operatorname{sen}\theta(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) + 2\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta = 3\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta - \operatorname{sen}^3\theta\\ &= \operatorname{sen}\theta(3\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta),\end{aligned}$$

obtemos que

$$\pm\sqrt{x^2+y^2} = \frac{\pm y}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{3x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) \Longleftrightarrow (x^2+y^2)^2 = y(3x^2-y^2)$$

é a equação cartesiana da curva.

Portanto, ela é simétrica em relação ao eixo$-OY$, mas não é simétrica em relação ao eixo$-OX$.

Ao invés de usar as simetrias da curva, vamos analisá-la num ciclo completo, isto é, variando θ no intervalo $[0, 2\pi]$.

- $\rho = 0 \iff \operatorname{sen} 3\theta = 0 \iff 3\theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi \iff \theta = 0, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, \pi, \dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}, 2\pi$;
- $\rho = 1 \iff \operatorname{sen} 3\theta = 1 \iff 3\theta = \dfrac{\pi}{2}, 2\pi + \dfrac{\pi}{2}, 4\pi + \dfrac{\pi}{2} \iff \theta = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{9\pi}{6}$;
- $\rho = -1 \iff \operatorname{sen} 3\theta = -1 \iff 3\theta = \dfrac{3\pi}{2}, 2\pi+\dfrac{3\pi}{2}, 4\pi+\dfrac{3\pi}{2} \iff \theta = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}$;
- $\rho > 0$ em $\left(0, \dfrac{\pi}{3}\right) \cup \left(\dfrac{2\pi}{3}, \pi\right) \cup \left(\dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right)$;
- $\rho < 0$ em $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\pi, \dfrac{4\pi}{3}\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$.

Usando as informações acima, vemos que o traço da curva é o mostrado na figura 38.

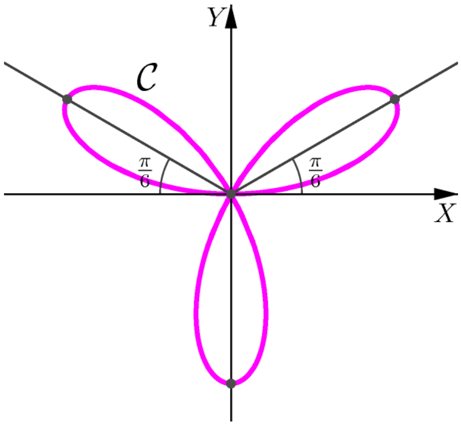

Figura 38: Curva $\mathcal{C}$

□

Vamos agora apresentar alguns exemplos que nos mostram como podemos determinar regiões do plano usando coordenadas polares, nos quais vamos considerar sempre $\rho \geq 0$.

Exemplo 6

Faça o esboço da região $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ do plano dada pelos seguintes sistemas de desigualdades:

$$\mathcal{R}_1 : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq \dfrac{2}{\cos\theta} \\ -\dfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{R}_2 : \begin{cases} 2\operatorname{sen}\theta \leq \rho \leq \dfrac{2}{\cos\theta} \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \quad ,$$

onde (ρ, θ) são as coordenadas polares de um ponto da região $\mathcal{R}$.

Solução.
Primeiro analisaremos as curvas que delimitam a região

(I) $\rho = \dfrac{2}{\cos\theta} \Longleftrightarrow \rho\cos\theta = 2 \Longleftrightarrow x = 2$, que é uma reta vertical.

(II) $\rho = 2\operatorname{sen}\theta \Longleftrightarrow \pm\sqrt{x^2+y^2} = \dfrac{\pm 2y}{\sqrt{x^2+y^2}} \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = 2y \Longleftrightarrow$ $x^2 + (y-1)^2 = 1$, que é o círculo de centro $(0,1)$ e raio 1.

(III) $\theta = \dfrac{\pi}{4} \Longleftrightarrow \dfrac{y}{x} = \operatorname{tg}\theta = 1 \Longleftrightarrow y = x$, que é a bissetriz dos primeiro e terceiro quadrantes.

(IV) $\theta = -\dfrac{\pi}{4} \Longleftrightarrow \dfrac{y}{x} = \operatorname{tg}\theta = -1 \Longleftrightarrow y = -x$, que é a bissetriz dos segundo e quarto quadrantes.

Então,

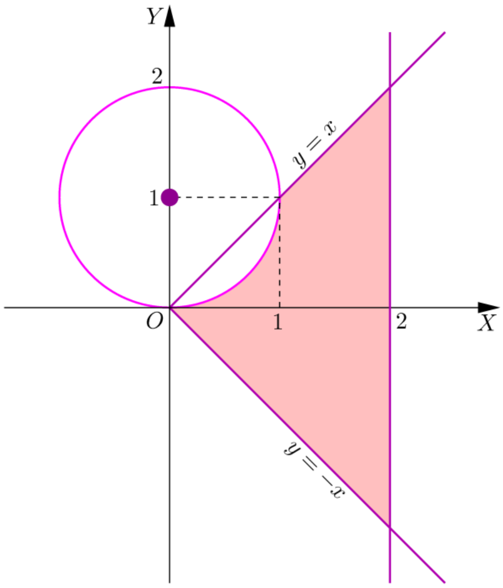

Figura 39: $\mathcal{R}$ é a região sombreada

é o esboço da região no sistema de eixos OXY, e

$$\mathcal{R} : \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y \geq 0 \\ x \leq 2 \\ x - y \geq 0 \\ x + y \geq 0 \end{cases}$$

é a região dada em coordenadas cartesianas.

Como a interseção do círculo $x^2 + y^2 = 2y$ com a reta $y = x$ são os pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$, e na equação $x^2+y^2 = 2y$ temos $y = 1-\sqrt{1 - x^2}$ para $y \in [0, 1]$ e $x \in [0, 1]$, a região $\mathcal{R}$ pode ser descrita também na forma $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, onde:

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} -x \leq y \leq 1 - \sqrt{1 - x^2} \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{S}_2 : \begin{cases} -x \leq y \leq x \\ 1 \leq x \leq 2\,. \end{cases}$$

□

Exemplo 7

Descreva as regiões esboçadas abaixo por meio de um sistema de desigualdades da forma

$$\begin{cases} \rho_1(\theta) \leq \rho \leq \rho_2(\theta) \\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \end{cases}.$$

(a)

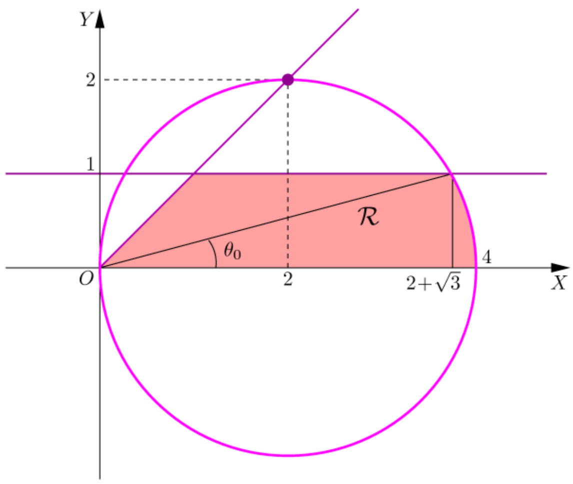

Figura 40: Região $\mathcal{R}$

Solução.

Primeiro vamos determinar as equações polares das curvas $\mathcal{C}_1 : (x-2)^2+y^2 = 4\,$, $\mathcal{C}_2 : y = 1\,$, $\mathcal{C}_3 : x - y = 0$ e $\mathcal{C}_4 : y = 0$ que delimitam a região $\mathcal{R}$.

(I) $(x-2)^2+y^2 = 4 \iff x^2-4x+4+y^2 = 4 \iff x^2+y^2 = 4x \iff \rho^2 = 4\rho\cos\theta \iff \rho = 4\cos\theta\,.$

(II) $y = 1 \iff \rho\,\text{sen}\,\theta = 1 \iff \rho = \dfrac{1}{\text{sen}\,\theta}\,.$

(III) $x - y = 0 \Longleftrightarrow x = y \Longleftrightarrow \operatorname{tg}\theta = 1 \Longleftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$.

(IV) $y = 0 \Longleftrightarrow \rho \operatorname{sen}\theta = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{sen}\theta = 0 \Longleftrightarrow \theta = 0$.

Por um cálculo simples, obtemos que

$\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 = \{(1,1)\}$; $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{(2-\sqrt{3},1),\ (2+\sqrt{3},1)\}$; $y = \pm\sqrt{4x - x^2}$ ou $x = 2 \pm \sqrt{4 - y^2}$ para $(x,y) \in \mathcal{C}_1$.

Logo,

$$\mathcal{R} : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 4\cos\theta \\ 0 \leq \theta \leq \theta_0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1/\operatorname{sen}\theta \\ \theta_0 \leq \theta \leq \pi/4 \end{cases}$$

é a região dada em coordenadas polares, onde $\operatorname{tg}\theta_0 = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$, $\theta_0 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Além disso,

$$\mathcal{R} : \begin{cases} 0 \leq y \leq x \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \bigcup \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ 1 \leq x \leq 2+\sqrt{3} \end{cases} \bigcup \begin{cases} 0 \leq y \leq \sqrt{4x - x^2} \\ 2+\sqrt{3} \leq x \leq 4 \end{cases}$$

ou, simplesmente,

$$\mathcal{R} : \begin{cases} y \leq x \leq 2 + \sqrt{4 - y^2} \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

é a região dada em coordenadas cartesianas. $\square$

(b)

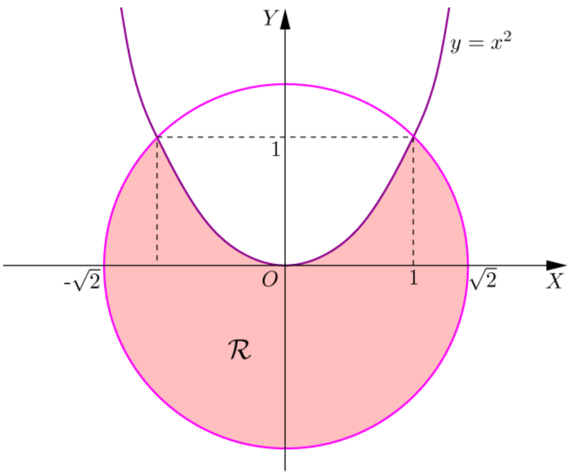

Figura 41: Região $\mathcal{R}$

Solução.
As curvas que delimitam a região são $\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 = 2$ e $\mathcal{C}_2 : y = x^2$, que em coordenadas polares são dadas por: $\mathcal{C}_1 : \rho = \sqrt{2}$ e $\mathcal{C}_2 : \rho \operatorname{sen}\theta = \rho^2 \cos^2\theta$, ou seja, $\mathcal{C}_2 : \rho = \operatorname{tg}\theta \sec\theta$.
Como $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{(1,1), (-1,1)\}$, temos que o ângulo polar θ varia no intervalo $\left[-\pi - \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right] = \left[-\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$.
Logo,

$$\mathcal{R} : \begin{cases} \operatorname{tg}\theta \sec\theta \leq \rho \leq \sqrt{2} \\ -\dfrac{5\pi}{4} \leq \theta \leq -\pi \end{cases} \bigcup \begin{cases} 0 \leq \rho \leq \sqrt{2} \\ -\pi \leq \theta \leq 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} \operatorname{tg}\theta \sec\theta \leq \rho \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

é a região dada em coordenadas polares. Além disso,

$$\mathcal{R} : \quad \begin{array}{c} \begin{cases} -\sqrt{2-x^2} \leq y \leq x^2 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \\ \bigcup \\ \begin{cases} -\sqrt{2-x^2} \leq y \leq \sqrt{2-x^2} \\ -\sqrt{2} \leq x \leq -1 \end{cases} \\ \bigcup \\ \begin{cases} -\sqrt{2-x^2} \leq y \leq \sqrt{2-x^2} \\ 1 \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases} \end{array}$$

é a região dada em coordenadas cartesianas. □

Exemplo 8

Descreva a região $\mathcal{R}$ do plano interior a ambas as curvas: $\mathcal{C}_1 : \rho = 4\sqrt{3}\cos\theta$ e $\mathcal{C}_2 : \rho = 4\operatorname{sen}\theta$.

Solução.
As curvas em coordenadas cartesianas são dadas por:

• $\mathcal{C}_1 : \rho = 4\sqrt{3}\cos\theta \iff \pm\sqrt{x^2+y^2} = 4\sqrt{3}\left(\dfrac{\pm x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \iff x^2+y^2 = 4\sqrt{3}\,x$
$\iff (x - 2\sqrt{3})^2 + y^2 = 12$, que é o círculo de centro $(2\sqrt{3}, 0)$ e raio $2\sqrt{3}$.

• $\mathcal{C}_2 : \rho = 4\,\text{sen}\,\theta \iff \pm\sqrt{x^2+y^2} = 4\left(\dfrac{\pm y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \iff x^2+y^2 = 4y$
$\iff x^2+(y-2)^2 = 4$, que é o círculo de centro $(0,2)$ e raio 2.

Assim,

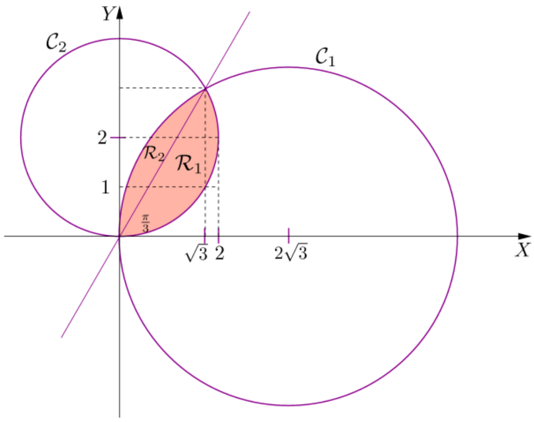

Figura 42: Região $\mathcal{R}$

é um esboço da região no sistema de coordenadas OXY.

Temos que

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 &\iff x^2+y^2 = 4\sqrt{3}\,x \quad \text{e} \quad x^2+y^2 = 4y \\
&\iff y = \sqrt{3}x \quad \text{e} \quad x^2+y^2 = 4y \\
&\iff y = \sqrt{3}x \quad \text{e} \quad x^2+3x^2 = 4\sqrt{3}x \\
&\iff y = \sqrt{3}x \quad \text{e} \quad 4x^2 = 4\sqrt{3}\,x \\
&\iff x = 0 \quad \text{e} \quad y = 0 \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{3} \quad \text{e} \quad y = 3\,.
\end{aligned}
$$

Ou seja, $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \left\{(0,0), \left(\sqrt{3},3\right)\right\}$.

Como o ângulo θ_0 que o segmento OP_0, $P_0 = \left(\sqrt{3},3\right)$, faz com o eixo$-OX$ é $\dfrac{\pi}{3}$, pois $\text{tg}\,\theta_0 = \dfrac{y}{x} = \sqrt{3}$, temos que a região em coordenadas polares é $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$, onde:

$$
\mathcal{R}_1 : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 4\,\text{sen}\,\theta \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{R}_2 : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 4\sqrt{3}\,\cos\theta \\ \dfrac{\pi}{3} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\,, \end{cases}
$$

e, em coordenadas cartesianas,

$$
\mathcal{R} : \begin{cases} 2\sqrt{3} - \sqrt{12-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-(y-2)^2} \\ 0 \leq y \leq 3\,. \end{cases}
$$

□

Exemplo 9

Considere a região $\mathcal{R}$ do plano dada pelo sistema de inequações:

$$\mathcal{R} : \begin{cases} \dfrac{x^2}{12} \leq y \leq \dfrac{1}{2}\sqrt{16 - x^2} \\ 0 \leq x \leq 2\sqrt{3}\,. \end{cases}$$

(a) *Faça um esboço detalhado da região $\mathcal{R}$.*

(b) *Descreva a região por meio de um sistema de inequações da forma*

$$\mathcal{R} : \begin{cases} \rho_1(\theta) \leq \rho \leq \rho_2(\theta) \\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\,, \end{cases}$$

onde (ρ, θ) são as coordenadas polares de um ponto do plano.

Solução.

(a) As curvas que delimitam a região $\mathcal{R}$ são:

• as retas verticais $x = 0$ e $x = 2\sqrt{3}$;

• a parábola $\mathcal{C}_1 : x^2 = 12y$ de vértice na origem e reta focal igual ao eixo$-OY$, voltada para cima;

• a parte $\mathcal{C}_2$ situada no semiplano $y \geq 0$ da elipse:

$$\mathcal{C}_2 : 2y = \sqrt{16 - x^2} \Longrightarrow 4y^2 = 16 - x^2 \Longrightarrow x^2 + 4y^2 = 16 \Longrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1\,,$$

de centro $C = (0,0)$, vértices $(4,0)$, $(-4,0)$, $(0,2)$ e $(0,-2)$ e reta focal igual ao eixo$-OX$.

Observe que $\left(2\sqrt{3}, 1\right) \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$. Portanto, o esboço da região $\mathcal{R}$ é:

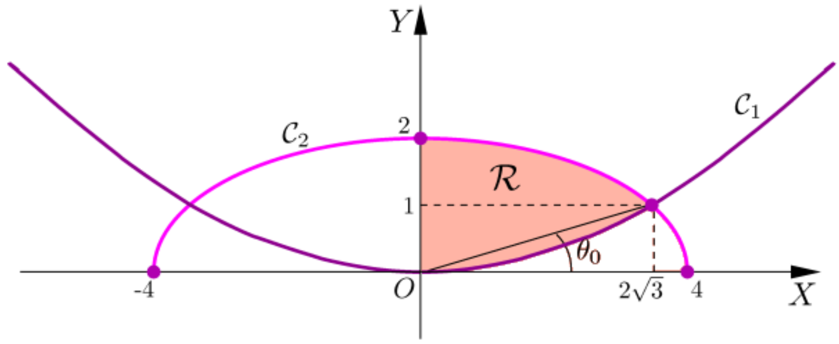

Figura 43: Região $\mathcal{R}$

(b) As curvas $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ em coordenadas polares são dadas por

• $12y = x^2 \iff 12\rho \operatorname{sen}\theta = \rho^2 \cos^2\theta \iff \rho = 12\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta} = 12 \operatorname{tg}\theta \sec\theta\,;$

• $x^2+4y^2 = 16 \iff \rho^2(\cos^2\theta + 4\operatorname{sen}^2\theta) = 16 \iff \rho^2(1-\operatorname{sen}^2\theta + 4\operatorname{sen}^2\theta) = 16$
$\iff \rho = \dfrac{4}{\sqrt{1+3\operatorname{sen}^2\theta}}$

Seja $\theta_0 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ tal que $\operatorname{tg}\theta_0 = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Então, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$, onde:

$$\mathcal{R}_1 : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 12\operatorname{tg}\theta\sec\theta \\ 0 \leq \theta \leq \theta_0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{R}_2 : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq \dfrac{4}{\sqrt{1+3\operatorname{sen}^2\theta}} \\ \theta_0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\,. \end{cases}$$

□