CDD: 512.5

APLICAÇÕES DAS CÔNICAS NA DEMANDA E OFERTA DE PRODUTOS

APPLICATIONS OF CONICS IN THE DEMAND AND SUPPLY OF PRODUCTS

Edson de Oliveira[1], Carlos Edmar Carvalho de Paula[2]

[1] Universidade de Franca - UNIFRAN e UNICEP - Centro Universitário Central Paulista, São Carlos, SP, Brasil; email: edson_mat@uol.com.br
[2] Universidade de Franca - UNIFRAN, São Carlos, SP

Recebido para publicação em 22/01/2004
Aceito para publicação em 29/03/2004

RESUMO

Neste trabalho são sistematizados procedimentos com a finalidade de se reconhecer a natureza de uma equação quadrática, como também, para esboçar o seu gráfico através da análise dos coeficientes de sua equação. Além disso, são discutidas várias aplicações das cônicas na Administração e na Economia. Essas aplicações envolvem curvas quadráticas de oferta e demanda e seus respectivos equilíbrios de mercado, e curvas de produção. Na simplificação dos cálculos envolvidos, bem como no esboço de gráficos, é usado o aplicativo matemático Maple V.

Palavras-chave: equação quadrática, cônica, curvas de oferta e demanda, curvas de produção

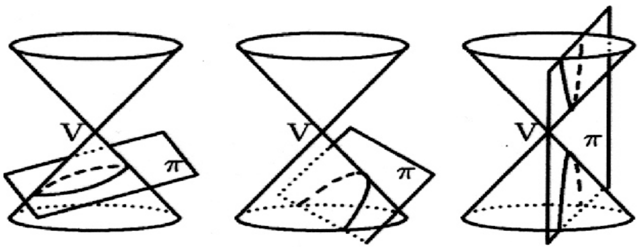
ABSTRACT

In this work procedures are systematized with the purpose of recognizing the nature of a quadratic equation, as well as to sketch its graph, through the analysis of the coefficients of its equation. Besides, several applications of conics in Administration and Economy are discussed. These applications involve quadratic curves of supply and demand and their market balances and also their production curves. In the simplification of the calculations, as well as in the sketching of graphs, the mathematical software Maple V is used .

Key words: quadratic equation, conics, supply and demand curves, production curves

1. Introducão

As curvas obtidas secionando-se um cone com um plano que não passa pelo vértice, chamam-se seções cônicas ou simplesmente cônicas e os três tipos de curvas que podem ocorrer são: elipse, parábola ou hipérbole.



(a) elipse (b) parábola (c) hipérbole

Figura 1 - Cônicas determinadas pela interseção de um cone com um plano que não passa pela origem

O matemático Apolônio estudou originalmente as seções cônicas em termos de geometria, usando este conceito. Muitos anos depois passou-se a analisá-las como curvas planas o que possibilitou estudar as suas propriedades com os instrumentos da Álgebra. Para esse propósito, utilizou-se definições equivalentes que se referem somente ao plano π em que as curvas estão e dependem de pontos especiais desses planos chamados focos, a saber:

- Dados no plano π dois pontos F_1 e F_2, seja c a metade da distância entre eles de modo que $d(F_1,F_2) = 2c$ e seja a um número maior que c. A elipse de focos F_1 e F_2 é o conjunto de todos os pontos P ε π tal que $d(P,F_1) + d(P,F_1) = 2a$.

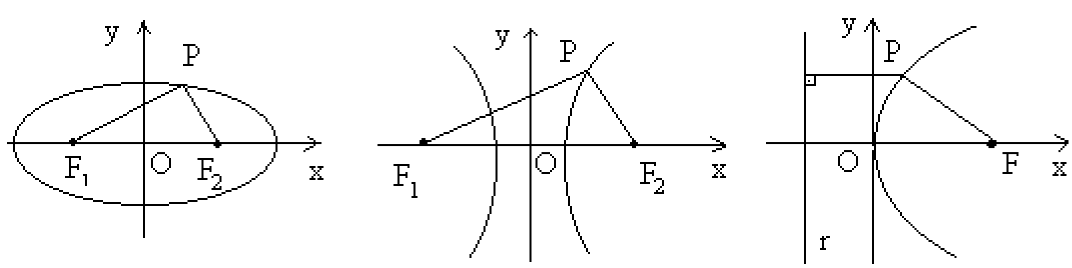
- Dado $0 < a < c$ e dados no plano π dois pontos F_1 e F_2 com $d(F_1,F_2) = 2c$, a hipérbole de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P ε π tais que $|d(P,F_1) - d(P,F_1)| = 2a$.

- Dados em π um ponto F e uma reta r não contendo F, a parábola de foco F e diretriz r é o conjunto dos pontos P tais que $d(P,F) = d(P,r)$.

Considerando um sistema de coordenadas cartesianas ortogonal xOy de tal forma que o eixo Ox contenha os focos F_1 e F_2 e o eixo Oy seja a mediatriz do segmento F_1F_2 no caso da elipse e da hipérbole e, no caso da parábola, o eixo Ox passando pelo foco sendo perpendicular à diretriz e o eixo Oy sendo paralelo à diretriz, pelo vértice da parábola, conforme a Figura 2, demonstra-se (Oliveira, 1999) que a elipse, a hipérbole e a parábola têm como equações cartesianas, respectivamente

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1 \qquad y^2 = 2px$$

em que na terceira equação, p representa a distância entre o foco e a diretriz.



(a) elipse $d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a$ (b) hipérbole $|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a$ (c) parábola $d(P,F) = d(P,r)$

Figura 2 - Gráficos da elipse, hipérbole e parábola e disposição dos eixos coordenados em relações aos quais suas equações são reduzidas.

De um modo geral, fixado um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais S, o conjunto dos pontos P do plano cujas coordenadas (x, y) em relação ao sistema S verificam uma equação do segundo grau do tipo:

$$A x^2 + Bxy + C y^2 + Dx + E y + F = 0 \qquad (1)$$

onde A, B, C, D e E são constantes reais e A, B, C não são simultaneamente nulas é chamada equação quadrática ou equação de segundo grau.

As elipses, parábolas e hipérboles são curvas cujas equações são casos particulares da equação (1). Além destas cônicas, a equação quadrática pode representar vários tipos de curvas degeneradas: duas retas concorrentes, duas retas paralelas, um ponto ou o conjunto vazio.

Muitas aplicações importantes em Matemática Pura e em Ciência estão relacionadas às cônicas. Na Economia e na Administração, os segmentos pertencentes ao primeiro quadrante de vários tipos de parábolas são freqüentemente apropriadas para representar funções de demanda e oferta, funções de produção e muitas outras relações. O segmento pertencente ao primeiro quadrante de uma hipérbole equilátera é comumente usada para representar uma função de demanda. O uso das elipses ocorre quando se representa funções de transformação de produto .

Neste trabalho[1] são sistematizados procedimentos com a finalidade de se reconhecer a natureza de uma equação do tipo (1) através de sua redução a uma forma mais simples, movendo os eixos por rotação ou translação, como também, de esboçar o seu gráfico através da análise dos coeficientes de sua equação. Além disso são discutidas várias aplicações das cônicas na Administração e Economia. Essas aplicações envolvem curvas quadráticas de demanda e oferta e seus respectivos equilíbrios de mercado, e curvas de transformação em produto. Na simplificação dos cálculos envolvidos, como também no esboço de gráficos, é usado o aplicativo matemático Maple V.

2. Definições sobre cônicas

ROTAÇÃO E TRANSLAÇÃO

Considerando-se um sistema de coordenadas cartesianas ortogonal *xOy* e girando-se os eixos de um ângulo q, obtém-se um novo sistema x_1Oy_1.

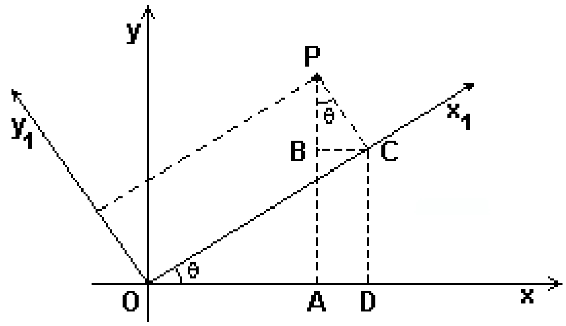


Figura 3 - Rotação de eixos

Supondo que P, ponto arbitrário do plano tenha coordenadas (x, y) em relação a xOy e coordenadas (x_1, y_1) em relação a x_1O y_1, de acordo com a Figura 3, tem-se:

$$x = \overline{OA} = \overline{OD} - \overline{AD} = \overline{OD} - \overline{BC}$$

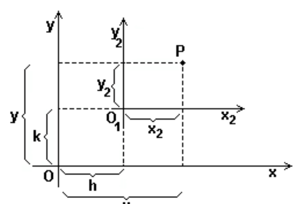
$$y = \overline{AP} = \overline{AB} + \overline{BP} = \overline{DC} + \overline{BP}$$

ou seja,

$$\begin{cases} x = x_1 \cos^{\circ} - y_1 \operatorname{sen}^{\circ} \\ y = x_1 \operatorname{sen}^{\circ} + y_1 \cos^{\circ} \end{cases} \qquad (2)$$

que são chamadas fórmulas de rotação.

Fixando-se em um plano um sistema de coordenadas *xOy* e considerando-se um novo sistema de coordenadas $x_2 O_1 y_2$ tal que x_2 e y_2 sejam paralelos a *x* e *y*, respectivamente, tenham a mesma unidade de medida e o mesmo sentido positivo que estes últimos tem-se que cada ponto *P* do plano terá dois pares de coordenadas *(x,y)* e (x_2,y_2) que, conforme a Figura 4, se relacionam por:



$$\begin{cases} x = x_2 + h \\ y = y_2 + k \end{cases} \quad \text{ou}$$

$$\begin{cases} x_2 = x - h \\ y_2 = y - k \end{cases} \qquad (3)$$

Figura 4 - Translação de eixos

[1] Este trabalho é resultado de um projeto de Iniciação Científica, desenvolvido por PAULA, 2002, na Universidade de Franca, sob a orientação do Prof. Dr. Edson de Oliveira.

que são chamadas fórmulas de translação.

ELIMINAÇÃO DO TERMO MISTO POR ROTAÇÃO

Mostra-se a seguir que em qualquer equação do 2° grau, o termo misto xy da equação (1) pode ser eliminado por uma rotação de eixos , isto é, supondo-se que B ¹ 0 pois, caso contrário, o termo misto não aparece na equação e, portanto, não há nada para ser feito.

Substituindo em (1) as fórmulas de rotação dadas pelas equações (2), efetuando-se as multiplicações e reagrupando os termos, a equação se escreve na forma:

$$A_1x_1^2 + B_1x_1y_1 + C_1y_1^2 + D_1x_1 + E_1y_1 + F_1 = 0 \qquad (4)$$

onde:

$$A_1 = A\cos^2\theta + \frac{B}{2}\operatorname{sen} 2\theta + C\operatorname{sen}^2\theta$$

$$B_1 = (C - A)\operatorname{sen} 2\theta + B\cos 2\theta$$

$$C_1 = A\operatorname{sen}^2\theta - \frac{B}{2}\operatorname{sen} 2\theta + C\cos^2\theta$$

$$D_1 = D\cos\theta + E\operatorname{sen}\theta \qquad (5)$$

$$E_1 = E\cos\theta - D\operatorname{sen}\theta$$

$$F_1 = F$$

Para eliminar o termo misto $x_1 y_1$, deve-se escolher θ tal que $B_1 = 0$, ou seja:

$$(C - A)\operatorname{sen} 2\theta + B\cos 2\theta = 0$$

Como $B \neq 0$ isto fornece:

$$\cot g 2\theta = \frac{A - C}{B}$$

Desta forma apresenta-se o seguinte teorema.

TEOREMA: Se $B \neq 0$ a equação

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ pode ser transformada na equação

$A_1x_1^2 + C_1y_1^2 + D_1x_1 + E_1y_1 + F_1 = 0$ onde A_1 e C_1 são ambos não nulos, por uma rotação de eixos segundo um ângulo de θ radianos, tal que

$$\cot g 2^{\circ} = \frac{A - C}{B} \quad , 0 < 2\,\theta < \pi$$

DEFINIÇÃO: A expressão $B^2 = 4AC$ chama-se discriminante da equação (1).

Observa-se que A, B e C da equação (1) e A_1, B_1 e C_1 da equação (4) satisfazem a relação:

$$B^2 - 4AC = B^2_1 - 4A_1C_1 \qquad (6)$$

que pode ser demonstrada substituindo-se as expressões para A_1, B_1 e C_1, dadas em (5), no segundo membro de (6).

Dessa forma, tem-se que o discriminante da equação geral em duas variáveis é invariante por uma rotação de eixos, pois permanece inalterado em qualquer rotação.

ELIMINAÇÃO DOS TERMOS LINEARES POR TRANSLAÇÃO

Admitindo-se já feito uma rotação e o termo misto tenha sido eliminado, pode-se assumir $B_1 = 0$ em (4) e, assim, a equação da cônica assume a forma:

$$A_1x^2_1 + C_1y^2_1 + D_1x_1 + E_1y_1 + F_1 = 0 \qquad (7)$$

em relação ao sistema de coordenadas $x_1O_1y_1$, obtido do sistema xOy por uma rotação de ângulo θ, como foi apresentado na Figura 3.

Se $C_1 = 0$ então necessariamente $A_1 \neq 0$, para manter o grau da equação em 2. Fazendo $C_1 = 0$ em (7) e completando o quadrado em relação a x_1, tem-se:

$$A_1\left(x_1 + \frac{D_1}{2A_1}\right)^2 + E_1y_1 + F - \frac{D_1^2}{4A_1} = 0$$

Fazendo-se uma translação de fórmulas

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - \dfrac{D_1}{2A_1} \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

obtém-se o sistema de coordenadas $x_2O_1y_2$ em que O_1 tem coordenadas $(a,b) = \left(-\dfrac{D_1}{2A_1}, 0\right)$

e, em relação ao qual, a equação anterior se escreve na forma:

$$A_1 x_2^2 + E_1 y_2 + \overline{F}_1 = 0 \tag{8}$$

onde $\overline{F_1} = F - \frac{D_1^2}{4A_1}$, sendo que a equação (8) representa uma parábola se $E_1 \neq 0$ ou, caso contrário, uma reta, um par de retas paralelas ou o conjunto vazio.

Se $A1 = 0$ então necessariamente devem ter $C_1 \neq 0$, e a discussão é análoga ao caso anterior.

Se $A_1 \neq 0$ e $C_1 \neq 0$, pode-se escrever (5) como:

$$A_1\left(x_1 + \frac{D_1}{2A_1}\right)^2 + C_1\left(y_1 + \frac{E_1}{2C_1}\right)^2 + F - \frac{D_1^2}{4A_1} - \frac{E_1^2}{4C_1} = 0 \tag{9}$$

Fazendo a translação de fórmulas

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - \dfrac{D_1}{2A_1} \\ y_1 = y_2 - \dfrac{E_1}{2C_1} \end{cases}$$

obtém-se o sistema $x_2O_1y_2$ em relação ao qual a equação (7) se escreve na forma:

$$A_1 x_2^2 + C_1 y_2^2 + \overline{F_2} = 0 \tag{10}$$

e as coordenadas do ponto O_1 em relação ao sistema x_1Oy_1 são dadas por $(a_1,b_1) =$

$$\left(-\frac{D_1}{2A_1}, -\frac{E_1}{2C_1}\right)$$

Se $A_1C_1 > 0$ tem-se para $\overline{F_2} \neq 0$ uma elipse ou o conjunto vazio e para $\overline{F}_2 = 0$ tem-se um ponto.

Se $A_1C_1 < 0$ tem-se $\overline{F_2} \neq 0$ uma hipérbole se ou um par de retas concorrentes se. $\overline{F}_2 = 0$

IDENTIFICAÇÃO DA EQUAÇÃO DE UMA CÔNICA

Se o ângulo de rotação θ é escolhido de tal forma que $B_1 = 0$ então a equação (6) se transforma em:

$$B^2 - 4AC = -A_1C_1$$

Assim sendo, se $A_1C_1 > 0$ decorre que $B^2 - 4AC < 0$; se $A_1C_1 < 0$ decorre que $B^2 - 4AC > 0$ e se $A_1C_1 = 0$ decorre que $B^2 - 4AC = 0$.

Combinando isto com os resultados do parágrafo anterior, tem-se o seguinte teorema.

TEOREMA: Dada a equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, tem-se que ela representa no plano:

Um ponto, o conjunto vazio ou uma elipse se $B^2 - 4AC < 0$.

Uma reunião de duas retas concorrentes ou uma hipérbole se $B^2 - 4AC > 0$.

Uma parábola, uma reta, um par de retas paralelas, ou o conjunto vazio se $B^2 - 4AC = 0$.

3. Aplicação do software Maple no estudo das cônicas

Utilizando o aplicativo Maple, apresentam-se nesta seção, alguns procedimentos para a simplificação da equação de uma cônica, bem como, para a construção de seu gráfico.

Considerando-se uma cônica de equação :

$$A x^2 + B x y + C y^2 + D x + E y + F = 0$$

em que $A \neq 0$, $B \neq 0$ ou $C \neq 0$, ela fica completamente determinada através da lista de seus coeficientes :

```
> V = [ A, B, C, D, E, F]
```

O procedimento a seguir fornece o ângulo α de rotação e a nova equação da cônica que se obtém efetuando-se uma rotação de ângulo α. A sintaxe do programa é **Rot(V, tipo)**. O comando **Rot(V,angulo)** retorna o valor de α em graus e o comando **Rot(V, equa)** retorna equação da cônica em relação ao sistema rotacionado.

Pode-se rodar este programa para qualquer cônica; para tanto é suficiente alterar as coordenadas do vetor V.

```
> Rot:= proc( V,tipo )
> local cotg2w, cos2w, cosw, senw, M, N, U, S, H, alfa;
> global R, con ;
> if V[2]<>0 then
```

```
> cotg2w:= ( V[1]-V[3] ) / V[2];
> cos2w:= cotg2w/(sqrt(1 + (cotg2w)^2) ) ;
> cosw:= sqrt(((1+cos2w)/2)) :      senw:=
sqrt( ( (1-cos2w)/2) ):
> R:= evalm( linalg[matrix] (2, 2, [cosw, –sen
w, senw, cosw] ) ):
> N:=linalg[matrix]( 2,1 , [x1,y1] ):
M:=evalm( R&*N ):
> else
> M:= evalm(matrix(2, 2, [1,0,0,1])):       fi:
> U:= array(1..6):          con:=proc(U)
> U[1]*x^2 + U[2]*x*y + U[3]*y^2 +
U[4]*x + U[5]*y + U[6]          end:
> S:= con(V);       H:= expand( subs ( x =
M[1,1], y = M[2,1], S) ) :
> if tipo = angulo then alfa:= evalf (convert(
arccos(cosw), degrees) ):
> print(alfa)                fi;
> if tipo = equa then simplify(H)            fi;
> end:
```

O procedimento seguinte fornece as coordenadas do ponto O_1 para o qual deve-se transladar o sistema rotacionado e a nova equação da cônica que se obtém efetuando-se essa translação. A sintaxe do programa é **Trans(V,tipo)**. O comando **Trans(V,novaorigem)** retorna as coordenadas de O_1, em relação ao sistema original e o comando **Trans(V,equa)** retorna equação da cônica em relação ao sistema transladado.

```
> Trans:= proc( V, tipo )
> local T, c, K, H, Q;
> global C;
> T:= Rot( V, equa ):
> c:= subs( x1 = 0, y1 = 0, T):
> K:= [coeff( T,x1^2), 0, coeff(T,y1^2),
coeff(T,x1), coeff(T,y1), c];
> if K[1] <> 0  and  K[3] = 0  then if K[5]
= 0  then
> Q:= [–K[4]/(2*K[1]),0];
> else
> Q:= [–K[4]/(2*K[1]), – ( K[6]/K[5] ) + ( (
K[4]^2)/(4*K[5]*K[1] ) ) ];
> fi
> elif K[1] = 0 and K[3] <> 0  then
> if K[4] = 0 then  [0, – ( K[5] / (2*K[3]) )
];
> else
> Q:=[ – (K[6] / K[4]) + ( K[5]^2 ) / (
4*K[4]*K[3] ), – ( K[5] / (2*K[3] ) ) ];
> fi:
> elif K[1] = 0  and  K[3] = 0  then  Q:=
[0,0];
> else
> Q:= [– ( K[4] / (2*K[1]) ), – (K[5] /
(2*K[3] ) ) ];  fi:
> H:= expand ( subs(x = x2 + Q[1], y = y2 +
Q[2], con(K) ) );
> C:= evalm(R&*Q):
> if tipo = novaorigem then print(C);    fi;
> if tipo = equa then simplify(H)    fi;
> end:
```

O procedimento abaixo fornece o gráfico da cônica e nos apresenta também os sistemas de eixos rotacionados e transladados.

```
> dese:= proc(V)
> local x1, y1, rx1, ry1, trx1, try1, P, G, c, s1,
s2, gr;
> with(plots):
> with(plottools, line):
> x1:= line( [0,0],[8,0], t hickness=2 );
> y1:= line( [0,0],[0,7], thickness=2 );
> if V[2]<>0 then
> s1:= evalm( R&*[8,0]);         s2:= evalm
( R&*[0,7] );
> rx1:= line ( [0,0], [s1[1], s1[2]], color = red,
thickness = 2);
> ry1:= line ( [0,0], [s2[1], s2[2]], color=red,
thickness = 2);
> else
> rx1:= line( [0,0],[8,0], color = red, thick-
ness=2 );
> ry1:= line( [0,0],[0,7], color = red, thick-
ness=2);
> fi;
> trx1:= line([C[1],C[2]], [s1[1]+C[1],
s1[2]+C[2]],color = green, thickness = 2);
> try1:= line([C[1],C[2]], [s2[1]+C[1], s2[2]
+C[2]], color = green, thickness = 2);
```

> G:= con(V);
> gr:= implicitplot(G=0, x = C[1]-6..C[1]+6, y = C[2]-6..C[2]+6, color = blue,
> thickness= 2);
> display(x1, y1 ,rx1, ry1 ,trx1, try1, gr);
> end:

EXEMPLO

Aplicar os procedimentos anteriores para descobrir que tipo de curva representa a equação quadrática e esboçar o seu gráfico.

$$x^2 + 4\,x\,y + 4\,y^2 - 2\,x + 6\,y + 3 = 0$$

Declarando o vetor V dos coeficientes da cônica:

> V:= [1, 4, 4, –2, 6, 3];

V := [1, 4, 4, –2, 6, 3]

> Rot(V,angulo);　　　　Rot(V,equa);

63.43494883 degrees

$$5\,x1^2 + 2\sqrt{5}x1 + 2\sqrt{5}y1 + 3$$

O ângulo de rotação é aproximadamente 63,43 graus e a equação da cônica rotacionada é $5\,x_1^{\,2} + 2\sqrt{5}\,x_1 + 2\sqrt{5}\,y_1 + 3 = 0$.

> Trans(V, equa);　　　　Trans(V, novaorigem);

$$5\,x2^2 + 2\sqrt{5}\,y2$$

[1/5,-3/5]

Portanto, a nova origem do sistema transladado, tem coordenadas $(\frac{1}{5}, -\frac{3}{5})$ em relação ao sistema original e a equação da cônica transladada é $5\,x_2^{\,2} + 2\sqrt{5}y_2 = 0$, que representa uma parábola mostrada na Figura 5.

> dese(V);

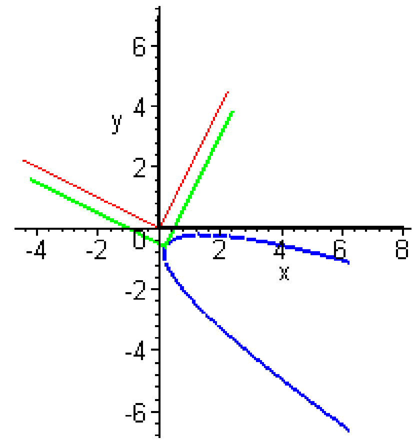


Figura 5 - Gráfico da equação quadrática $x^2 + 4\,x\,y + 4\,y^2 - 2\,x + 6\,y + 3 = 0$ assinalando os eixos de rotação e de translação

4. Aplicação das cônicas na demanda e oferta de produtos e discussão

A DEMANDA

Num mercado competitivo os interessados em adquirir uma certa mercadoria (ou serviço) entram em acordo com os vendedores sobre o preço que este deve assumir, tendo em vista o valor que estão dispostos a pagar pela compra e pela venda dessa mercadoria. Dessa forma, a movimentação do mercado se dá pela troca de quantidades determinadas de mercadorias por um valor também determinado chamado preço. O preço é o referencial e o fator determinante na atividade do mercado, de tal forma que a quantidade de mercadoria adquirida pelos consumidores dependerá do preço da mesma.

Tomando-se como exemplo o mercado de sapatos e supondo-se que as únicas variáveis atuantes sejam o preço e a quantidade adquirida pelos consumidores. A quantidade consumida desse produto dependerá diretamente de seu preço, isto é, se o preço abaixa, os consumidores em geral tendem a adquirir mais dessa mercadoria. Em contrapartida, se a mercadoria sofre aumento os consumidores compram menos ou, quando possível, a substituem por outra.

Assim, a resposta dos consumidores a diferentes preços pode ser expressa por uma relação chamada demanda, entre o preço por unidade p e a quantidade adquirida x ou seja, *a demanda é uma relação que dá as quantidades de um bem ou serviço que os consumidores estariam dispostos e seriam capazes de adquirir a diferentes preços* (Crusius e Crusius, 1985: 53).

O gráfico cartesiano da demanda é chamado curva de demanda; em geral, a quantidade de mercadoria, é representada ao longo do eixo horizontal e o preço da mercadoria por unidade, é representado ao longo do eixo vertical .

Se a relação de demanda é resolvida para p tem-se a função demanda $p = f(x)$ que expressa o preço p por unidade e a quantidade demandada x, de uma determinada mercadoria. A função demanda é geralmente uma função decrescente, pois a quantidade de demanda de uma mercadoria diminui à medida que o preço por unidade da mercadoria aumenta e vice-versa.

Em situações econômicas normais o domínio da função demanda é formado por números não negativos, visto que o preço negativo sugere que são pagos preços aos consumidores para a remoção de artigos do mercado. Já a demanda negativa indica que o preço é tão alto que impede a atividade do mercado, até que os artigos sejam oferecidos a preços satisfatórios.

Em geral nos problemas teóricos, nem sempre se especificam a população e o período de tempo, no entanto, a curva de demanda se refere a um período de tempo determinado e a uma população específica.

A OFERTA

O preço é também fator determinante na quantidade que a indústria (totalidade de empresas que produzem uma mesma mercadoria) estará disposta a produzir e oferecer ao mercado.

Tomando-se novamente o exemplo relativo ao mercado de sapatos. A quantidade de sapatos que os produtores oferecerão ao mercado dependerá diretamente do preço do sapato, isto é, se o preço não estiver bom para os produtores naturalmente eles suprirão o mercado com uma quantidade relativamente pequena dessa mercadoria. Mas, se o preço do sapato estiver em alta, os produtores suprirão o mercado com uma grande quantidade do produto no intuito de tirar vantagens dos preços mais altos.

Dessa forma, a resposta da indústria a diferentes preços pode ser expressa por uma relação chamada da oferta, entre o preço por unidade p e a quantidade oferecida x ao mercado, ou seja, *a oferta é uma relação que dá as quantidades de um bem ou serviço que a indústria estaria disposta a produzir e ofertar ao mercado a diferentes preços* (Crusius e Crusius, 1985: 54).

O gráfico cartesiano da oferta é chamado curva de oferta; a quantidade ofertada e o preço são representados nos eixos coordenados de forma análoga a curva de demanda. Dessa maneira, enquanto o comportamento do consumidor é descrito na curva de demanda, a curva de oferta reflete o comportamento dos vendedores.

Se a relação de oferta é resolvida para p, tem-se a função oferta $p = g(x)$ que expressa o preço p e a quantidade ofertada x, de uma determinada mercadoria.

A função oferta é geralmente uma função crescente, visto que a quantidade ofertada de uma mercadoria aumenta à medida que o preço por unidade aumenta e vice-versa.

Da mesma maneira como na demanda, o domínio da função oferta é formado por números não negativos, tendo em vista que a oferta negativa significa que os artigos não estão disponíveis no mercado, porque não são produzidos ou porque são retidos até que um preço satisfatório seja oferecidos por eles.

CURVAS QUADRÁTICAS DE DEMANDA E OFERTA

As curvas de demanda e oferta freqüentemente são representadas por curvas lineares porém, numa análise mais ampla, as equações quadráticas também são bastante utilizadas.

Parábolas que possuem partes de seus gráficos pertencentes ao primeiro quadrante são apropriadas para representar relações de oferta e demanda, conforme ilustração da Figura 6.

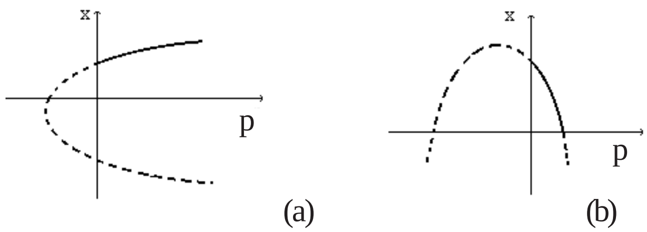


Figura 6 - Exemplos de curvas parabólicas de oferta e demanda

Por exemplo, parte do gráfico da parábola da Figura 6(a) pode ser usada para representar uma curva de oferta, e parte do gráfico da Figura 6(b) pode ser usada para representar uma curva de demanda. Elas representam apenas uma dentre uma família desses tipos de curvas.

O segmento de uma hipérbole equilátera pertencente ao primeiro quadrante é com freqüência usado para representar uma função de demanda (Figura 7).

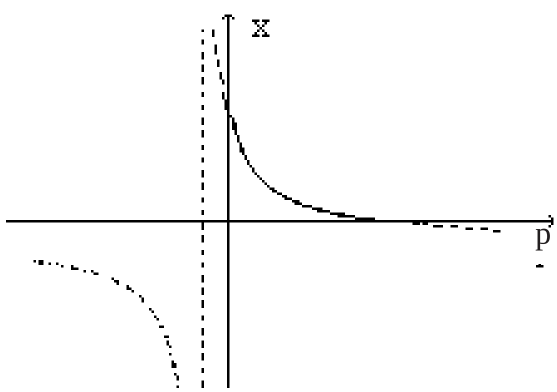


Figura 7 - Curva hiperbólica de demanda.

Observe-se que cada uma dessas curvas é apenas uma dentre uma família de curvas apropriadas para representar as funções discutidas (Weber, 1977).

EQUILÍBRIO DE MERCADO

Uma definição de *equilíbrio* pode ser dada de diversas maneiras. Todavia, um conceito intuitivo de equilíbrio, em geral, é aquele em que há um estado de repouso entre as variáveis que constituem o modelo, de tal forma que não há nenhuma tendência à dissolução do estado de repouso inicial.

Dessa forma, para que o equilíbrio exista, é necessário que as variáveis atuantes no modelo permaneçam imutáveis, sem ação independente; caso contrário, se pelo menos uma variável estiver mudando, ela estará provocando mudanças nas outras e formando uma reação em cadeia, assim, o equilíbrio não mais existe.

Referindo-se às variáveis que constituem o modelo, deve ficar claro que existem outras variáveis que não foram inclusas por escolha do analista. Assim, o equilíbrio em discussão possui relevância somente no contexto do conjunto específico das variáveis escolhidas e não sobre o conjunto de variáveis que englobam a realidade que o modelo representa.

Considerando-se que não há nenhuma tendência à dissolução do estado de repouso inicial, isso sugere que os fatores externos sejam considerados fixos, por suposição, não afetando assim o estado de equilíbrio provocado pela mutua compensação das variáveis internas do modelo.

Equilíbrio é uma situação na qual as coisas não tendem a mudar. Assim, um equilíbrio representa uma situação que pode perdurar (Crusius e Crusuius, 1985: 53).

Um modelo matemático de importante aplicação na economia envolvendo as interseções de gráfico surge em conexão com a demanda e a oferta. Para melhor compreensão desse modelo considera-se novamente na situação relativa ao mercado de sapatos.

Os produtores se dispõem a ofertarem suas mercadorias a determinados preços que lhes convier. No entanto, os consumidores também se dispõem a adquirir essas mercadorias a preços que lhe convier.

Nessas circunstâncias, as negociações devem determinar um preço que torne possível o produtor produzir e o consumidor adquirir a mercadoria. Existe então um preço de equilíbrio, no qual toda mercadoria produzida é adquirida pelos consumidores.

O preço de equilíbrio é aquele em que coincidem os planos dos demandantes ou consumidores e dos ofertantes ou produtores (Tan, 2001: 54).

É essa liberdade de negociação que possibilita a demanda e a oferta de atuarem como determinantes do preço, visto que o preço é quem traz a informação e o incentivo para aumentar ou diminuir a produção de uma determinada mercadoria, ou para o consumidor aumentar ou diminuir a compra dessa mercadoria.

Portanto, existe um ponto, chamado equilíbrio de mercado, onde a quantidade ofertada se iguala à quantidade demandada.

Geometricamente, o equilíbrio de mercado se dá no ponto de interseção das curvas de demanda e oferta. Nesse ponto, a coordenada *p* (*preço de equilíbrio*) é o preço de mercado no qual a oferta se iguala à demanda, isto é, o preço de mercado no qual não há sobra ou falta de mercadorias. Quando ocorre o equilíbrio de mercado, a quantidade de mercadoria produzida é chamada de *quantidade de equilíbrio*. A quantidade de equilíbrio e o preço de equilíbrio são determinados resolvendo-se simultaneamente as equações de demanda e oferta do mercado.

Uma solução aproximada para o ponto de equilíbrio pode ser obtida geometricamente traçando-se os gráficos das curvas de demanda e oferta e considerando o ponto de interseção.

Mesmo para curvas de oferta e demanda de 2° grau, uma solução algébrica pode envolver a resolução de uma equação de terceiro ou quarto grau.

A obtenção desse ponto de equilíbrio pode ser simplificada com a utilização de ferramentas computacionais.

EXEMPLO 1

Uma doceria produz diariamente, um certo tipo de bolo.

a) Quando o preço unitário de cada unidade é R$11,00 a doceria vende 15 unidades, se o preço for R$ 12,00 são vendidos 10 bolos e se o preço for R$9,60 o número de bolos vendidos é 20. Obter a função demanda admitindo que ela seja quadrática do tipo:

$$p = ax^2 + bx + c$$

b) Se a função oferta para esses bolos for p = 10 + 0.2x, qual é o preço de equilíbrio?

SOLUÇÃO

a) Para se obter a função demanda, substitui-se na função $p = ax^2 + bx + c$, sucessivamente, os pares de valores p = 11 e x = 15, p = 12 e x = 10 e, p = 9,60 e x = 20, obtendo-se o sistema linear:

$$\begin{cases} 225a + 25b + c = 11 \\ 100a + 10b + c = 12 \\ 400a + 20b + c = 9{,}60 \end{cases}$$

Resolvendo-o com a ajuda do Maple:

```
> solve( {225*a+25*b+c = 11,
100*a+10*b+c = 12, 400*a+20*b+c = 9.60}, {a,
b, c}));
```

{a = -0.008, b = 0, c = 12.80}

de onde segue que a função demanda é:

$$p = -0{,}008\, x^2 + 12{,}80$$

a) No ponto de equilíbrio, o preço é o mesmo na curva de demanda e de oferta.

Logo, tem-se a equação:

$$-0{,}008x^2 + 12{,}80 = 10 + 0{,}2\, x$$

que resolvida nos fornece o valor x =10, que substituído numa das duas curvas, por exemplo, na da oferta, fornece:

$$p = 10 + 0{,}2 \,.\, 10 = 12$$

Portanto, o preço de equilíbrio é R$12,00.

EXEMPLO 2

A equação de demanda por uma certa marca de sapatos é dada por (x+1)p = 35 e a correspondente equação de oferta é dada por $x^2 + 4x - 16p + 20 = 0$ onde 1000x pares de sapatos são demandados e 10p reais é o preço de cada par.

a) Determinar o preço e a quantidade de equilíbrio

b) Escolhe-se um preço acima do preço de equilíbrio, por exemplo R$70,00. A este preço, quantos itens os fabricantes produzirão? Quantos itens os consumidores irão comprar?

c) Escolhe-se agora um preço abaixo do preço de equilíbrio, por exemplo R$30,00. A este preço, quantos itens os fabricantes irão fornecer? Quantos itens os consumidores irão comprar?

SOLUÇÃO

a) Para encontrar o ponto de equilíbrio, resolvese o sistema simultâneo constituído das equações de demanda e oferta.

$$\begin{cases} x^2 + 4x - 16p + 20 = 0 \\ (x+1)p = 35 \end{cases}$$

Utilizando o aplicativo Maple para resolvê-lo, procede-se:

> solve({x^2+4*x-16*p+20 = 0, (x+1)*p=35}, {x, p}) ;

{x = 6, p = 5}, {x = RootOf (_Z^2+11*_Z+90), p = -35/8-7/ 16*RootOf(_Z^2+11*_Z+90)}

de onde vem que x = 6 e p = 5, ou seja, o ponto de equilíbrio é (6000,50). Assim, a quantidade de equilíbrio é 6000 pares de sapatos e o preço de equilíbrio R$ 50,00.

b) Com o preço do par a R$ 70,00, o número de itens a serem fabricados é obtido substituindo-se p = 7 na equação de oferta e resolvendo a equação obtida para x. O número de itens a serem consumidos é obtido substituindo-se p = 7 na equação de demanda e resolvendo a equação obtida para x.

> subs(p = 7, x^2 + 4*x - 16*p + 20 = 0);

$$x^2 + 4x - 92 = 0$$

> fabricação_7: = fsolve(x^2 + 4*x - 92 = 0, x);

fabricação_p := -11.798, 7.7980

> subs(p = 7, (x+1)*p = 35);

$$7x + 7 = 35$$

> consumo_7: = solve(7*x + 7 = 35, x);

consumo_3 := 4

Assim sendo, com o preço de R$ 70,00 os fabricantes estarão dispostos a produzir aproximadamente 7798 pares e consumidores irão comprar 4000 pares de sapatos.

c) De modo análogo, se o preço for de R$ 30,00, toma-se p = 3 e procede-se de maneira similar ao feito no item b):

> subs(p = 3, x^2 + 4*x – 16*p + 20 = 0);

$$x^2 + 4x - 28 = 0$$

> fabricação_3: = fsolve(x^2 + 4*x – 28 = 0, x);

fabricação_3 := –-7.6569, 3.6569

> subs (p = 3, (x+1)*p = 35);

$$3x + 3 = 35$$

> consumo_3: = fsolve(3*x + 3 = 35, x);

consumo_3 := 10.667

Assim sendo, com o preço de R$ 30,00 os fabricantes estarão dispostos a produzir aproximadamente 3657 pares e os consumidores irão comprar 10667 pares de sapatos.

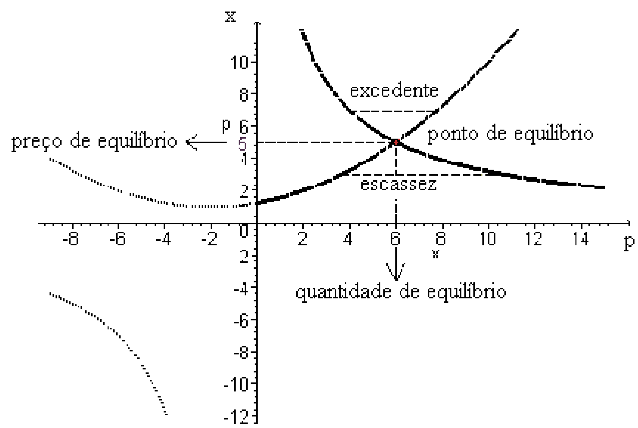


Figura 8 - Gráficos da função de oferta p = x^2 + 4 x – 16 p + 20 , da função de demanda (x+1) p = 35 e do ponto de equilíbrio.

Observa-se que, se o preço for R$ 70,00, um preço maior que o de equilíbrio, os fabricantes estarão dispostos a produzir aproximadamente 7.798 pares e consumidores irão comprar 4000 pares de sapatos e, assim, haverá o chamado *excedente* de oferta de 3798 pares de sapatos. Para se desfazer dos sapatos os vendedores terão que aceitar preços mais baixos, em conseqüência os preços tenderão ao preço de equilíbrio.

Por outro lado, se o preço for R$ 30,00, um valor menor que o de equilíbrio, os compradores irão comprar 10667 pares de sapatos, enquanto que os vendedores ofertarão 3657. Haverá, portanto, a chamada *escassez*, de 7010. Diante disso, a procura será maior que a quantidade ofertada no mercado e, conseqüentemente, os preços subirão tendendo ao preço de equilíbrio.

CURVAS DE TRANSFORMAÇÃO DE PRODUTO

Alguns processos de produção permitem a criação de mais de um produto associado à matéria-prima. A criação de carneiros é um exemplo clássico de tal processo, onde são produzidos dois produtos: lã e carne.

Uma curva que expressa a relação entre as quantidades de dois artigos diferentes produzidos pela mesma firma, usando-se em comum as matérias-primas e as verbas para mão de obra, são chamadas curvas de transformação de produto ou curvas de produção. Geometricamente, uma curva de transformação de produto é o lugar geométrico das combinações de quantidades do produto final que podem ser obtidas de um dado insumo (Weber, 1977). Dessa forma, se as quantidades de produtos produzidas são x e y, a curva de transformação em produto que os relaciona deve ser tal que, à medida que uma quantidade aumenta, a outra diminui.

Para satisfazer certas condições econômicas, as curvas de produção são freqüentemente consideradas com a concavidade voltada para baixo. Toda curva de transformação de produto é apenas uma dentre uma família de curvas, em que as curvas dessa família correspondem a vários insumos. Por exemplo, as elipses da Figura 8, representam três curvas de transformação em produto onde quanto mais afastada da origem estiver a curva, maior é o insumo ao qual ela corresponde (Weber, 1977).

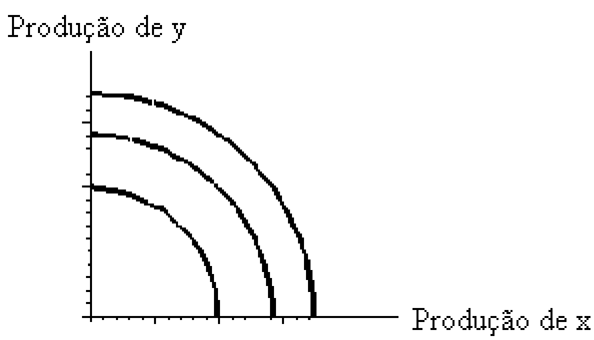


Figura 9 - Membros de uma família de curvas circulares de transformação de produto

Segmentos de curvas parabólicas pertencentes ao primeiro quadrante também são apropriadas, em alguns casos, para representar curvas de transformação em produto. Para as curvas hiperbólicas, deve-se restringir o seu domínio ao ramo inferior, como ilustrado na figura 10 (Weber, 1977).

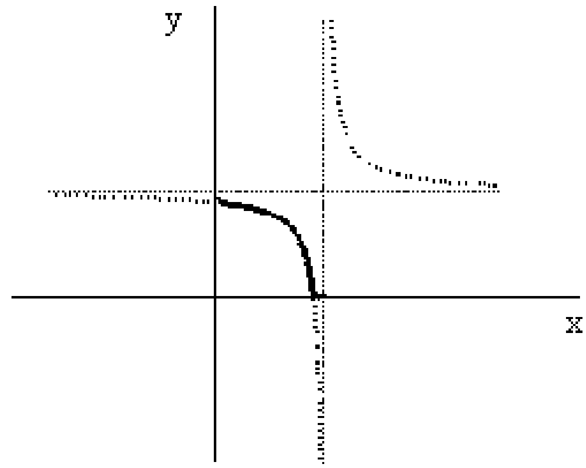


Figura 10 - Curva hiperbólica de transformação de produto

EXEMPLO 1

Uma companhia produz quantidades x e y de duas espécies diferentes de doces, usando o mesmo processo de produção. A curva de transformação em produto para o insumo usado é dada por:

$$5x^2 + 2y^2 - 10x - 4y - 91 = 0$$

a) Quais são as maiores quantidades x e y que podem ser produzidas?

b) Que quantidades x e y devem ser produzidas de maneira a se ter $x = \frac{3}{4}y$?

SOLUÇÃO

a) Construindo o gráfico da curva de transformação de produto no primeiro quadrante:

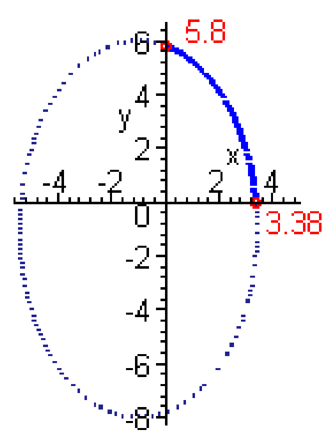


Figura 11 - Curva de transformação de produto do EXEMPLO 1 observa-se que o valor máximo de y ocorre quando x = 0, o qual é encontrado substituindo x = 0 na equação da curva e resolvendo-se a equação obtida.

> subs(x = 0, 5*x^2+2*y^2+10*x+4*y–91 = 0);

$$-91 + 2y^2 + 4y = 0$$

> evalf(solve (–91+2*y^2+4*y = 0, y));

$$5.8, -7.8$$

Portanto, a maior quantidade y é aproximadamente 5,80. O maior valor de x, ocorre quando y = 0, o qual é encontrado substituindo y = 0 na equação da curva e resolvendo-se a equação obtida.

> subs(y=0, 5*x^2+2*y^2+10*x+4*y-91 = 0);

$$5x^2 - 91 + 10x = 0$$

> evalf(solve(5*x^2+10*x–91 = 0, x));

$$3.38, -5.38$$

Portanto, a maior quantidade x é aproximadamente 3,38

b) Para resolver o segundo item, substitui-se $x = \frac{3}{4}y$ na equação:

$$5x^2 + 2y^2 - 10x - 4y - 91 = 0 .$$

> subs(x= 3/4*y,5*x^2+2*y^2+10*x+4*y–91 = 0);

$$77/16\, y^2 + 23/2\, y - 91 = 0$$

> valor_y: = solve(77/16*y^2+23/2*y–91. = 0, y);

$$valor\_y := -\!-5.70, 3.31$$

> valor_x := solve(subs (x = 3.31, x = $\frac{3}{4}$ y));

$$valor\_x := 4.41$$

Assim, as quantidades produzidas são x = 4,41 e y = 3,31, aproximadamente.

EXEMPLO 2

Uma companhia produz quantidades x e y de duas substâncias petroquímicas, usando o processo de produção. Determinar as maiores quantidades x e y que podem ser produzidas, sabendo-se que curva de transformação de produto para o insumo usado é dada por $(y - 20)(x - 30) = 300$, onde $x \leq 15$.

SOLUÇÃO

Se y = 0 temos que $-20(x - 30) = 300$ de onde vem que x = 15, isto é, a maior quantidade x é 15. Se x = 0 temos que $-30(y - 20) = 300$ e daí, a maior quantidade y é 30.

O gráfico da curva de transformação de produto é a hipérbole esboçada na figura 12.

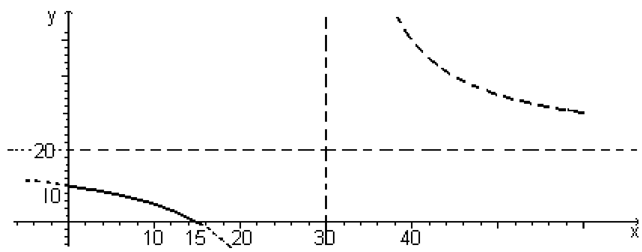


Figura 12 - Curva hiperbólica de transformação de produto para o insumo do EXEMPLO 2.

APLICABILIDADE EM OUTRAS SITUAÇÕES

Estão a seguir alguns problemas propostos cujas soluções podem ser obtidas seguindo os passos dos exemplos apresentados anteriormente.

PROBLEMA 1

Supondo-se que a curva de demanda para um certo produto seja dada por $2x^2 - p - 3x - 4 = 0$ e que a curva de oferta seja dada por $-x^2 + x + p - 20 = 0$.

a) A um preço p = 4 qual a quantidade de consumidores dispostos a comprar e qual quantidade os produtores estão dispostos a oferecer? O mercado empurrará os preços para cima ou para baixo?

b) Achar o ponto de equilíbrio.

PROBLEMA 2

A função oferta e demanda de um produto são respectivamente:

$$p = 100x + 50x^2 \quad \text{e} \quad p = 400 - 80x - 40x^2$$

a) Qual é o ponto de equilíbrio?

b) Se o governo instituir um imposto social de R$15,00 por unidade vendida, cobrado junto ao produtor, qual o novo preço de equilíbrio?

c) Nas condições do item (b), qual a receita arrecadada pelo governo?

PROBLEMA 3

Supondo-se que a função oferta para rádios tenha a forma:

$$\left(\frac{p}{3}-b\right)^2 = a^2 x, \qquad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

onde x é a quantidade em oferta e p é o preço por unidade em reais e se a quantidade ofertada for de 10000 rádios quando o preço for R$60,00 e 62500 rádios quando o preço for R$105,00:

a) Determinar a função oferta e esboçar o seu gráfico.

b) Que preço por unidade fará com que o fornecedor disponha 32400 rádios no mercado?

PROBLEMA 4

Num departamento de marketing o gerente conclui que pode vender diariamente 160 unidades de um certo produto. Interessado em produzir esta quantidade ele constatou que assumindo todos os fatores exceto o número de empregados e a produção final resultante, constantes dentro da faixa desta produção total, a função produção expressa-se pela equação:

$$2x^2 - 4x - y = 0$$

a) Que tipo de curva representa a equação?

b) Quantos empregados são necessários para produzir as 160 unidades?

c) Se o número de empregados trabalhando for 6, quantas unidades serão produzidas diariamente?

PROBLEMA 5

Numa companhia o diretor de pesquisas operacionais acredita que o custo médio de produção a curto prazo y e o número de unidades produzidas x, podem ser relacionados pela equação:

$$5y = -x^2 + 2x + 99$$

a) Que tipo de curva representa a equação? Fazer um esboço do gráfico.

b) Quais as maiores quantidades x e y que podem ser produzidas?

5. Possíveis aplicações das cônicas em outras áreas

Além de sua aplicação em Administração e Economia as cônicas têm muitas aplicações importantes nas mais diversas áreas.

Em 1604, Galileu descobriu que lançando-se um projétil horizontalmente do topo de uma torre e supondo que a única força atuante era a da gravidade (resistência do ar e outros fatores complicadores são ignorados) sua trajetória foi uma parábola. Um dos grandes eventos da história da Astronomia ocorreu alguns anos mais tarde, em 1609, quando Kepler publicou sua descoberta de que a órbita de Marte era uma elipse. Cerca de 60 anos depois, Newton provou matematicamente que os planetas movem-se em órbitas elíticas ao redor do Sol, sendo que este ocupa um dos focos. Isso o levou a formular e publicar em 1687 a teoria da Gravitação Universal para explicar o mecanismo do sistema solar. Hipérboles são usadas em combate para localizar a posição das armas inimigas pelo som do disparo dessas armas. Se uma quantidade varia inversamente em relação a outra, tal como pressão e volume na lei de Boyle para um gás perfeito, a uma temperatura constante, o gráfico será uma hipérbole.

Um exemplo de aplicação importante das parábolas está associado às suas tangentes. Considerando a reta tangente em um ponto P de uma parábola em que F é o foco, α o ângulo entre a tangente e o segmento FP e β o ângulo entre a tangente e a reta horizontal que passa por P. Pode-se mostrar que $\alpha = \beta$. Esta propriedade geométrica das parábolas tem muitas aplicações. Por exemplo, a forma do espelho de um farol se obtém girando uma parábola em torno de seu eixo, obtendo uma superfície de revolução.

Se uma fonte de luz é colocada em seu foco F, por uma lei da física (o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência), um raio de luz será refletido ao longo de uma reta paralela ao seu eixo, conforme a Figura 13. Emprega-se o mesmo princípio na construção de espelhos telescópios. Ele é também a base de desenho de antenas de radar, radiotelescópios e microfones usados em campos de futebol.

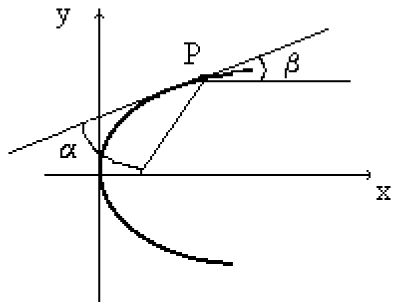


Figura 13 - Propriedade da reflexão.

6. Considerações finais

As cônicas são aplicadas nas mais diversas áreas e, por isso, a importância delas é difícil de ser menosprezada.

Na Administração e na Economia, por exemplo, as curvas de demanda e oferta são várias vezes representadas por curvas lineares. Isso acontece pelo fato de muitas dessas representações serem razoavelmente precisas quando analisadas dentro de uma faixa de valores limitada. No entanto, em uma análise mais ampla, as cônicas também são freqüentemente utilizadas para essas representações.

Observa-se, então, que nesses casos, uma solução algébrica simultânea para se encontrar o ponto de equilíbrio pode envolver equações do terceiro e do quarto grau, cujas soluções e interpretações geométricas podem não ser realizadas facilmente.

Dessa forma, este trabalho buscou enfatizar algumas aplicações das cônicas em problemas econômicos, baseadas em dados reais, cujas soluções exigiram técnicas algébricas, numéricas e computacionais, bem como conhecimentos da equação quadrática e do aplicativo Maple para gerar e interpretar gráficos, ressaltando assim, a relação existente entre a Matemática e o mundo real.

REFERÊNCIAS

1 BIRKHOFF G., MACLANE S. **A survey of Modern Álgebra**. NewYork: Macmillan Company, 1970.

2 BURKHARDT W. **First Steps in Maple**. Berlin: Spring-Verlag, 1994.

3 CRUSIUS, Y. R., CRUSIUS, C. A**. Introdução à Economia**. São Paulo: Makron Books do Brasil, 1985.

4 HOFFMANN, L.D. **Cálculo: um curso moderno e suas aplicações**. Rio de Janeiro: LTC, 1990.

5 LEITHOLD, L.**Matemática Aplicada à Economia e Administração**. São Paulo: Harbra, 1984.

6 OLIVEIRA, E. **Cônicas**, 1999. (Apostila, UNIFRAN – Franca), Mimeo.

7 PAULA, C.E.C. de. **Aplicações das Cônicas na Administração e Economia**, 2002. (Trabalho de Iniciação Científica, UNIFRAN - Franca), Mimeo.

8 PROFESSORES do DM - UFSCar. Notas de Matrizes, Vetores e Geometria Analítica, 1981. (Apostila, UFSCar– São Carlos).

9 SIMMONS, G.F. **Cálculo com Geometria Analítica**. São Paulo: MacGraw-Hill, 1998.

10 TAN, S. T. **Matemática Aplicada à Administração e Economia**. São Paulo: Pioneira, 2001.

11 WEBER, J. E. **Matemática para Economia e Administração**. São Paulo: Harper e Row do Brasil Ltda, 1977.