



**UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT**  
**CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**EQUAÇÕES DE DIFERENÇA E  
TEORIA DE ESTABILIDADE**

JAQUELINE VALLE

JOINVILLE, 2016



**JAQUELINE VALLE**

**EQUAÇÕES DE DIFERENÇA E TEORIA DE  
ESTABILIDADE**

Trabalho de Graduação apresentado ao  
Curso de Licenciatura em Matemática  
do Centro de Ciências Tecnológicas,  
da Universidade do Estado de Santa  
Catarina, como requisito parcial para  
a obtenção do grau de Licenciatura em  
Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Rafael  
Santos Furlanetto

**JOINVILLE, SC  
2016**





JAQUELINE VALLE


**EQUAÇÕES DE DIFERENÇA E TEORIA DE ESTABILIDADE**


Trabalho de Graduação apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

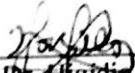
**BANCA EXAMINADORA**

Orientador:   
Prof. Dr. José Rafael Santos Furlanetto  
Universidade do Estado de Santa Catarina

Co-orientador:   
Prof. Dr. Luís Henrique de Santana  
Universidade do Estado de Santa Catarina

Membro:   
Prof. Dr. Fernando Deeke Sasse  
Universidade do Estado de Santa Catarina

Membro:   
Profa. Dra. Ligia Liani Barz  
Universidade do Estado de Santa Catarina

Membro:   
Prof. Dr. Filgídio Portillo Oquendo  
Universidade Federal do Paraná

Joinville, 02/06/2016



Aos meus pais por todo apoio e dedicação.





# Resumo

VALLE, Jaqueline. **Equações de Diferença e Teoria de Estabilidade**. 2016. 127. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2016.

Neste trabalho apresentamos uma abordagem inicial sobre a teoria de equações de diferença, sendo nosso foco o estudo da estabilidade. Inicialmente tratamos das equações de diferença escalares lineares, homogêneas e não-homogêneas definindo a solução geral para cada um dos casos e elencando alguns resultados sobre o comportamento de suas soluções, citamos também algumas técnicas de linearização. Na sequência estudamos a solução geral de sistemas homogêneos e não-homogêneos de equações de diferença lineares. Posteriormente apresentamos teoremas sobre estabilidade para equações de diferença vetoriais lineares e não-lineares. Por fim abordamos algumas aplicações dos itens estudados modelando problemas nas áreas de Biologia, Economia, Sistemas de Informação e Física.

**Palavras-chave:** Equação de Diferença. Ponto de Equilíbrio. Estabilidade



# Abstract

VALLE, Jaqueline. Difference Equations and stability theory. 2016. 127. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2016.

In this work we show an initial approach to the theory of difference equations with our main focus on stability results. Initially we will treat the equations of linear scalar difference, homogenous and nonhomogeneous setting the general solution for each case and listing some results on the behavior of their solutions, also quoted some linearization techniques. Following study the general solution of homogeneous systems and nonhomogeneous systems of linear difference equations. Then present theorems on stability for linear and nonlinear vector difference equations. Finally we discuss some applications of the studied items modeling problems in the areas of Biology, Economics, Information Systems and Physics.

**Key-words:** Difference Equation. Equilibrium Point. Stability.



# Sumário

	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
<b>1</b>	<b>EQUAÇÕES DE DIFERENÇA ESCALARES</b>	<b>17</b>
<b>1.1</b>	<b>EQUAÇÕES DE DIFERENÇA LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM</b>	<b>18</b>
1.1.1	Pontos de Equilíbrio	19
1.1.2	Pontos Periódicos e Ciclos	27
<b>1.2</b>	<b>EQUAÇÕES DE DIFERENÇA DE ORDEM SUPERIOR</b>	<b>28</b>
1.2.1	Equações de Diferença Lineares Homogêneas e com Coeficientes Constantes	36
1.2.2	Comportamento Assintótico das Soluções	41
1.2.3	Equações de Diferença Lineares Não-Homogêneas	46
<b>1.3</b>	<b>TÉCNICAS DE LINEARIZAÇÃO</b>	<b>50</b>
<b>2</b>	<b>SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE DIFERENÇA LINEARES</b>	<b>55</b>
<b>2.1</b>	<b>SISTEMAS HOMOGÊNEOS</b>	<b>55</b>
<b>2.2</b>	<b>SISTEMAS NÃO-HOMOGÊNEOS</b>	<b>61</b>
2.2.1	Transformando Equações de Diferença Escalares em Sistemas	63
2.2.2	Sistemas Lineares Periódicos	65
<b>3</b>	<b>ESTABILIDADE</b>	<b>71</b>
<b>3.1</b>	<b>COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE SISTEMAS LINEARES</b>	<b>82</b>
3.1.1	Implicações para Casos Particulares	89
<b>3.2</b>	<b>ESTABILIDADE DE EQUAÇÕES DE DIFERENÇA NÃO-LINEARES</b>	<b>92</b>

<b>3.3</b>	<b>ESTABILIDADE DE EQ. DE DIFERENÇA DE ORDEM SUPERIOR . . . . .</b>	<b>101</b>
3.3.1	Equações Lineares . . . . .	101
<b>4</b>	<b>APLICAÇÕES . . . . .</b>	<b>109</b>
4.1	UM MODELO SIMPLES DA OSCILAÇÃO DE PREÇOS E DEMANDAS . . . . .	109
4.2	PROPAGAÇÃO DE DOENÇAS . . . . .	114
4.3	TRANSMISSÃO DE INFORMAÇÕES . . . . .	117
4.4	A EQUAÇÃO DO CALOR . . . . .	119
4.5	DESENVOLVIMENTO DO <i>FLOUR BEETLE</i> . . . . .	121
	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>127</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>129</b>

# INTRODUÇÃO

Uma das motivações para abordagem desse tema são as aplicações práticas desta área da análise matemática em modelos de Física, Engenharia, Economia, Logística Militar e Biologia. Por exemplo, nas Ciências Econômicas é possível descrever o comportamento do modelo financeiro público de um país no decorrer do tempo, a partir da situação atual da economia e do padrão discreto adotado. É bem aceitável fazer projeções a longo prazo e, inclusive, determinar se o sistema assumirá um comportamento oscilatório estável ou se será tão estável a ponto de não apresentar oscilações significativas ou ainda, se será instável e acabará em colapso social.

A discretização de modelos matemáticos tem a óbvia vantagem de serem mais facilmente tratados via métodos computacionais. Pontos críticos destes modelos traduzem de forma eficiente comportamentos e/ou ações que devem ser tomadas. De acordo com (LUÍS, 2006) o primeiro problema envolvendo equações de diferença que se tem registros foi formulado pelo matemático italiano Leonardo de Pisa (Fibonacci) em 1202, o qual segundo (CULL; FLAHIVE; ROBSON, 2005) foi proposto e discutido por ele em seu livro “Liber Abaci”. No entanto (EVES, 2004) afirma que o objetivo principal de Fibonacci ao escrever o livro era defender o uso de notações indo-arábicas, afirmando ainda que ele foi um dos principais responsáveis pela introdução desses numerais na Europa.

A questão envolvendo equações de diferença abordada por Leonardo tratava da reprodução de coelhos: “Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?”.

O problema proposto pelo matemático italiano gera uma sequência, descrita pela equação de diferença, ou equação de recorrência  $x(n) = x(n-1) + x(n-2)$ , ou seja, a quantidade de coelhos no  $n$ -ésimo mês é igual a soma da quantidade de coelhos no mês anterior com a quantidade de coelhos de dois meses antes. De acordo com a teoria atual de equações de diferença, a equação que modela o problema proposto por Fibonacci é linear, homogênea e de segunda ordem.

Um dos desafios deixados por tal problema seria determinar alguns dos números de Fibonacci, que são os termos da sequência gerada pela equação de diferença, sem que para isso fosse necessário calcular os números precedentes à esse. De acordo com (LUÍS, 2006) somente em 1843, ou seja mais de seiscentos anos depois da divulgação do problema Jacques Binet alcançou tal feito, concluindo que o  $n$ -ésimo número de Fibonacci é dado por

$$x(n) = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Sendo assim nesse trabalho pretendemos estudar a estabilidade dos pontos críticos, bem como suas aplicações em modelos. Utilizamos como bibliografia base (ELAYDI, 2000), assim como (MICKKENS, 1990), que apresenta uma abordagem semelhante ao primeiro. Buscamos escrever um trabalho autocontido, porém recomendamos que o leitor tenha consigo os livros: Fundamentos de Análise Funcional (BORTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2015) e Espaços Métricos (LIMA, 2009), para consulta sobre normas e suas propriedades, livros de álgebra como Álgebra Linear (HOFFMAN; KUNZE, 1979), Álgebra Linear com Aplicações (LEON, 2008) e Álgebra Liner (LIMA, 2008), como referências para o estudo da forma canônica de Jordan, além do livro de Análise Real (LIMA, 2006) que apresenta resultados sobre convergência de sequências. Citamos esses livros pois foram os que utilizamos para compreender plenamente os itens abordados nesse trabalho.

No primeiro capítulo tratamos das equações de diferença es-



calares lineares, homogêneas (como a equação de Fibonacci citada) e não-homogêneas, definindo a solução geral para cada um dos casos e elencando alguns resultados sobre o comportamento de suas soluções, citamos também algumas técnicas de linearização. No segundo capítulo estudamos a solução geral de sistemas homogêneos e não-homogêneos de equações de diferença lineares. O terceiro capítulo é a "menina dos nossos olhos" onde apresentamos teoremas sobre estabilidade para equações de diferença vetoriais lineares e não-lineares. Por fim, no quarto capítulo abordamos algumas aplicações da teoria estudada modelando problemas nas áreas de Biologia, Economia, Sistemas de Informação e Física.



# 1 EQUAÇÕES DE DIFERENÇA ESCALARES

**Definição 1.1.** *Uma equação de diferença de ordem  $k$  é uma relação funcional da forma*

$$f(n, x(n+k), x(n+k-1), \dots, x(n)) = 0 \quad (1.1)$$

onde  $n \in \mathbb{Z}^+$  e  $x(n) \in \mathbb{R}$ .

A equação é linear se podemos escrever a mesma na forma:

$$x(n+k) + p_1(n)x(n+k-1) + \dots + p_k(n)x(n) = g(n) \quad (1.2)$$

onde  $p_i(n)$  e  $g(n)$  são funções reais definidas para  $n \in \mathbb{Z}^+$  e  $p_k(n)$  é não nulo para todos os  $n$ 's.

**Definição 1.2.** *Uma sequência  $x(n)$  é dita **solução** de (1.1) se satisfaz esta equação.*

**Definição 1.3.** *A equação (1.1) será dita **autônoma** se não depender da variável  $n$ , ou seja*

$$f(n, x(n+k), x(n+k-1), \dots, x(n)) = f(x(n+k), x(n+k-1), \dots, x(n))$$

De um modo geral as equações de diferença descrevem a evolução de fenômenos ao longo do tempo, onde as características do objeto de estudo no instante  $n+1$  são funções das características do mesmo no instante  $n$ . Nesse trabalho denotaremos essa relação pela equação de diferença:

$$x(n+1) = f(x(n)) \quad (1.3)$$

**Definição 1.4.** Dado um ponto inicial  $x_0$  definimos  $f^0(x_0) = x_0$  e a  $n$ -ésima iteração de  $x_0$  sobre  $f$  como

$$f^n(x_0) = \underbrace{f(f(\dots f(x_0)))}_{n \text{ vezes}}$$

**Definição 1.5.** Definimos a órbita (**positiva**) de  $x_0$ , como sendo o conjunto

$$O(x_0) = \{f^n(x_0); n \geq 0\} \quad (1.4)$$

## 1.1 EQUAÇÕES DE DIFERENÇA LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

Uma equação linear de diferença de primeira ordem não-homogênea é da forma

$$x(n+1) = a(n)x(n) + g(n), \quad x(n_0) = x_0, \quad n \geq n_0 \geq 0. \quad (1.5)$$

A equação homogênea associada a equação (1.5) é dada por

$$y(n+1) = a(n)y(n), \quad y(n_0) = y_0, \quad n \geq n_0 \geq 0 \quad (1.6)$$

onde  $a(n) \neq 0$  e  $a(n), g(n)$  são funções definidas para  $n \geq n_0 \geq 0$  em ambas as equações.

É possível obter as soluções das equações (1.5) e (1.6) através de iterações simples, por isso deixamos os cálculos a cargo do leitor e apresentaremos diretamente o resultado esperado:

$$\begin{aligned} x(n) &= \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] x_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[ \prod_{i=r+1}^{n-1} a(i) \right] g(r) \\ y(n) &= \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] y_0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

para todo  $n > n_0$ . O desenvolvimento para chegar a essas soluções está apresentado em (ELAYDI, 2000), também em um artigo em preparação

onde fazemos essa demonstração através de um paralelo com a técnica de fator integrante estudada em equações diferenciais.

### 1.1.1 Pontos de Equilíbrio

**Definição 1.6.** (MARTINS; VASCONCELLOS, 2014) *Seja  $f : A \rightarrow A$  então  $x^* \in A$  é dito ponto fixo de  $f$  se*

$$f(x^*) = x^*.$$

Essa definição de ponto fixo será aplicada nesse capítulo considerando  $f$  uma função de uma variável e nos próximos capítulos considerando  $f$  uma função de várias variáveis.

**Definição 1.7.** *Um ponto  $x^*$  no domínio de  $f$  será dito **ponto de equilíbrio** de (1.3) se é um ponto fixo de  $f$ .*

Graficamente o ponto de equilíbrio é a coordenada  $x$  do ponto onde o gráfico de  $f$  intersepta a reta  $y = x$ .

**Definição 1.8.** *Um ponto  $x$  no domínio de  $f$  é um **eventual ponto de equilíbrio** se existir um número  $r$  inteiro positivo e um ponto de equilíbrio  $x^*$  de (1.3) tais que*

$$f^r(x) = x^* \quad \text{e} \quad f^{r-1}(x) \neq x^*.$$

**Definição 1.9.** *Seja  $x^*$  ponto fixo de (1.3) dizemos que  $x^*$  é:*

- i) **Estável** se dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que, se  $|x_0 - x^*| < \delta$  então  $|f^n(x_0) - x^*| < \varepsilon$ , para todo  $n > 0$ . Se  $x^*$  é não estável então é dito **instável**.*
- ii) **Atrator** se existe  $\eta > 0$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = x^*$  sempre que  $|x_0 - x^*| < \eta$ . Se essa sentença for verdadeira para todo  $\eta > 0$  então  $x^*$  é dito **atrator global**.*

iii) **Assintoticamente estável** se é estável e atrator. Se as propriedades forem verdadeiras para todo  $\eta > 0$  então  $x^*$  é **globalmente assintoticamente estável**.

Mais adiante abordaremos uma generalização dessa definição. Agora vamos tratar de nosso primeiro resultado sobre estabilidade de equações de diferença.

Consideremos que a função  $f$  de (1.3) seja de classe  $C^\infty$  em uma vizinhança de  $x^*$ , temos então os seguintes resultados:

**Teorema 1.1.** *Seja  $x^*$  um ponto de equilíbrio da equação (1.3) onde  $f$  satisfaz as condições citadas acima, sendo assim:*

i) Se  $|f'(x^*)| < 1$ , então  $x^*$  é assintoticamente estável.

ii) Se  $|f'(x^*)| > 1$ , então  $x^*$  é instável.

### Demonstração:

i) Para  $|f'(x^*)| < 1$ :

Suponhamos que  $|f'(x^*)| < M < 1$ , então existe um intervalo  $J = (x^* - \gamma, x^* + \gamma)$ , com  $x^* \in J$ , tal que  $|f'(x)| \leq M < 1$ , para todo  $x^*$  em  $J$  pois caso contrário, para cada intervalo  $I_n = (x^* - \frac{1}{n}, x^* + \frac{1}{n})$  existe  $x(n)$  em  $I_n$  tal que  $|f'(x(n))| > M$ . Assim quando  $n$  tende ao infinito,  $x(n)$  tende a  $x^*$ . Como  $f'$  é contínua temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x(n)) = f'(x^*)$$

Consequentemente

$$M \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |f'(x(n))| = |f'(x^*)|$$

Absurdo. Logo existe  $J$  que satisfaz as condições declaradas.

Seja  $x(0)$  pertencente a  $J$ , temos que:

$$|x(1) - x^*| = |f(x(0)) - f(x^*)|$$

Como  $f$  é contínua em  $[x(0), x^*]$  e diferenciável em  $(x(0), x^*)$ , pelo Teorema do Valor Médio temos que existe  $c$  nesse intervalo que satisfaz:

$$\frac{|f(x(0)) - f(x^*)|}{|x(0) - x^*|} = |f'(c)|$$

ou seja,

$$|x(1) - x^*| = |f'(c)| |x(0) - x^*|$$

como  $c$  pertence à  $J$ , temos que  $|f'(c)| < M$ , logo

$$|x(1) - x^*| < M |x(0) - x^*| < M\gamma < \gamma$$

sendo assim  $x(1)$  pertence a  $J$ .

Por indução concluímos que se

$$|x(n) - x^*| \leq M^n |x(0) - x^*| \tag{1.8}$$

sendo que  $x(n)$  está em  $J$ , então

$$|x(n+1) - x^*| = |f(x(n)) - f(x^*)| = |f'(c_n)| |x(n) - x^*|$$

onde  $c_n$  pertence ao intervalo  $(x(n), x^*)$  que está contido em  $J$ . Consequentemente

$$|x(n+1) - x^*| \leq M |x(n) - x^*|$$

A partir da desigualdade (1.8) obtemos

$$|x(n+1) - x^*| \leq M^{n+1} |x(0) - x^*|$$

sendo que  $x(n+1)$  pertence à  $J$ , logo

$$|x(n) - x^*| \leq M^n |x(0) - x^*|$$

para todo  $n$  positivo, portanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x(n) - x^*| = 0$ , ou seja  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = x^*$ , sendo assim  $x^*$  é ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

ii) Para  $|f'(x^*)| > 1$ :

Suponhamos que  $|f'(x^*)| > M > 1$ , com uma argumentação análoga a do caso anterior, concluímos que existe um intervalo  $J = (x^* - \gamma, x^* + \gamma)$ , que contém  $x^*$ , tal que  $|f'(x)| > M > 1$  para todo  $x^*$  em  $J$ . Para  $x(0)$  pertencente à  $J$ , temos que:

$$|x(1) - x^*| = |f(x(0)) - f(x^*)|$$

Como  $f$  é contínua em  $[x(0), x^*]$  e diferenciável em  $(x(0), x^*)$ , pelo Teorema do Valor Médiotemos que existe  $c$  nesse intervalo tal que:

$$\frac{|f(x(0)) - f(x^*)|}{|x(0) - x^*|} = |f'(c)|$$

ou seja,

$$|x(1) - x^*| = |f'(c)| |x(0) - x^*|$$

como  $c$  está em  $J$  é válido que  $|f'(c)| < M$ , logo



$$|x(1) - x^*| > M |x(0) - x^*|$$

sendo assim  $x(1)$  não pertence à  $J$ . Por indução concluímos que se

$$|x(n) - x^*| > M^n |x(0) - x^*|$$

então

$$|x(n+1) - x^*| > M^{n+1} |x(0) - x^*|$$

Como  $M > 1$  temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} M^{n+1} |x(0) - x^*| = \infty$ , portanto  $x^*$  é instável. ■

**Teorema 1.2.** *Suponha que para um ponto de equilíbrio  $x^*$  de (1.3) tenhamos*

$$f'(x^*) = 1.$$

Neste caso:

- i) Se  $f''(x^*) \neq 0$ , então  $x^*$  é instável.*
- ii) Se  $f''(x^*) = 0$  e  $f'''(x^*) > 0$  então  $x^*$  é instável.*
- iii) Se  $f''(x^*) = 0$  e  $f'''(x^*) < 0$  então  $x^*$  é assintoticamente estável.*

**Demonstração:**

- i) Se  $f''(x^*) \neq 0$*

Neste caso  $f''(x^*) > 0$  ou  $f''(x^*) < 0$ . Se  $f''(x^*) > 0$  a curva  $y = f(x)$  tem concavidade para cima em  $x^*$  e existe  $\varepsilon$  positivo tal que se  $x$  está no intervalo  $(x^*, x^* + \varepsilon)$  então  $f'(x) > 0$ ,  $f''(x) > 0$  e  $f(x) > f(x^*)$ . Pelo Teorema do Valor Médio, aplicado para a função  $f$ , temos que existe  $c$  entre  $x$  e  $x^*$ , tal que:

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*}$$

Analogamente temos que se  $f''(x^*) < 0$  então  $f'(x) > 1$ , ou seja  $x^*$  é instável.

ii) Se  $f''(x^*) = 0$  e  $f'''(x^*) > 0$

Utilizando a expansão da função  $f$  em série de Taylor em torno do ponto  $x^*$ , temos que:

$$f(x) = f(x^*) + (x - x^*)f'(x^*) + \frac{(x - x^*)^2}{2!}f''(x^*) + \frac{(x - x^*)^3}{3!}f'''(x^*) + r(x - x^*)$$

onde  $\lim_{x \rightarrow x^*} \frac{r(x - x^*)}{|x - x^*|^3} = 0$ , sendo assim temos:

$$f(x) = x + \frac{(x - x^*)^3}{3!}f'''(x^*) + r(x - x^*)$$

De fato existe  $\varepsilon$  positivo de modo que se  $x$  está no intervalo  $(x^*, x^* + \varepsilon)$  então  $x - x^* > 0$ , ou seja  $\frac{(x - x^*)^3}{3!}f'''(x^*) > 0$  e

$$\lim_{x \rightarrow x^*} r(x - x^*) = \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{r(x - x^*)}{|x - x^*|^3} |x - x^*|^3 = 0$$

nessas condições temos que  $f(x) > x$ , ou seja, a reta  $y = x$  está abaixo da curva  $y = f(x)$ , e ainda existe  $c$  entre  $x$  e  $x^*$  tal que:

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} = \frac{f(x) - x^*}{x - x^*} > \frac{x - x^*}{x - x^*} = 1$$

Portanto  $f'(c) > 1$ , como  $x$  pertence ao intervalo  $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$  e  $f'$  é contínua, determinemos  $\varepsilon$  de modo que  $f'(x) > 1$  para todo  $x$  em

$(x^*, x^* + \varepsilon)$ . Sendo assim pelos argumentos utilizados na demonstração do primeiro teorema temos que  $x^*$  é instável.

Se  $x$  pertence ao intervalo  $(x^* - \varepsilon, x^*)$  então  $x - x^* < 0$ , ou seja

$$\frac{(x - x^*)^3}{3!} f'''(x^*) < 0,$$

então teríamos que  $f(x) < x$ , nesse caso a reta  $y = x$  está acima da curva  $y = f(x)$ , utilizando os mesmos argumentos do item anterior, adaptados as novas condições, concluímos que  $x^*$  é instável.

iii) A demonstração para o caso  $f''(x^*) = 0$  e  $f'''(x^*) < 0$  é análoga a essa.

■

**Definição 1.10.** (*Derivada de Schwarz da função  $f$* ) Definimos a *derivada de Schwarz* de uma função  $f$  como:

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left[ \frac{f''(x)}{f'(x)} \right]^2$$

Note que para no caso particular onde  $f'(x^*) = -1$ , a derivada de Schwarz dessa função no ponto  $x^*$  é  $Sf(x^*) = -f'''(x^*) - \frac{3}{2} [f''(x^*)]^2$ .

**Teorema 1.3.** *Dado  $x^*$  ponto de equilíbrio da equação (1.3) tal que  $f'(x^*) = -1$ . Temos:*

i) *Se  $Sf(x^*) < 0$ , então  $x^*$  é assintoticamente estável.*

ii) *Se  $Sf(x^*) > 0$ , então  $x^*$  é instável.*

**Demonstração:** Seja a função  $g$  tal que,

$$g(y) = f^2(y) = f(f(y)), \quad (1.9)$$

tomemos então a equação de diferença

$$y(n+1) = g(y(n)). \quad (1.10)$$

Note que  $g(x^*) = f^2(x^*) = x^*$ , logo  $x^*$  é ponto de equilíbrio de (1.10).

Se  $x^*$  possui alguma característica de estabilidade para (1.3) a mesma se verifica para a equação de diferença (1.10). Aplicando a Regra da Cadeia para derivar (1.9) obtemos:

$$\frac{d}{dy}g(y) = \frac{d}{dy}f(f(y)) = f'(f(y))f'(y)$$

Aplicando agora a derivada no ponto  $x^*$  e utilizando a hipótese de que  $f(x^*) = x^*$ , chegamos que

$$\frac{d}{dy}g(x^*) = f'(x^*)f'(x^*) = 1.$$

Nosso objetivo é utilizar as conclusões do Teorema 1.2, para isso precisamos estudar a derivada segunda de  $g$  no ponto  $x^*$ . De fato

$$\frac{d^2}{dy^2}g(y) = f''(f(y))f'(y)f'(y) + f'(f(y))f''(y),$$

ou seja  $\frac{d^2}{dy^2}g(x^*) = 0$ , assim não chegamos a uma conclusão, é necessário estudarmos a terceira derivada de  $g$  em  $x^*$ :

$$\frac{d^3}{dy^3}g(y) = f'''(f(y))[f'(y)]^3 + 3f''(f(y))f'(y)f''(y) + f'''(y)f'(f(y)),$$

aplicando no ponto  $x^*$  obtemos

$$\frac{d^3}{dy^3}g(x^*) = -2f'''(x^*) - 3[f''(x^*)]^2 = Sf(x^*)$$

Portanto pelo Teorema 1.2 temos que se  $Sf(x^*) > 0$  então  $x^*$  é instável, e se  $Sf(x^*) < 0$  então  $x^*$  é assintoticamente estável. ■

## 1.1.2 Pontos Periódicos e Ciclos

**Definição 1.11.** Dada a equação de diferença (1.3), seja  $b$  um ponto no domínio de  $f$ ,  $b$  é dito **ponto periódico** da equação de diferença se existir um número inteiro positivo  $k$  de modo que  $f^k(b) = b$ , dizemos então que  $b$  é um ponto  **$k$ -periódico**.

Isso equivale a dizer que  $b$  é um ponto de equilíbrio da equação de diferença

$$x(n+1) = f^k(x(n))$$

**Definição 1.12.** A **órbita periódica** ou o  **$k$ -ciclo** de  $b$  é definido como sendo

$$O(b) = \{b, f(b), f^2(b), \dots, f^{k-1}(b)\}.$$

**Definição 1.13.** Um ponto  $b$  será um **eventual  $k$ -periódico** se existir um inteiro positivo  $m$  tal que  $f^m(b)$  é um ponto  $k$ -periódico, ou seja,

$$f^{m+k}(b) = f^m(b).$$

**Definição 1.14.** Seja  $b$  um ponto  $k$ -periódico de  $f$ . Então  $b$  é dito:

- i) **Estável** se é um ponto de equilíbrio estável de  $f^k$ ;
- ii) **Assintoticamente estável** se é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de  $f^k$ ;
- iii) **Instável** se é um ponto de equilíbrio instável de  $f^k$ .

**Observação 1.1.** As propriedades de estabilidade que se verificam para  $b$  são válidas para os pontos de seu  $k$ -ciclo:

$$\{b = x(0), f(b) = x(1), \dots, f^{k-1}(b) = x(k-1)\} \quad (1.11)$$

**Corolário 1.1.** Seja (1.11) o  $k$ -ciclo de uma função  $f$  continuamente diferenciável. Então:

i) O  $k$ -ciclo (1.11) é assintoticamente estável se

$$|f'(x(0)) f'(x(1)) \dots f'(x(k-1))| < 1;$$

ii) O  $k$ -ciclo(1.11) é instável se

$$|f'(x(0)) f'(x(1)) \dots f'(x(k-1))| > 1.$$

**Demonstração:** De fato aplicando a Regra da Cadeia temos

$$\begin{aligned} [f^k(b)]' &= f'(f^{k-1}(b)) (f^{k-1}(b))' = \dots \\ &= f'(x(k-1)) f'(x(k-2)) \dots f'(x(1)) f'(x(0)). \end{aligned}$$

Sendo assim

$$\left| (f^k(b))' \right| = |f'(x(0)) f'(x(1)) \dots f'(x(k-2)) f'(x(k-1))|$$

pelo Teorema 1.1 temos que o Corolário acima é verificado. ■

## 1.2 EQUAÇÕES DE DIFERENÇA DE ORDEM SUPERIOR

Tomemos como base para nossa discussão a equação (1.2). Se a essa equação associarmos as condições iniciais:

$$x(n_0) = a_0, \quad x(n_0 + 1) = a_1, \dots, \quad x(n_0 + k - 1) = a_{k-1},$$

onde os  $a_i$ 's são números reais. Teríamos nesse caso um problema de valor inicial, nesse contexto é importante observar o seguinte resultado:

**Teorema 1.4.** *Os problemas de valor inicial associados a (1.2) tem uma solução única  $x(n)$ .*

**Demonstração:** De fato podemos reescrever (1.2) da forma

$$x(n+k) = g(n) - p_1(n)x(n+k-1) - \dots - p_k(n)x(n),$$

sendo assim para  $n = n_0$  temos que

$$x(n_0+k) = g(n_0) - p_1(n_0)a_{k-1} - p_2(n_0)a_{k-2} - \dots - p_k(n_0)a_0$$

para  $n = n_0 + 1$

$$\begin{aligned} x(n_0 + 1 + k) &= g(n_0 + 1) - p_1(n_0 + 1)g(n_0) \\ &\quad - a_{k-1}[p_2(n_0 + 1) + p_1(n_0)] - \dots \\ &\quad - a_1[p_k(n_0 + 1) + p_{k-1}(n_0)] \end{aligned}$$

Note que podemos escrever  $n$  como sendo  $n_0 + k + (n - n_0 - k)$ , continuando o processo acima é possível determinar

$$x(n_0 + k + (n - n_0 - k)) = x(n),$$

ou seja, existe solução para o problema de valor inicial.

Suponhamos agora que exista outra solução  $\tilde{x}(n)$  do problema de valor inicial, tomemos  $y(n) = x(n) - \tilde{x}(n)$ , assim aplicando as condições iniciais temos que

$$y(n_0) = y(n_0 + 1) = \dots = y(n_0 + k - 1) = 0$$

ou seja,  $y(n_0 + k) = 0$ . Além disso

$$y(n_0 + k + 1) = -p_1(n_0 + 1)y(n_0 + k) - \dots - p_k(n_0 + 1)y(n_0 + 1) = 0$$

Repetindo esse processo obtemos que

$$y(n) = y(n_0 + k + (n - n_0 - k)) = 0 = x(n) - \tilde{x}(n),$$

portanto  $x(n) = \tilde{x}(n)$ . ■

Esse teorema nos garante que existem soluções para os problemas de valor inicial, porém determinar essas soluções é uma tarefa difícil na maioria dos casos. Começemos então nosso estudo por um caso mais simples, as equações homogêneas, onde a função  $g$  é identicamente nula,

$$x(n+k) + p_1(n)x(n+k-1) + \dots + p_k(n)x(n) = 0 \quad (1.12)$$

Consideremos o conjunto de seqüências  $V = \{f; f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}\}$ , definimos então sobre  $V$  as operações de soma e multiplicação por escalar:

**Definição 1.15.** *Seja  $V$  o conjunto descrito acima,  $f_1$  e  $f_2$  elementos de  $V$  e  $\alpha$  um escalar, definimos então:*

$$i) (f_1 + f_2)(n) = f_1(n) + f_2(n);$$

$$ii) (\alpha f_1)(n) = \alpha f_1(n).$$

Nessas condições  $V$  tem estrutura de espaço vetorial, podemos então falar de independência linear nesse espaço.

**Definição 1.16.** *As seqüências  $f_1(n), f_2(n), \dots, f_r(n)$  são ditas **linearmente independentes** se dadas  $a_1, a_2, \dots, a_r$  constantes tais que*

$$a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n) + \dots + a_r f_r(n) = 0$$

então  $a_1 = a_2 = \dots = a_r = 0$ .

*Se existirem  $a_1, a_2, \dots, a_r$  contantes não nulas tais que a combinação linear resulte em zero, dizemos que as seqüências são **linearmente dependentes**.*

Note que se as seqüências são linearmente dependentes, tomando  $a_j$  diferente de zero podemos escrever a igualdade

$$f_j(n) = - \sum_{i \neq j}^r \frac{a_i}{a_j} f_i(n),$$

ou seja, as funções com coeficientes não nulos podem ser escritas como combinação linear das demais.

**Definição 1.17.** *Denominamos **conjunto fundamental de soluções** o conjunto de  $k$  soluções linearmente independentes de (1.12).*



Para verificar se tais soluções são linearmente independentes podemos utilizar o **Casoratiano**, que tem papel análogo ao Wronskiano na teoria de equações diferenciais, e é definido como:

**Definição 1.18.** Dadas  $x_1(n), x_2(n), \dots, x_r(n)$  soluções de (1.12), o **Casoratiano**  $W(n)$  dessas soluções é dado por:

$$W(n) = \begin{bmatrix} x_1(n) & x_2(n) & \dots & x_r(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & \dots & x_r(n+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1(n+r-1) & x_2(n+r-1) & \dots & x_r(n+r-1) \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

**Lema 1.1. (Lema de Abel)**

Sejam  $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$  soluções de (1.12) e  $\mathbf{W}(n)$  o Casoratiano dessas soluções, então, para  $n \geq n_0$  temos que

$$W(n) = (-1)^{k(n-n_0)} \left( \prod_{i=n_0}^{n-1} p_k(i) \right) W(n_0) \quad (1.14)$$

**Demonstração:** A demonstração para o caso  $k = 3$  está feita em (ELAYDI, 2000). ■

**Corolário 1.2.** Se  $p_k(n) \neq 0$  para todo  $n \geq n_0$ . Então o Casoratiano  $\mathbf{W}(n)$  é não nulo se, e somente se  $\mathbf{W}(n_0) \neq 0$ .

**Demonstração:** Imediata do Lema de Abel. ■

Sendo assim temos que se o Casoratiano se anula para algum  $n \geq n_0$  então ele se anula para todos os  $n$ 's, ou seja, para verificar se  $W(n)$  é nulo, basta calcular  $W(n_i)$  sendo  $n_i$  maior que  $n_0$ .

Como na teoria de equações diferenciais o Wronskiano era aplicado para verificar a independência linear das soluções, o Casoratiano é uma ferramenta importante para determinar se um conjunto de  $k$  soluções é um conjunto fundamental de soluções.

**Teorema 1.5.** *O conjunto de soluções  $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$  de (1.12) é um conjunto fundamental se, e somente se para algum inteiro positivo  $n_0$  tenha-se  $W(n_0)$  não nulo.*

**Demonstração:** De fato dadas  $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$  soluções de (1.12), se para um conjunto de constantes  $a_1, a_2, \dots, a_k$  tenha-se  $a_1x_1(n) + a_2x_2(n) + \dots + a_kx_k(n) = 0$  para todo  $n$  maior que um inteiro não negativo  $n_0$ . Então podemos esquecer o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} a_1x_1(n) + a_2x_2(n) + \dots + a_kx_k(n) = 0 \\ a_1x_1(n+1) + a_2x_2(n+1) + \dots + a_kx_k(n+1) = 0 \\ a_1x_1(n+2) + a_2x_2(n+2) + \dots + a_kx_k(n+2) = 0 \\ \vdots \\ a_1x_1(n+k-1) + a_2x_2(n+k-1) + \dots + a_kx_k(n+k-1) = 0 \end{cases}$$

Tal sistema de equações pode ser escrito na forma de matricial  $X(n)\xi = 0$ , onde:

$$X(n) = \begin{bmatrix} x_1(n) & x_2(n) & \cdots & x_k(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & \cdots & x_k(n+1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1(n+k-1) & x_2(n+k-1) & \cdots & x_k(n+k-1) \end{bmatrix},$$

$$\xi = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix}$$

De fato estamos interessados no estudo da independência linear das soluções, nesse sentido buscamos verificar se essa situação só se verifica para  $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$ , ou seja que o sistema possui somente solução trivial. Sendo assim é necessário que a matriz  $X$  seja inversível.

$\implies$ ) Se as soluções formam um conjunto fundamental então temos que elas são linearmente independentes, ou seja,  $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$ , logo o sistema admite somente solução trivial, sendo assim o determinante da matriz  $X$  é diferente de zero. Porém note que  $\det X(n) = W(n)$ , ou seja o Casoratiano é não nulo para algum inteiro não negativo.

$\impliedby$ ) Suponhamos agora que  $W(n_0)$  é diferente de zero para algum  $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ , logo o Casoratiano vai ser não nulo para todo  $n \geq n_0$ , sendo assim temos que  $X$  é inversível, logo o sistema possui somente a solução nula, portanto as soluções são linearmente independentes e formam um conjunto fundamental. ■

**Teorema 1.6.** *(O Teorema Fundamental) Se  $p_k(n)$  é diferente de zero para todo  $n \geq n_0$ , então (1.12) admite um conjunto fundamental de soluções para tais valores de  $n$ .*

**Demonstração:** Pelo Teorema 1.4 existe um conjunto de soluções  $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$  tais que uma das condições iniciais seja 1 e as demais sejam nulas, tomemos caso em que  $x_i(n_0 + i - 1) = 1$  e

$$\begin{aligned} x_i(n_0) = x_i(n_0 + 1) = \dots = x_i(n_0 + i - 2) = x_i(n_0 + i) = \\ \dots = x_i(n_0 + k - 1) = 0 \end{aligned}$$

onde  $i$  está entre 1 e  $k$ . Nesse caso

$$x_1(n_0) = x_2(n_0 + 1) = x_3(n_0 + 2) = \dots = x_k(n_0 + k - 1) = 1,$$

assim o Casoratiano desse conjunto de solução no ponto  $n_0$  será 1.

Portanto  $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$  é um conjunto fundamental de soluções de (1.12). ■

**Princípio de Superposição:** Se o leitor possui algum conhecimento sobre equações diferenciais então já conhece tal princípio. No caso específico em que estamos trabalhando esse princípio nos

garante que se  $x_1(n), x_2(n), \dots, x_r(n)$  são soluções de (1.12), então  $x(n) = a_1x_1(n) + a_2x_2(n) + \dots + a_rx_r(n)$  também é solução de (1.12).

Para facilitar a demonstração dessa propriedade vamos recorrer ao seguinte lema:

**Lema 1.2.** *Dadas  $x_1(n)$  e  $x_2(n)$  soluções de (1.12) temos que:*

*i)  $x(n) = x_1(n) + x_2(n)$  é uma solução para (1.12);*

*ii) Para qualquer constante  $a$ ,  $x(n) = ax_1(n)$  é uma solução de (1.12).*

**Demonstração:** Para demonstrar esse resultado basta aplicar  $x(n) = x_1(n) + x_2(n)$  e  $x(n) = ax_1(n)$  em (1.12) e verificar que satisfazem a mesma. ■

Voltemos agora a tratar do princípio de superposição, utilizando o resultado desse lema vamos demonstrar essa propriedade:

**Demonstração: (Princípio da Superposição)** Se  $x_1(n), x_2(n), \dots, x_r(n)$  são soluções de (1.12) então pelo lema anterior temos que  $a_1x_1(n), a_2x_2(n), \dots, a_rx_r(n)$  também são soluções de (1.12), e ainda temos que a combinação dessas soluções duas a duas também é solução dessa equação. Aplicando o lema novamente temos que a combinação linear de quatro em quatro dessas soluções também é solução de (1.12) e assim sucessivamente, ou seja, de fato o lema nos garante que  $x(n) = a_1x_1(n) + a_2x_2(n) + \dots + a_rx_r(n)$  é solução da equação de diferença. ■

Até agora mostramos que a combinação linear de soluções de uma equação de diferença homogênea também é uma solução dessa equação. Agora vamos discutir que de fato, qualquer solução dessa equação de diferença pode ser escrita como uma combinação linear dos elementos de seu conjunto fundamental de soluções:

**Proposição 1.1.** *Seja  $\{x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)\}$  um conjunto fundamental de soluções de (1.12) e seja  $x(n)$  uma solução qualquer de (1.12). Então há constantes  $a_1, a_2, \dots, a_k$  tais que*

$$x(n) = \sum_{i=1}^k a_i x_i(n).$$

**Demonstração:** Suponhamos que existam as constantes tais que  $X(n)\xi = \tilde{x}(n)$ , sendo que  $X(n)$  e  $\xi$  são as matrizes definidas anteriormente e

$$\tilde{x}(n) = \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n+1) \\ \vdots \\ x(n+k-1) \end{bmatrix}$$

Como as soluções que estamos trabalhando formam um conjunto fundamental de soluções temos que o Casoratiano delas é não nulo, em outras palavras  $X(n)$  é inversível, nesse caso podemos escrever que  $\xi = X^{-1}(n)\tilde{x}(n)$  e para  $n = n_0$  teríamos  $\xi = X^{-1}(n_0)\tilde{x}(n_0)$ , de fato esses valores são conhecidos, ou seja, existem as constantes tais que  $X(n)\xi = \tilde{x}(n)$ , e portanto dada uma solução  $\tilde{x}(n)$  de (1.12) ela pode ser escrita como uma combinação linear das soluções de seu conjunto fundamental. ■

Concluimos então nossa discussão formalizando a definição de solução geral para a equação de diferença (1.12).

**Definição 1.19.** *Seja  $\{x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)\}$  um conjunto fundamental de soluções de (1.12), então a **solução geral** de (1.12) é dada por*

$$x(n) = \sum_{i=1}^k a_i x_i(n),$$

onde os  $a_i$ 's são constantes arbitrárias.

**Teorema 1.7.** *O conjunto  $S$  munido das operações de soma e multiplicação definidas sobre  $V$  na página 30 é um Espaço Vetorial.*

**Demonstração:** Sabemos que todo Subespaço Vetorial é um Espaço Vetorial, então para provar esse teorema vamos provar que  $S$  é um Subespaço Vetorial. De fato dados  $x(n)$  e  $y(n)$  elementos de  $S$  e  $a$  constante temos que:

$i) (x + y)(n) = x(n) + y(n)$ , que de acordo com o princípio de superposição também pertence a  $S$ ;

$ii)(ax)(n) = ax(n)$ , que também é solução de (1.12), ou seja, também é um elemento de  $S$ .

Logo  $S$  é um Subespaço Vetorial e por consequência é um Espaço Vetorial. ■

### 1.2.1 Equações de Diferença Lineares Homogêneas e com Coeficientes Constantes

Nessa seção vamos direcionar nosso estudo para equações de diferença homogêneas com coeficientes constantes, determinando a solução geral a partir do conjunto fundamental de soluções. Passamos agora a trabalhar com a equação de diferença:

$$x(n+k) + p_1x(n+k-1) + \dots + p_kx(n) = 0 \quad (1.15)$$

onde os  $p_i$ 's são constantes e  $p_k$  é não nulo. Pelo que conhecemos de equações diferenciais, sabemos que as soluções das equações "correspondentes" a essas são do tipo  $e^r$ . Suponhamos que no nosso caso teríamos que as soluções de (1.15) são da forma  $\lambda^n$ , onde  $\lambda$  é um número complexo, neste caso aplicando a sequência  $x(n) = \lambda^n$  em (1.15) obtemos:

$$\lambda^{n+k} + p_1\lambda^{n+k-1} + \dots + p_k\lambda^n = 0$$

De fato procuramos soluções não nulas, logo:

$$\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + \dots + p_k = 0 \quad (1.16)$$

**Definição 1.20.** Dada a equação de diferença (1.15) chamamos a equação (1.16) de **equação característica de** (1.15). As raízes de (1.16) recebem o nome de **raízes características**.

De fato, como consideramos  $p_k$  não nulo, nenhuma das raízes características será nula, e é fácil de identificar que as soluções de (1.15) serão  $x_i(n) = \lambda_i^n$ , onde  $\lambda_i$  é raiz característica. Sendo assim temos dois casos para considerar:

**Caso 1.1.** *A equação (1.16) possui  $k$  raízes características distintas  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ . Essa seria a situação ideal, pois nesse caso temos que  $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_k^n\}$  é um conjunto fundamental de soluções.*

**Demonstração:** Para confirmar a validade dessa afirmação vamos recorrer ao Teorema 1.5, basta então verificar se o Casoratiano dessas soluções é não nulo para algum  $n_0$ . Como  $n_0$  pode ser qualquer, escolhamos convenientemente  $n_0 = 0$ . De fato

$$W(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_k^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{bmatrix}$$

Esse determinante é chamado de **Determinante de Vandermonde**, sendo que seu resultado é dado por

$$W(0) = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\lambda_j - \lambda_i)$$

Como os  $\lambda_i$ 's são distintos temos que o Casoratiano é não nulo em zero. Logo

$$\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_k^n\}$$

é de fato um conjunto fundamental de soluções. ■

Uma vez determinado o conjunto fundamental de soluções podemos escrever a solução geral da equação, que nesse caso é dada por

$$x(n) = \sum_{i=1}^k a_i \lambda_i^n$$

onde os  $a_i$ 's são constantes complexas ou reais.

Para tratarmos sobre o segundo caso é necessário definir três operadores sobre sequências:

**Definição 1.21.** *Dada  $x(n)$  uma sequência, definimos:*

i) *O operador de diferença  $\Delta$ :  $\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$ ;*

ii) *O operador de deslocamento  $E$ :  $Ex(n) = x(n+1)$ ;*

iii) *O operador identidade  $I$ :  $Ix(n) = x(n)$ ;*

iv) *O operador polinômial  $p(E)$ :  $p(E) = a_0E^k + a_1E^{k-1} + \dots + a_kI$ , sendo que os  $a_i$ 's são constantes.*

A partir dessa definição podemos verificar algumas propriedades e igualdades:

1.  $\Delta = E - I$  e  $E = \Delta + I$ ;
2. Os operadores são lineares;
3. Aplicando indução podemos verificar que  $E^k x(n) = x(n+k)$ ;
4.  $p(E)(b^n g(n)) = b^n p(bE)g(n)$ , onde  $g$  é uma função discreta e  $b$  é uma constante;
5. Seja  $q(n) = a_0n^k + a_1n^{k-1} + \dots + a_k$  e  $\Delta q(n) = q(n+1) - q(n)$ , então  $\Delta^{k+i}q(n) = 0$  para todo  $i$  maior ou igual a 1.

Agora podemos tratar do segundo caso das soluções de (1.15) :

**Caso 1.2.** *Se a equação (1.16) possuir  $r$  raízes distintas  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  com multiplicidades  $m_1, m_2, \dots, m_r$  sendo que o somatório das multiplicidades resulta em  $k$ , podemos reescrever a equação (1.15) na forma*

$$(E - \lambda_1)^{m_1} (E - \lambda_2)^{m_2} \dots (E - \lambda_r)^{m_r} x(n) = 0. \quad (1.17)$$



Note que se  $\Psi_1(n), \Psi_2(n), \dots, \Psi_{m_i}(n)$  são soluções de

$$(E - \lambda_i)^{m_i} x(n) = 0, \quad 1 \leq i \leq r \quad (1.18)$$

então são soluções também de (1.17). De fato se for possível determinar um conjunto fundamental de soluções de (1.18) para cada  $\lambda_i$  e  $m_i$ , nossa experiência em estudos matemáticos nos leva a esperar que a união desses conjuntos resultaria no conjunto fundamental de soluções de (1.17) e conseqüentemente de (1.15). Vamos agora estudar essa possibilidade

**Lema 1.3.** *O conjunto*

$$G_i = \left\{ \lambda_i^n, \binom{n}{1} \lambda_i^{n-1}, \binom{n}{2} \lambda_i^{n-2}, \dots, \binom{n}{m_i-1} \lambda_i^{n-m_i+1} \right\},$$

onde  $\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$ , é um conjunto fundamental de soluções de (1.18).

**Demonstração:** Para provar que  $G_i$  é um conjunto fundamental de soluções de (1.18) temos que mostrar que cada um de seus elementos é uma solução dessa equação e que são linearmente independentes, o que equivale a verificar que seu Casoratiano em um dos pontos é não nulo. Neste caso, para provar a segunda condição, basta mostrar que  $W(0)$  é não nulo, o que é uma tarefa trabalhosa, mas não difícil, por questão de espaço omitiremos essa dedução, a mesma é exposta por (ELAYDI, 2000)

Vamos mostrar então que os elementos de  $G_i$  são de fato soluções de (1.18), ou seja, que dado  $a$  constante maior que 0 e menor que  $m_i - 1$  temos que  $\binom{n}{a} \lambda_i^{n-a}$  é solução de (1.18), para isso usamos uma identidade 4 listada acima com

$$b = \lambda_i, \quad g(n) = \binom{n}{a} \lambda_i^{-a} \text{ e } p(E) = (E - \lambda_i)^{m_i}$$

assim:

$$\begin{aligned} (E - \lambda_i)^{m_i} \binom{n}{a} \lambda_i^{n-a} &= \lambda_i^{n-a} (\lambda_i E - \lambda_i)^{m_i} \binom{n}{a} \\ &= \lambda_i^{n-a+m_i} (E - I)^{m_i} \binom{n}{a} = \lambda_i^{n-a+m_i} \Delta^{m_i} \binom{n}{a} \end{aligned}$$

De fato  $\binom{n}{a}$  é um polinômio de grau  $a$ , ou seja tem grau menor que  $m_i$ , logo pela propriedade 5 apresentada anteriormente temos que  $\Delta^{m_i} \binom{n}{a} = 0$ , portanto

$$(E - \lambda_i)^{m_i} \binom{n}{a} \lambda_i^{n-a} = 0.$$

■

**Teorema 1.8.** *O conjunto  $G = \bigcup_{i=1}^r G_i$ , onde  $G_i$  é o mesmo conjunto do resultado anterior, é um conjunto fundamental de soluções de (1.17).*

**Demonstração:** Notemos primeiramente que  $G$  é um conjunto com  $k$  elementos, sendo que pelo lema anterior cada um deles é solução de (1.18) logo são soluções de (1.17). Nos resta então provar que tais soluções são linearmente independentes. Para isso calculemos o Casoratiano no ponto zero,

$$W(0) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_r \end{vmatrix}$$

onde

$$A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \lambda_i^2 & 2\lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_i^{k-1} & (k-1)\lambda_i^{k-2} & \cdots & \frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-m_i+1)}{(m_i+1)!} \lambda^{k-m_i+1} \end{bmatrix},$$

com  $1 \leq i \leq r$ . O determinante definido por  $W(0)$  é chamado de **determinante de Vandermonde generalizado**, que pode ser calculado pelo produtório

$$\prod_{1 \leq i < j < k} (\lambda_j - \lambda_i)^{m_j m_i}.$$

Como cada um dos  $\lambda$ 's são distintos, o Casoratiano das soluções no ponto zero é não nulo, portanto  $G$  é um conjunto fundamental de soluções. ■

Uma vez determinado um conjunto fundamental de soluções podemos construir a solução geral para (1.17).

**Corolário 1.3.** *A solução geral de (1.17) é dada por*

$$x(n) = \sum_{i=1}^r \lambda_i^n (a_{i0} + a_{i1}n + a_{i2}n^2 + \dots + a_{im_i-1}n^{m_i-1})$$

**Demonstração:** Imediata do Teorema 1.8. ■

### 1.2.2 Comportamento Assintótico das Soluções

Para facilitar nossa discussão nesse tópico vamos tratar de equações de diferenças específicas e mais simples, sendo assim nosso foco será a equação:

$$x(n+2) + p_1x(n+1) + p_2x(n) = 0 \quad (1.19)$$

Sejam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  as raízes da equação característica associada a (1.19), temos então três casos possíveis:

**Caso 1.3.** *Ambas as raízes são reais e distintas entre si, então temos que  $x_1(n) = \lambda_1^n$  e  $x_2(n) = \lambda_2^n$  são duas soluções linearmente independentes de (1.19).*

*Suponhamos que  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ , nesse caso chamamos  $x_1(n)$  de **solução dominante** e  $\lambda_1$  de **raiz característica dominante**.*

**Proposição 1.2.** *O comportamento da solução geral de (1.19)*

$$x(n) = a_1\lambda_1^n + a_2\lambda_2^n \quad (1.20)$$

*é determinada pelo comportamento da solução dominante.*

**Demonstração:** Se  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ , escrevendo a solução geral (1.20) na forma

$$x(n) = \lambda_1^n \left[ a_1 + a_2 \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \right].$$

De fato,  $\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| < 1$ , sendo assim  $\left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n$  vai para zero quando  $n$  tende ao infinito. Logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \lambda_1^n.$$

■

Nesse caso para estudarmos o comportamento assintótico da solução de (1.19), basta estudar o comportamento da solução  $x_1(n) = a_1 \lambda_1^n$ . Temos então as seguintes situações possíveis (veja Figura 1):

1.1 Se  $\lambda_1 > 1$ , então a sequência  $x_1(n)$  diverge para o infinito e portanto temos um **sistema instável**, assim como podemos verificar na figura a seguir.

1.2 Se  $\lambda_1 = 1$ , então a sequência  $x_1(n)$  é constante.

1.3 Se  $0 < \lambda_1 < 1$ , então a sequência  $x_1(n)$  é monótona decrescente, convergindo para zero, e portanto temos um **sistema estável**.

1.4 Se  $-1 < \lambda_1 < 0$ , então a sequência  $x_1(n)$  oscila em torno de zero, alterando o sinal a cada termo, convergindo para zero conforme  $n$  cresce indefinidamente e portanto temos um **sistema instável**.

1.5 Se  $\lambda_1 = -1$ , então a sequência  $x_1(n)$  oscila entre  $a_1$  e  $-a_1$ .

1.6 Se  $\lambda_1 < -1$ , então a sequência  $x_1(n)$  oscila entre termos positivos e negativos, porém em módulo aumenta indefinidamente e portanto temos um **sistema instável**.

Determinamos assim todos os possíveis comportamentos da solução geral de (1.19) para o primeiro caso.

**Caso 1.4.** *Ambas as raízes são reais e iguais ( $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ), temos que a solução geral de (1.19) é dada por*

$$x(n) = (a_1 + a_2 n) \lambda^n,$$

*os possíveis casos de comportamento assintótico são:*

2.1 Se  $\lambda \geq 1$  temos que a sequência  $x(n)$  é monótona crescente, e portanto diverge para o infinito, temos assim um **sistema instável**.

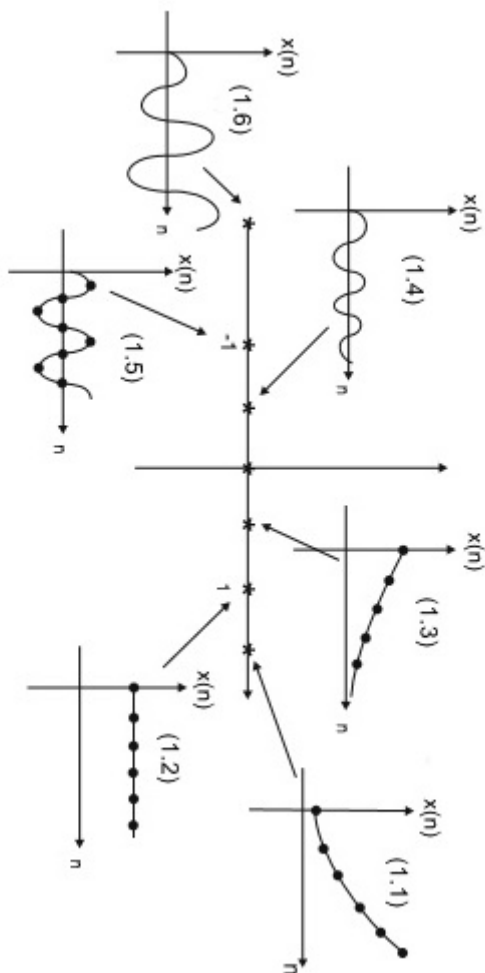


Figura 1 – Diagramas Raízes Reais

2.2 Se  $0 < \lambda < 1$  temos que a conclusão do comportamento da sequência  $x(n)$  não é imediata, é necessário analisar o que acontece com o  $\lim n\lambda^n$ . Seja  $x_1(n) = n\lambda^n$ , note que a partir do segundo termo da sequência todos os demais são positivos, e ainda

$$\lim \frac{x_1(n+1)}{x_1(n)} = \lim \frac{(n+1)\lambda^{n+1}}{n\lambda^n} = \lim \left[ \lambda + \frac{\lambda}{n} \right] = \lambda < 1$$

por (LIMA, 2006) temos que  $\lim x_1(n) = 0$ . Ou seja,  $x(n)$  é monótona decrescente, convergindo para zero, temos assim um **sistema estável**.

2.3 Se  $-1 < \lambda < 0$  temos que a sequência  $x(n)$  é oscilatória, contudo fazendo um estudo sobre  $\lim n\lambda^n$ , semelhante ao do caso anterior, concluimos que  $x(n)$  converge para zero, ou seja, trata-se de um **sistema estável**.

2.4 Se  $\lambda \leq -1$  temos que a sequência  $x(n)$  é oscilatória, porém cresce em módulo, ou seja é divergente, temos assim um **sistema instável**.

Determinamos assim os comportamentos possíveis para mais uma solução de (1.19).

**Caso 1.5.** *As raízes são complexas, sendo  $\lambda_1 = a + ib$  e  $\lambda_2 = a - ib$ , onde  $b$  é não nulo. Neste caso teríamos que a solução geral de (1.19) é dada por*

$$x(n) = c_1(a + ib)^n + c_2(a - ib)^n.$$

*Podemos escrever essa solução em coordenadas polares, onde  $a = r \cos(\theta)$ ,  $b = r \sin(\theta)$ ,  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$  e  $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ , ou seja*

$$x(n) = r^n [(c_1 + c_2) \cos(n\theta) + i(c_1 - c_2) \sin(n\theta)]$$

*Para simplificar a escrita da solução geral tomemos  $a_1 = c_1 + c_2$ ,  $a_2 = c_1 - c_2$  e  $\omega$  tal que  $\cos(\omega) = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$ ,  $\sin(\omega) = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$  logo  $\omega = \tan^{-1}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$ . Assim podemos escrever*

$$x(n) = Ar^n \cos(n\theta - \omega), \quad (1.21)$$

*onde  $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ , ou seja, devemos estudar aqui o comportamento de (1.21). De fato essa solução é oscilatória, uma vez que o cosseno influencia diretamente seu comportamento. Porém  $r$  determinará a maneira como tal solução irá oscilar. Temos assim as seguintes situações a considerar (veja Figura 2):*

3.1 Se  $r > 1$ , então  $x(n)$  oscila e há um aumento na sua magnitude, assim é um **sistema instável**.

3.2 Se  $r = 1$ , então  $x(n)$  oscila com magnitude constante.

3.3 Se  $r < 1$ , então  $x(n)$  oscila havendo um decréscimo de magnitude de modo que converge para zero, ou seja representa um **sistema estável**.

Concluimos assim a discussão sobre todos os possíveis comportamentos das soluções de (1.19).

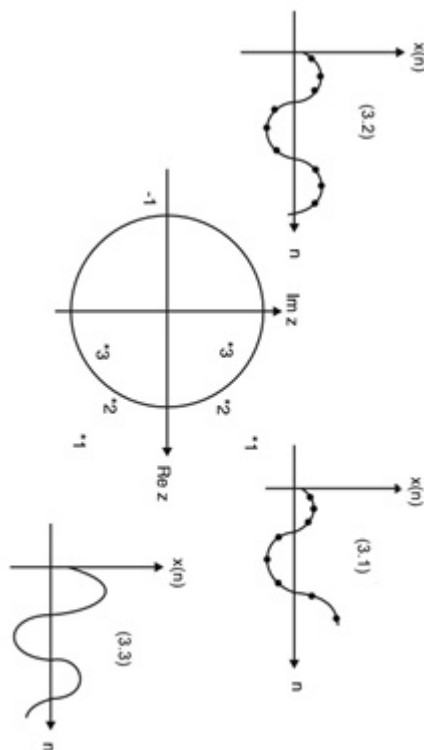


Figura 2 – Diagramas Raízes Complexas

Essa análise nos leva ao teorema:

**Teorema 1.9.** *Dada a equação de diferença (1.19) é válido que:*

- i) Todas as suas soluções oscilam em torno de zero se, e somente se, a equação característica não possui raízes reais positivas;*
- ii) Todas as suas soluções são assintoticamente estáveis em zero se, e somente se,*

$$\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1.$$

No próximo tópico vamos estudar o comportamento assintótico das soluções de equações de diferença não-homogênea, e no final do mesmo trataremos do comportamento da solução da equação de diferença

$$x(n+2) + p_1x(n+1) + p_2x(n) = M \quad (1.22)$$

onde  $M$  é uma constante não nula.

### 1.2.3 Equações de Diferença Lineares Não-Homogêneas

Nessa seção vamos estudar as equações de diferença do tipo (1.2) onde  $g$  é uma função discreta chamada de *forcing term*. Abordaremos os mesmos tópicos trabalhados para a equação (1.15), verificando a validade dos resultados análogos aos discutidos anteriormente para a equação (1.2):

$$x(n+k) + p_1(n)x(n+k-1) + \dots + p_k(n)x(n) = g(n)$$

onde  $p_i(n)$  e  $g(n)$  são funções reais definidas para  $n \in \mathbb{Z}^+$  e  $p_k(n)$  é não nulo para todos os  $n$ 's



**Teorema 1.10.** *Se  $x_1(n)$  e  $x_2(n)$  são soluções de (1.2) então  $y(n) = x_1(n) - x_2(n)$  é solução da equação homogênea correspondente*

$$x(n+k) + p_1(n)x(n+k-1) + \dots + p_k(n)x(n) = 0.$$

**Demonstração:** Como  $x_1(n)$  e  $x_2(n)$  são soluções de (1.21) temos que elas satisfazem a equação, assim

$$\begin{aligned} y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \dots + p_k(n)y(n) = \\ [x_1(n+k) + p_1(n)x_1(n+k-1) + \dots + p_k(n)x_1(n)] - \\ [x_2(n+k) + p_1(n)x_2(n+k-1) + \dots + p_k(n)x_2(n)] \end{aligned}$$

ou seja,

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \dots + p_k(n)y(n) = g(n) - g(n) = 0$$

Portanto  $y(n)$  é solução da equação homogênea associada a (1.2). ■

**Definição 1.22.** *Dada uma equação de diferença do tipo (1.2), seja  $y(n)$  a solução geral da equação de diferença homogênea correspondente, e  $x_1(n)$  uma solução da equação não homogênea (1.2):*

*Chamamos  $y(n)$  de **solução complementar de** (1.2) e denotamos a mesma por  $x_c(n)$ ;*

*Chamamos  $x_1(n)$  de **solução particular de** (1.2) e denotamos por  $x_p(n)$ .*

O próximo resultado nos fornece a forma das soluções de (1.2).

**Teorema 1.11.** *Se  $x(n)$  é solução de (1.2) então  $x(n) = x_p(n) + x_c(n)$ .*

**Demonstração:** Dada  $x(n)$  solução de (1.2) e  $x_p(n)$  solução particular da mesma, o teorema anterior nos garante que  $x(n) - x_p(n)$  é solução da equação homogênea correspondente, sendo assim podemos escrever que  $x(n) - x_p(n) = x_c(n)$ . ■

Para os casos em que (1.2) tem coeficientes constantes, discutimos no tópico anterior como determinar as soluções da equação homogênea correspondente, sendo assim para encontrar a solução geral da equação não-homogênea basta determinar uma solução particular. Por isso vamos estudar agora como encontrar uma solução particular de

$$x(n+k) + p_1x(n+k-1) + \dots + p_kx(n) = g(n) \quad (1.23)$$

Para determinar uma solução particular de (1.23) uma opção é utilizar o **Método dos Coeficientes Indeterminados**, que é útil quando trabalhamos com funções  $g$  do tipo  $a^n$ ,  $\sin(bn)$ ,  $\cos(bn)$ ,  $n^k$  ou produto dessas funções. Porém pode ser inviável para funções mais complicadas, isso porque o método consiste em fazer conjecturas inteligentes sobre a forma da solução particular. Em outras palavras, dar um "chute" certo sobre candidatas a solução particular e verificar se a sequência escolhida é de fato é uma solução de (1.23).

**Definição 1.23.** *Definimos como sendo o operador **anulador de  $g(n)$**  um operador polinomial  $N(E)$  tal que  $N(E)g(n) = 0$ , ou seja,  $g(n)$  é solução da equação de diferença  $N(E)x(n) = 0$ .*

Considere  $p(E)$  um operador polinomial, tal que

$$p(E) = E^k + p_1E^{k-1} + \dots + p_kI,$$

sendo assim podemos reescrever a equação (1.23) na forma

$$p(E)x(n) = g(n) \quad (1.24)$$

Seja  $N(E)$  um anulador de  $g(n)$ , assim

$$N(E)p(E)x(n) = N(E)g(n) = 0.$$

Agora sejam  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  as raízes características da equação

$$p(E)x(n) = 0$$

e  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$  as raízes característica da equação  $N(E)x(n) = 0$ . De fato temos que separar nosso estudo em dois casos possíveis:

**Caso 1.6.** *Se nenhum dos  $\lambda_i$ 's for igual a qualquer um dos  $\mu_i$ 's.*

*Então uma solução particular  $x_p(n)$  é a solução geral de  $N(E)x(n) = 0$ , porém os coeficientes são indeterminados. Contudo basta substituir essa suposta solução em (1.23) para determinar os valores das constantes.*

**Caso 1.7.** *Se para algum  $i$  e  $j$ ,  $\lambda_i = \mu_j$ , então o conjunto de raízes características de  $N(E)p(E)x(n) = 0$  é a união das raízes características de  $p(E)x(n) = 0$  e  $N(E)x(n) = 0$ . Note que neste caso a multiplicidade das raízes desse novo conjunto vai ser maior do que em cada um dos dois conjunto separados.*

*De fato para determinar uma solução particular  $x_p(n)$  devemos determinar a solução geral de  $N(E)p(E)x(n) = 0$ . Porém isso nós já sabemos fazer, o único detalhe que deve ser lembrado aqui é que devemos retirar dessa solução geral os termos que já aparecem na solução complementar  $x_c(n)$ . Por fim fazemos como no caso anterior para determinar as constantes.*

Analisemos agora a equação de diferença (1.22) de segunda ordem, linear não-homogênea e com coeficientes constantes dada por:

$$x(n+2) + p_1x(n+1) + p_2x(n) = M$$

onde  $M$  é uma constante não nula.

Note que neste caso, ao contrário do caso da equação (1.19), a sequência nula não é uma solução. De fato a solução  $x(n) = x^*$ , onde  $x^*$  é o ponto de equilíbrio de (1.22) é uma solução particular da mesma. Como  $x^*$  satisfaz  $f(x^*) = x^*$ , então  $p_1x^* + p_2x^* - M = x^*$ , portanto

$$x_p(n) = \frac{M}{1 + p_1 + p_2}$$

é uma solução particular da equação.

Sabemos que a solução geral de (1.22) é dada por  $x(n) = x^* + x_c(n)$ , onde  $x_c(n)$  é a solução geral da equação homogênea associada. Assim o comportamento assintótico da mesma pode ser determinado a partir das discussões apresentadas anteriormente, basta observar que quando  $x_c(n)$  converge para zero, a solução de (1.22) converge para  $x^*$ . Podemos então enunciar o teorema:

**Teorema 1.12.** *Dada uma equação de diferença do tipo (1.22) com ponto de equilíbrio  $x^*$ , é válido que:*

- i) Todas as soluções dessa equação oscilam em torno de  $x^*$  se, e somente se, nenhuma das raízes características da equação homogênea associada é um número real positivo.*
- ii) Todas as soluções dessa equação são assintoticamente estáveis em  $x^*$  se, e somente se,  $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$ , onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são as raízes características da equação homogênea associada.*

### 1.3 TÉCNICAS DE LINEARIZAÇÃO

Lidar com equações de diferença não-lineares não é uma tarefa fácil, e na maioria das vezes não conseguimos determinar uma solução de maneira explícita para essas equações, sendo assim, se for possível linearizá-las teríamos um cenário mais interessante e propício para estudo. Esse será o tema abordado nesse tópico, vamos analisar algumas técnicas de linearização.

**Caso 1.8. Equações do Tipo Riccati,** *essas equações são da forma*

$$x(n+1)x(n) + p(n)x(n+1) + q(n)x(n) = 0 \quad (1.25)$$

*Considere  $z(n) = \frac{1}{x(n)}$ , nesse caso temos que  $x(n) = \frac{1}{z(n)}$  e a equação (1.25) pode ser escrita em termos de  $z(n)$  na forma*

$$q(n)z(n+1) + p(n)z(n) + 1 = 0 \quad (1.26)$$

Note que a equação obtida é linear, e uma vez determinada a solução geral  $z(n)$  de (1.26) é fácil determinar a solução geral  $x(n)$  de (1.25). Se ao invés de estudar a equação homogênea (1.25) precisarmos estudar a equação não-homogênea

$$x(n+1)x(n) + p(n)x(n+1) + q(n)x(n) = g(n). \quad (1.27)$$

Se o leitor construiu a passagem de (1.25) para (1.26), como esperamos que tenha feito, já notou que para equação (1.27), a substituição indicada anteriormente não será útil. Nesse caso devemos tomar

$$x(n) = \frac{z(n+1)}{z(n)} - p(n),$$

pois fazendo essa substituição na equação (1.27) obtemos

$$z(n+2) + z(n+1)[q(n) - p(n+1)] - z(n)[p(n)q(n) + g(n)].$$

Note que assim temos uma equação linear homogênea, que uma vez resolvida para  $z(n)$  simplifica consideravelmente a busca por uma solução de (1.27).

**Caso 1.9. Equação Geral de Riccati** consideremos a equação

$$x(n+1) = \frac{a(n)x(n) + b(n)}{c(n)x(n) + d(n)} \quad (1.28)$$

onde os termos  $c(n)$  e  $a(n)d(n) - b(n)c(n)$  são não nulos para todo  $n$  natural. Nesse caso a substituição indicada é

$$x(n) = \frac{z(n+1)}{z(n)c(n)} - \frac{d(n)}{c(n)},$$

de modo que assim podemos escrever (1.28) da forma

$$z(n+2) + p_1(n)z(n+1) + p_2(n)z(n) = 0$$

sendo que

$$p_1(n) = -\frac{c(n)d(n+1)+a(n)c(n+1)}{c(n)} \text{ e}$$

$$p_2(n) = \frac{c(n+1)}{c(n)} [a(n)d(n) - b(n)c(n)].$$

Ou seja, obtemos uma equação de diferença linear de segunda ordem.

**Caso 1.10. Equações Homogêneas da Forma:**

$$f\left(\frac{x(n+1)}{x(n)}, n\right) = 0 \quad (1.29)$$

quando tratamos com equações do tipo (1.29) a substituição adequada para se adotar é

$$z(n) = \frac{x(n+1)}{x(n)},$$

transformando assim a mesma em uma equação linear para  $z(n)$ .

**Caso 1.11. Equações na Forma de Produto:**

$$[x(n+k)]^{r_1} [x(n+k-1)]^{r_2} \dots [x(n)]^{r_{k+1}} = g(n) \quad (1.30)$$

Nesse caso a substituição indicada é  $x(n) = e^{z(n)}$ , ou seja  $z(n) = \ln x(n)$ . Aplicando a função logarítmica na equação (1.30) e fazendo a devida substituição obtemos a expressão

$$r_1 z(n+k) + r_2 z(n+k-1) + \dots + r_{k+1} z(n) = \ln g(n)$$

Uma equação de diferença linear, não-homogênea com coeficientes constantes e de ordem  $k$  em  $z(n)$ .

Esses são alguns casos onde a linearização é feita por substituições simples, porém artigos recentes nessa área apresentam resultados a cerca de estabilidade de equações não lineares, onde a linearização não é direta, porém é importante para a obtenção do resultado em questão.

---

Para ter uma visão mais aprofundada recomendamos a leitura dos artigos *Attractivity and Global Stability for Linearizable Difference Equations* (JANOWSKI; KULENOVIC, 2009) e *Global Asymptotic Stability for Linear Fractional Difference Equation* (BRETT; JANOWSKI; KULENOVIC, 2014), cujos resultados não citamos aqui por questão de espaço.





## 2 SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE DIFERENÇA LINEARES

No capítulo anterior estudamos sobre equações de diferença escalares, neste capítulo trataremos de sistemas de equações de diferença, abordando a existência de solução para o mesmo, as características de sua solução geral, assim o comportamento assintótico de alguns sistemas.

### 2.1 SISTEMAS HOMOGÊNEOS

Inicialmente vamos tratar dos sistemas lineares autônomos, consideremos então o seguinte sistema

$$\begin{cases} x_1(n+1) = a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + \dots + a_{1k}x_k(n) \\ x_2(n+1) = a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + \dots + a_{2k}x_k(n) \\ \vdots \\ x_k(n+1) = a_{k1}x_1(n) + a_{k2}x_2(n) + \dots + a_{kk}x_k(n) \end{cases}$$

que vetorialmente é representado por

$$x(n+1) = Ax(n) \tag{2.1}$$

onde  $x(n) = (x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n))^T$  é um vetor de  $\mathbb{R}^k$  e  $A = (a_{ij})$  uma matriz não singular, de ordem  $k$ , com entradas reais.

**Lema 2.1.** *Seja o problema de valor inicial dado pelo sistema (2.1) com  $x(n_0) = x_0$ , onde  $n_0$  é um número natural. Tal problema admite uma única solução, dada por  $x(n, n_0, x_0) = A^{n-n_0}x_0$ .*

**Demonstração:** Para provar esse resultado vamos utilizar indução matemática, partindo do fato que  $x(n_0) = x_0$ , temos que

$$x(n_0+1, n_0, x_0) = Ax(n_0) = Ax_0.$$

Suponhamos agora que  $x(n, n_0, x_0) = A^{n-n_0}x_0$ , então

$$x(n+1, n_0, x_0) = Ax(n) = AA^{n-n_0}x_0 = A^{n-n_0+1}x_0.$$

A solução é única, pois é determinada a partir de iterações sobre  $x_0$ . ■

**Observação 2.1.** De fato podemos considerar  $n_0 = 0$  sem que haja perda de generalidade, uma vez que se  $n_0$  é diferente de zero. Consideramos então a sequência  $y(n)$  tal que

$$y(n - n_0) = x(n),$$

assim temos o sistema  $y(n+1) = Ay(n)$  e  $y(0) = x(n_0)$ , note que nesse caso a solução é dada por  $y(n) = A^n y(0)$ . Sendo assim desenvolveremos nossa discussão considerando  $n_0$  como sendo zero.

Agora que determinamos a solução para o sistema, fica evidente que para tratar dos mesmos é importante e necessário ter boas ferramentas para calcular potências de matrizes. Como esse não é o foco do trabalho não discutiremos aqui técnicas para realizar essas operações, porém aconselhamos que, caso você ainda não tenha estudado, leia sobre a Forma Canônica de Jordan antes de continuar. Indicamos para essa leitura as referências (HOFFMAN; KUNZE, 1979), (LEON, 2008) e (LIMA, 2008).

Vamos estabelecer agora a existência e unicidade de solução para o sistema não autônomo

$$x(n+1) = A(n)x(n) \tag{2.2}$$

onde  $A(n)$  é uma matriz não singular e o sistema é válido para  $n \geq n_0 \geq 0$ .

**Teorema 2.1.** *Para cada  $x_0$  vetor de  $\mathbb{R}^k$  e  $n_0$  inteiro não negativo, existe uma única solução  $x(n, n_0, x_0)$  de (2.2) com  $x(n_0, n_0, x_0) = x_0$ .*

**Demonstração:** Nessas condições temos que  $x(n_0 + 1) = A(n_0)x(n_0)$ , assim

$$x(n_0 + 2) = A(n_0 + 1)x(n_0 + 1) = A(n_0 + 1)A(n_0)x(n_0).$$

Quem possui uma "visão matemática" pouco mais aguçada já percebeu o padrão das soluções. Sendo assim vamos utilizar indução para provar que

$$x(n, n_0, x_0) = \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) \right] x_0. \quad (2.3)$$

Por indução temos que, para  $n = n_0 + 1$  a igualdade se verifica.

Suponhamos então que (2.3) seja válida para  $n$  inteiro positivo, assim

$$x(n + 1, n_0, x_0) = A(n)x(n) = A(n) \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) \right] x_0 = \left[ \prod_{i=n_0}^n A(i) \right] x_0.$$

Fica assim provado que existe a solução de (2.2), dada por (2.3), e a mesma é única. Pois por iteração, partindo do valor inicial, não se pode chegar à outra solução. ■

É válido lembrar que a noção de independência linear entre as soluções do sistema é a mesma que estabelecemos anteriormente para equações de diferença escalares.

**Definição 2.1.** *Definimos o vetor  $\Phi$ , como sendo a matriz cujas colunas são as soluções do sistema (2.2), ou seja*

$$\Phi(n) = [x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)]_{k \times k}$$

onde  $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$  são as soluções de (2.2).

Sendo assim temos que

$$\Phi(n+1) = [x_1(n+1), x_2(n+1), \dots, x_k(n+1)]$$

logo,

$$\Phi(n+1) = A(n)\Phi(n) \tag{2.4}$$

ou seja  $\Phi$  satisfaz (2.2).

**Lema 2.2.** *Sejam  $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$  as soluções do sistema (2.2), então as mesmas são linearmente independentes para  $n \geq n_0$  se, e somente se,  $\Phi$  é não singular para todo  $n \geq n_0$ .*

**Demonstração:** Para estudar a independência linear das soluções fazemos uma combinação linear das mesma e igualamos a zero, ou seja, consideremos o sistema  $\Phi(n)\xi = 0$ , sendo que  $\xi = [a_1, a_2, \dots, a_k]^T$ . De fato esse sistema terá somente a solução trivial, ou seja  $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$  serão linearmente independentes se, e somente se  $\text{Det}[\Phi(n)]$  é não nulo, ou seja,  $\Phi(n)$  é não singular. ■

**Definição 2.2.** *A matriz  $\Phi(n)$ , conforme definida acima é chamada de **matriz fundamental** do sistema (2.1).*

**Observação 2.2.** Existem infinitas matrizes fundamentais para um sistema como (2.2).

De fato, seja  $\Phi(n)$  uma matriz fundamental de (2.2) e  $C$  uma matriz não singular de modo que faça sentido tratar de  $\Phi(n)C$ , então

$$\Phi(n+1)C = A(n)\Phi(n)C$$

ou seja,  $\Phi(n)C$  também é uma matriz fundamental de (2.2).

De fato já conhecemos uma das matrizes fundamentais de (2.2), dada por

$$\Phi(n) = \prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)$$

**Teorema 2.2.** *Há uma única solução  $\Phi(n)$  para o sistema (2.4) tal que  $\Phi(n_0) = I$ .*

**Demonstração:** De fato podemos reescrever tal sistema com  $K^2$  equações de diferença de primeira ordem. Assim aplicando para cada ponto o teorema da existência e unicidade de solução, obtemos um vetor  $\mathbf{v}$  de  $\mathbb{R}^{k^2}$ , tal que  $\mathbf{v}(n_0) = (1, 0, \dots, 0, 1, \dots, 0, 0, \dots, 1)^T$ , note que o 1 aparecerá nas posições  $1 + i(k + 1)$  com  $0 \leq i \leq (k - 1)$ . Uma vez determinado o vetor  $\mathbf{v}$  transformamos o mesmo em uma matriz quadrada de ordem  $k$ , onde cada grupo de  $k$  componentes consecutivas de  $\mathbf{v}$  é uma coluna de  $\Phi$ . Como cada um dos vetores  $\mathbf{v}$  é único, a matriz  $\Phi$  é única. ■

**Definição 2.3.** *Seja  $\Phi(n)$  uma matriz fundamental, definimos a **matriz de transição** como sendo  $\Phi(n, m) = \Phi(n) \Phi^{-1}(m)$ .*

Definida a matriz de transição, podemos listar algumas de suas propriedades:

- i)  $\Phi^{-1}(n, m) = \Phi(m, n)$ ;
- ii)  $\Phi(n, m) = \Phi(n, r) \Phi(r, m)$ ;
- iii)  $\Phi(n, m) = \prod_{i=m}^{n-1} A(i)$

A demonstração dessas propriedades são simples, por isso não descreveremos as mesmas nesse trabalho.

**Corolário 2.1.** *A solução única de  $x(n, n_0, x_0)$  de (2.2) com  $x(n, n_0, x_0) = x_0$  é dada por*

$$x(n, n_0, x_0) = \Phi(n, n_0) x_0.$$

**Demonstração:** De fato temos que a solução única de (2.2) é dada por (2.3) e pela propriedade (iii) listada anteriormente  $\Phi(n, n_0) = \prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)$ , portanto  $x(n, n_0, x_0) = \Phi(n, n_0) x_0$ . ■

**Proposição 2.1.** *Existe uma expressão que nos permite calcular o determinante de  $\Phi(n)$ , a qual chamamos de **Fórmula de Abel**, expli-*

citamente temos que

$$\det \Phi(n) = \left( \prod_{i=n_0}^{n-1} [\det A(i)] \right) \det \Phi(n_0)$$

**Corolário 2.2.** *A matriz fundamental  $\Phi(n)$  é não singular e as soluções*

$$x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$$

*são linearmente independentes para  $n \geq n_0$  se, e somente se  $\Phi(n_0)$  é não singular.*

**Demonstração:** Essa demonstração é imediata da Fórmula de Abel, uma vez que se  $A$  é não singular,  $\Phi(n)$  será não singular somente se  $\Phi(n_0)$  também não for, consequentemente, pelo lema apresentado anteriormente as soluções  $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$  serão linearmente independentes se, e somente se o determinante de  $\Phi(n_0)$  for não nulo. ■

**Teorema 2.3.** *Existem  $k$  soluções linearmente independentes para o sistema (2.2).*

**Demonstração:** Seja  $e_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)^T$  o  $i$ -ésimo vetor da base canônica de  $\mathbb{R}^k$ , de fato, pelos resultados anteriores temos que para cada  $e_i$ , com  $1 \leq i \leq k$  existe uma única solução  $x(n, n_0, e_i)$  de (30) tal que  $x(n_0, n_0, e_i) = e_i$ .

Vamos provar agora que as soluções  $x(n, n_0, e_i)$  são linearmente independentes. De fato, para isso, basta verificar que  $\Phi(n_0)$  é não singular. Note que  $\Phi(n_0) = I$ , logo seu determinante é não nulo, ou seja, as  $k$  soluções de (2.2) são linearmente independentes. ■

**Princípio da Superposição:** Assim como estudamos tal princípio para equações de diferença escalares, o análogo é verificado para sistemas de equações, ou seja, dadas  $x_1(n)$  e  $x_2(n)$  soluções de (2.2) e  $c$  uma constante real, então:

i)  $x_1(n) + x_2(n)$  é uma solução de (2.2);

ii)  $cx_1(n)$  é solução de (2.2).

Em outras palavras, podemos afirmar que o conjunto das soluções de (2.2) é um conjunto fechado em relação a soma e a multiplicação. Definimos então o que será a solução geral do sistema.

**Definição 2.4.** *Sejam  $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$  soluções linearmente independentes de (2.2),  $\Phi(n)$  uma matriz fundamental do sistema, cujas colunas são essas soluções e*

$$C = (c_1, c_2, \dots, c_k)^T$$

um vetor de  $\mathbb{R}^k$ . A **solução geral de** (2.2) é dada por  $x(n) = \Phi(n)C$ .

Assim como no caso anterior, o conjunto  $S$  de todas as soluções de (2.2) é um espaço vetorial de dimensão  $k$ , munido das operações de soma e multiplicação por escalar. Sua base é formada por  $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$  soluções linearmente independentes do sistema.

## 2.2 SISTEMAS NÃO-HOMOGÊNEOS

Consideremos agora o sistema não homogêneo

$$x(n+1) = A(n)x(n) + g(n) \tag{2.5}$$

**Definição 2.5.** *Definimos uma **solução particular**  $x_p(n)$  de (2.5) como sendo uma função  $k$ -vetorial que satisfaz tal sistema.*

**Teorema 2.4.** *Qualquer solução de (2.5) pode ser escrita como*

$$x(n) = \Phi(n)C + x_p(n),$$

onde  $\Phi(n)$  e  $C$  são os vetores definidos na seção anterior.

**Demonstração:** Seja  $x(n)$  uma solução de (2.5) e  $x_p(n)$  uma solução particular do mesmo, definimos então  $y(n) = x(n) - x_p(n)$ .

Logo  $y(n+1) = A(n)[x(n) - x_p(n)]$ , ou seja

$$y(n+1) = A(n)y(n).$$

Note que  $y(n)$  é na verdade uma solução de (2.2). Assim podemos escrever  $y(n) = \Phi(n)C$  para algum vetor constante  $C$ . Portanto  $x(n) = \Phi(n)C + x_p(n)$ . ■

Nos dediquemos agora a estudar sobre a solução particular de (2.5), uma vez que o outro termo já foi amplamente discutido, na seção anterior.

**Lema 2.3.** *Uma solução particular de (2.5) é*

$$x_p(n) = \sum_{r=n_0}^{n-1} \Phi(n, r+1)g(r)$$

com  $x_p(n_0) = 0$ .

**Demonstração:** Para provar esse resultado, basta mostrarmos que  $x_p(n)$  satisfaz (2.5), de fato

$$\begin{aligned} x_p(n+1) &= \sum_{r=n_0}^n \Phi(n+1, r+1)g(r) \\ &= \sum_{r=n_0}^{n-1} \Phi(n+1, r+1)g(r) + \Phi(n+1, n+1)g(n) \\ &= \sum_{r=n_0}^{n-1} A(n)\Phi(n, r+1)g(r) + g(n) = A(n)x_p(n) + g(n) \end{aligned}$$

Portanto  $x_p(n)$  satisfaz o sistema (2.5) e  $x_p(n_0) = 0$ . ■

Assim a única solução para o problema de valor inicial dado por (2.5) com  $x(n_0) = x_0$  é

$$x(n, n_0, x_0) = \Phi(n, n_0)x_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \Phi(n, r+1)g(r)$$



### 2.2.1 Transformando Equações de Diferença Escalares em Sistemas

Nesse tópico vamos estudar como transformar equações escalares de ordem mais alta em sistemas de equações de primeira ordem. Consideremos a equação (1.2), tomemos

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1(n) = x(n) \\ z_2(n) = x(n+1) = z_1(n+1) \\ \vdots \\ z_k(n) = x(n+k-1) = z_{k-1}(n+1) \end{array} \right.$$

Podemos ainda escrever o sistema da seguinte forma

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1(n+1) = z_2(n) \\ z_2(n+1) = z_3(n) \\ \vdots \\ z_{k-1}(n+1) = z_k(n) \\ z_k(n+1) = -p_k(n)z_1(n) - p_{k-1}(n)z_2(n) - \dots \\ -p_1(n)z_k(n) + g(n) \end{array} \right.$$

Note que  $z_k(n+1) = x(n+k)$ .

Vetorialmente podemos escrever

$$z(n+1) = A(n)z(n) + h(n),$$

onde

$$A(n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -p_k(n) & -p_{k-1}(n) & \cdots & -p_1(n) \end{bmatrix},$$

$$z(n) = \begin{bmatrix} z_1(n) \\ z_2(n) \\ \vdots \\ z_{k-1}(n) \\ z_k(n) \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$h(n) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(n) \end{bmatrix}$$

Essa técnica pode facilitar o estudo de equações de diferença escalares de ordem superior, pois em alguns casos é mais fácil trabalhar com um sistema de equações de ordem um do que com uma equação escalar de ordem  $k$ .

**Observação 2.3.** Para uma equação com coeficientes constantes teríamos a mesma forma de sistema, porém na matriz  $A$  os coeficientes  $p_i$ 's seriam constantes. Note que nesse caso o polinômio característico de  $A$  é dado por

$$p(\lambda) = \lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + p_2\lambda^{k-2} + \dots + p_{k-1}\lambda + p_k,$$

ou seja, os autovetores da matriz  $A$  coincidem com as raízes características associadas a equação de diferença escalar.

### 2.2.2 Sistemas Lineares Periódicos

Chegamos ao nosso último tópico antes de tratar especificamente de estabilidade das equações de diferença. Vamos considerar para nossa discussão agora o sistema

$$x(n+1) = A(n)x(n) \quad (2.6)$$

onde  $A(n+p) = A(n)$  para algum  $p$  natural. Não demonstraremos aqui todos os resultados, pois alguns deles se referem a propriedades de matrizes, como esse não é nosso foco deixamos as mesmas a cargo de pesquisa dos leitores.

**Lema 2.4.** *Seja  $B$  uma matriz de ordem  $k$  não singular e  $m$  um número inteiro não negativo, então existe uma matriz  $C$  de ordem  $k$  tal que  $C^m = B$ .*

**Demonstração:** Não apresentaremos aqui a demonstração completa, faremos somente uma observação.

É importante pontuar que dada uma matriz  $B$  não singular podemos escrevê-la na forma canônica de Jordan, de modo que  $B = PJP^{-1}$ , sendo  $J$  uma matriz na forma de Jordan com  $r$  blocos de Jordan ( $J_i$ ). Definimos então

$$H = \begin{bmatrix} H_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & H_r \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad H_i = \exp \left[ \frac{1}{m} \ln J_i \right]$$

Sendo assim  $H^m = J$  e tomando  $C = PHP^{-1}$  temos que  $C^m = B$ . ■

**Lema 2.5.** *Dado o sistema (2.6) seja  $\Phi(n)$  sua matriz fundamental, então*

i)  $\Phi(n+p)$  também é uma matriz fundamental;

ii)  $\Phi(n+p) = \Phi(n)C$ , para uma matriz  $C$  não singular;

iii)  $\Phi(n+p, p) = \Phi(n, 0)$ .

**Demonstração:** Seja  $\Phi(n)$  matriz fundamental de (2.6)

i) Assim  $\Phi(n+1) = A(n)\Phi(n)$ , logo

$$\Phi(n+p+1) = A(n+p)\Phi(n+p) = A(n)\Phi(n+p),$$

ou seja,  $\Phi(n+p)$  satisfaz (2.6).

ii) Sejam

$$\Psi_1(n, n_0) = \Phi(n+p)\Phi^{-1}(n_0+p)$$

e

$$\Psi_2(n, n_0) = \Phi(n)\Phi^{-1}(n_0).$$

De fato  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$  são matrizes fundamentais de (2.6) com a mesma condição inicial  $\Psi_1(n_0, n_0) = \Psi_2(n_0, n_0) = I$ , assim pelo Teorema 2.1 temos que  $\Psi_1(n, n_0) = \Psi_2(n, n_0)$ , ou seja

$$\begin{aligned}\Phi(n+p)\Phi^{-1}(n_0+p) &= \Phi(n)\Phi^{-1}(n_0) \Leftrightarrow \\ \Phi(n+p) &= \Phi(n)\Phi^{-1}(n_0)\Phi(n_0+p)\end{aligned}$$

Portanto  $\Phi(n+p) = \Phi(n)C$ , sendo

$$C = \Phi^{-1}(n_0)\Phi(n_0+p)$$

uma matriz não singular pois  $\Phi^{-1}(n_0)$  e  $\Phi(n_0+p)$  são não singulares.

iii) Temos que, por definição  $\Phi(n+p, p) = \Phi(n+p)\Phi^{-1}(p)$ .

Pelo item anterior vimos que podemos escrever

$$\Phi(n+p) = \Phi(n)\Phi^{-1}(n_0)\Phi(n_0+p),$$

sendo assim obtemos a igualdade

$$\Phi(n+p, p) = \Phi(n)\Phi^{-1}(n_0)\Phi(n_0+p)\Phi^{-1}(p),$$

que equivale a  $\Phi(n+p, p) = \Phi(n, n_0) \Phi(n_0+p, p)$ . Tomando  $n_0 = 0$ , concluímos que

$$\Phi(n+p, p) = \Phi(n, 0) \Phi(p, p) = \Phi(n, 0).$$

■

**Teorema 2.5.** *Para cada matriz fundamental  $\Phi(n)$  do sistema (2.6), existe uma matriz não singular periódica  $P(n)$  de período  $p$  tal que  $\Phi(n) = P(n) B^n$ .*

**Demonstração:** Seja  $C$  a matriz não singular tal que  $\Phi(n+p) = \Phi(n)C$ . O Lema 2.4 nos garante que existe uma matriz  $B$  tal que  $B^p = C$ . Tomemos então  $P(n) = \Phi(n) B^{-n}$ , assim

$$P(n+p) = \Phi(n+p) B^{-p} B^{-n}.$$

Então

$$P(n+p) = \Phi(n) C B^{-p} B^{-n} = \Phi(n) B^p B^{-p} B^{-n} = \Phi(n) B^{-n},$$

portanto  $P(n)$  tem período  $p$  e  $\Phi(n) = P(n) B^n$ .

Resta então verificar se  $P$  é não singular. De fato  $C$  é uma matriz não singular, logo  $B$  é não singular e conseqüentemente  $B^{-n}$  tem determinante não nulo. Como  $\Phi(n)$  também é não singular temos que  $P(n)$  é não singular. ■

**Observação 2.4.** Dado o sistema (2.6), sendo  $\Phi(n)$  sua matriz fundamental, então  $x(n) = \Phi(n)c$  é solução do mesmo, onde  $c$  é um vetor constante, assim podemos escrever  $x(n) = P(n) B^n c$ . Consideremos agora o sistema

$$z(n+1) = Bz(n). \tag{2.7}$$

Temos que a solução desse sistema é  $z(n) = B^n c$ , logo

$$x(n) = P(n) z(n),$$

ou seja, ao invés de trabalharmos com o sistema periódico (2.6), podemos reduzi-lo ao sistema autônomo (2.7), o que facilita e otimiza o estudo.

A discussão dos resultados acima nos leva a definir alguns objetos matemáticos que perpassam nosso estudo.

**Definição 2.6.** A matriz  $C = B^p$  é chamada de **matriz monodromia de (2.6)**.

**Definição 2.7.** Os autovalores  $\lambda$  de  $B$  são chamados de **expoentes de Floquet de (2.6)** e os correspondentes autovalores  $\lambda^p$  de  $B^p$  recebem o nome de **multiplicadores de Floquet de (2.6)**.

**Observação 2.5.** Existe uma solução  $x(n)$  de (2.6) tal que  $x(n+p) = \lambda^p x(n)$ .

De fato temos que  $B^p \xi = \lambda \xi$  e

$$x(n) = P(n) B^n c$$

é uma solução de (2.6), tomando  $c$  o autovetor associado a  $\lambda$ , temos

$$x(n+p) = P(n+p) B^n B^p c$$

logo  $x(n+p) = P(n) B^n \lambda^p c$  portanto  $x(n+p) = \lambda^p x(n)$ .

**Lema 2.6.** Sejam  $\Phi(n)$  e  $\Psi(n)$  duas matrizes fundamentais de (2.6) tais que  $\Phi(n+p) = \Phi(n) C$  e  $\Psi(n+p) = \Psi(n) E$ , então  $C$  e  $E$  são semelhantes.

**Demonstração:** Como tratasse de um resultado auxiliar omitiremos a demonstração por questão de espaço. ■

**Lema 2.7.** Um número  $\lambda$  é um expoente de Floquet de (2.6) se, e somente se, existir uma solução não trivial para o sistema da forma  $\lambda^n q(n)$ , sendo  $q(n)$  um vetor tal que  $q(n+p) = q(n)$  para todo  $n$  natural.

**Demonstração:**  $\Rightarrow$ ) Seja  $\lambda$  um expoente de Floquet de (2.6), então o determinante de  $B^n - \lambda^n I$  é nulo, tomemos um vetor  $x_0$  de  $\mathbb{R}^k$  tal que  $(B^n - \lambda^n I) x_0 = 0$ , ou seja  $B^n x_0 = \lambda^n x_0$ . Seja

$$P(n) = \Phi(n) B^{-n}$$

uma matriz periódica conforme definimos anteriormente. Podemos escrever então que

$$P(n) B^n x_0 = \lambda^n P(n) x_0,$$

logo

$$x(n, n_0, x_0) = \Phi(n, n_0) x_0 = P(n) B^n x_0 = \lambda^n P(n) x_0 = \lambda^n q(n),$$

portanto existe uma solução não trivial da forma  $\lambda^n q(n)$ , onde

$$q(n+p) = P(n+p) x_0 = P(n) x_0 = q(n).$$

$\Leftrightarrow$  Suponhamos que  $x(n) = \lambda^n q(n)$  seja uma solução de (2.6), sendo assim temos que

$$\lambda^n q(n) = P(n) B^n x_0 \tag{2.8}$$

para algum vetor  $x_0$ , ou seja

$$\lambda^{n+p} q(n+p) = P(n+p) B^{n+p} x_0,$$

como  $P(n)$  e  $q(n)$  são periódicos então  $\lambda^{n+p} q(n) = P(n) B^{n+p} x_0$ .

Além disso, de (2.8) obtemos que

$$\lambda^p \lambda^n q(n) = \lambda^p P(n) B^n x_0,$$

ou seja  $\lambda^p P(n) B^n x_0 = P(n) B^{n+p} x_0$ . Logo

$$P(n) B^n (B^p - \lambda^p I) x_0 = 0.$$

Aplicando o determinante na igualdade observamos que  $\det(B^p - \lambda^p I) = 0$ , pois  $P(n)$  e  $B$  são não singulares, logo  $\lambda$  é um expoente de Floquet de (2.6). ■

**Corolário 2.3.** *Considerando o sistema (2.6) temos que:*

- i) O mesmo tem uma solução periódica de período  $p$  se, e somente se,  $1$  é um de seus multiplicadores de Floquet.*

*ii) Tem uma solução periódica de período  $2p$  se, e somente se, tem um multiplicador de Floquet igual a  $-1$ .*

**Demonstração:** *i)* Pelo Lema 2.7 temos que  $1$  é expoente de Floquet de (2.6) se, e somente se, existe uma solução do sistema da forma

$$x(n) = 1^n q(n),$$

onde  $q(n)$  tem período  $p$ , portanto  $x(n) = q(n)$  é uma solução periódica com período  $p$  para (2.6).

*ii)* Analogamente  $-1$  é expoente de Floquet se, e somente se,

$$x(n) = (-1)^n q(n)$$

é uma solução de (2.6).

Vamos mostrar agora que  $x(n)$  é  $2p$ -periódica. De fato para  $n$  par temos que  $x(n) = q(n)$  e para  $n$  ímpar temos que  $x(n) = -q(n)$ , sendo assim não podemos garantir que tal solução é  $p$ -periódica, pois isso dependeria de  $p$  ser par. Contudo temos que

$$x(n + 2p) = (-1)^{n+2p} q(n + 2p) = (-1)^n (-1)^{2p} q(n) = x(n),$$

portanto  $x(n)$  é uma solução  $2p$ -periódica. ■



### 3 ESTABILIDADE

Para estudarmos a teoria de estabilidade das equações de diferença é necessário definir alguns conceitos topológicos.

**Definição 3.1.** (LEON, 2008) e (BORTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2015) *Seja  $V$  um espaço vetorial e  $v \in V$ , uma função  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  é uma **norma** se satisfaz as seguintes propriedades:*

- i)  $\|v\| \geq 0$  para todo  $v$ , e  $\|v\| = 0$  se, e somente se  $v = 0$ ;
- ii)  $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$  para todo  $\alpha$  escalar e  $v$ ;
- iii)  $\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$  quaisquer que sejam  $v, u \in V$ .

Dado um espaço vetorial, podemos definir diversas normas sobre ele, por exemplo, o módulo é uma norma no espaço dos reais, já em  $\mathbb{R}^k$  podemos definir as seguintes normas:

**Definição 3.2.** (LEON, 2008) e (ELAYDI, 2000) *Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^k$  e  $x$  elemento do mesmo, definimos então as seguintes normas:*

i) Norma  $l_1$ :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^k |x_i|$$

ii) Norma Euclidiana ou  $l_2$ :

$$\|x\|_2 = \left( \sum_{i=1}^k |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

iii) Norma  $l_p$ :

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^k |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

iv) Norma  $l_\infty$  :

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq k} |x_i|$$

**Observação 3.1.** Dadas duas normas  $\|\cdot\|$  e  $\|\cdot\|'$  em  $\mathbb{R}^k$  existem constantes positivas  $\alpha$  e  $\beta$  tais que  $\alpha \|x\|' \leq \|x\| \leq \beta \|x\|'$  para qualquer vetor  $x$  de  $\mathbb{R}^k$ . Sendo assim dada  $x(n)$  uma sequência em  $\mathbb{R}^k$ , então  $\|x(n)\|$  converge para zero se, e somente se  $\|x(n)\|'$  converge para zero.

Uma vez definida uma norma  $\|\cdot\|$  em  $\mathbb{R}^k$  definimos alguma norma para matrizes correspondente a essa.

**Definição 3.3.** Dada  $A$  uma matriz de ordem  $k$  definimos a norma da mesma da seguinte forma

$$\|A\| = \max_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad (3.1)$$

onde  $x$  é um vetor de  $\mathbb{R}^k$ .

**Definição 3.4.** Dada  $A$  uma matriz o **raio espectral de  $A$**  é um escalar dado por

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ é autovalor de } A\}.$$

**Observação 3.2.** A partir dessa definição temos que  $\rho(A) \leq \|A\|$ .

**Demonstração:** De fato, seja  $\lambda$  um autovalor de  $A$  e  $\xi$  o autovetor associado a  $\lambda$ , assim de (3.1) podemos concluir que

$$\|A\| \geq \frac{\|A\xi\|}{\|\xi\|} = \frac{\|\lambda\xi\|}{\|\xi\|} = \frac{|\lambda| \|\xi\|}{\|\xi\|},$$

logo  $\|A\| \geq |\lambda|$  para qualquer  $\lambda$ , portanto  $\|A\| \geq \rho(A)$ . ■

No primeiro capítulo apresentamos as definições de possíveis comportamentos das soluções de equações de diferença de primeira ordem. Aqui vamos apresentar as generalizações desses conceitos para

sistemas de equações de diferença, o que nos será útil uma vez que dada uma equação de ordem  $k$  podemos transformá-la em um sistema.

Consideremos então a equação de diferença vetorial

$$x(n+1) = f(n, x(n)), \quad x(n_0) = x_0 \quad (3.2)$$

onde  $x(n)$  é um vetor de  $\mathbb{R}^k$  e  $f$  uma função de  $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^k$  em  $\mathbb{R}^k$  tal que  $f(n, \cdot) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  é contínua para cada  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

Rapidamente vamos relembra as principais definições acerca da equação de diferença vetorial que iremos aplicar aqui.

**Definição 3.5.** *A equação de diferença vetorial (3.2) é chamada **autônoma** se*

$$f(n, x) = f(x).$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^k$ .

Ou seja,  $n$  não aparece explicitamente em  $f$ .

**Definição 3.6.** *A equação de diferença vetorial (3.2) é dita **periódica** se existe um número inteiro positivo  $p$  tal que*

$$f(n+p, x(n+p)) = f(n, x(n))$$

para todo  $n$ .

**Definição 3.7.** *Dado  $x^*$  um vetor de  $\mathbb{R}^k$ , o mesmo é chamado de **ponto de equilíbrio** de (3.2) se é ponto fixo de  $f$ . (ver Definição 1.6).*

**Observação 3.3.** *Dada a equação de diferença (3.2) existe  $x(n)$  solução da equação e  $x(n)$  é única. A demonstração desse fato pode ser feita através de indução matemática.*

Apresentamos agora a generalização da definição 1.9 apresentada na página 19.

**Definição 3.8.** *Um **ponto de equilíbrio**  $x^*$  de (3.2), é dito:*

- i) **Estável** ( $E$ ) se dado  $\varepsilon > 0$  e  $n_0 \geq 0$  existe  $\delta = \delta(\varepsilon, n_0) > 0$  tal que se  $\|x_0 - x^*\| < \delta$  então  $\|x(n, n_0, x_0) - x^*\| < \varepsilon$  para todo  $n \geq n_0$ . Além disso  $x^*$  será **Uniformemente Estável** ( $UE$ ) se  $\delta$  não depender de  $n_0$  e **Instável** ( $I$ ) se não for estável.
- ii) **Atrator** ( $A$ ) se existe  $\mu = \mu(n_0) > 0$  tal que se  $\|x_0 - x^*\| < \mu$  então  $\lim x(n, n_0, x_0) = x^*$ . Será **Uniformemente Atrator** ( $UA$ ) se  $\mu$  for tomado independentemente de  $n_0$ , ou ainda, se dados  $\varepsilon > 0$  e  $n_0$ , existem  $\mu > 0$  e  $N = N(\varepsilon)$  independentes de  $n_0$  tais que se  $\|x_0 - x^*\| < \mu$  então  $\|x(n, n_0, x_0) - x^*\| < \varepsilon$  para todo  $n \geq n_0 + N$ .
- iii) **Assintoticamente Estável** ( $AE$ ) se  $x^*$  é estável e atrator. **Uniformemente Assintoticamente Estável** ( $UAE$ ) se é uniformemente estável e uniformemente atrator.
- iv) **Exponencialmente Estável** ( $EE$ ) se existe  $\delta > 0$ ,  $M > 0$  e  $\eta \in (0, 1)$  tais que, se  $\|x_0 - x^*\| < \delta$  então  $\|x(n, n_0, x_0) - x^*\| \leq M \|x_0 - x^*\| \eta^{n-n_0}$ .
- v) A solução  $x(n, n_0, x_0)$  é limitada se existe constante positiva  $M$  tal que para todo  $n \geq n_0$  tivermos que  $\|x(n, n_0, x_0)\| < M$ .

**Observação 3.4.** Se os itens da definição acima se verificarem para todo  $\delta$  e  $\mu$  positivos, temos que tal comportamento estável é dito **global**.

Tratemos agora de alguns resultados relevantes sobre estabilidades das soluções de (3.2) em relação ao seu ponto de equilíbrio  $x^*$ . Consideremos inicialmente a equação de diferença vetorial autônoma.

$$x(n+1) = f(x(n)) \quad (3.3)$$

**Teorema 3.1.** *Seja (3.3) e  $x^*$  seu ponto de equilíbrio, então*

- i)  $x^*$  é estável se, e somente se é uniformemente estável;

ii)  $x^*$  é assintoticamente estável se, e somente se é uniformemente assintoticamente estável;

iii)  $x^*$  é atrator se, e somente se é uniformemente atrator.

**Demonstração:** Sejam  $x(n, n_0, x_0)$  e  $y(n, m_0, x_0)$  duas soluções de (3.3), de modo que  $m_0 = n_0 + r_0$ , nesse caso temos que

$$x(n - r_0, n_0, x_0) = y(n, m_0, x_0)$$

para  $n = m_0$ , pela propriedade de unicidade de solução temos que

$$x(n - r_0, n_0, x_0) = y(n, m_0, x_0)$$

para todo  $n \geq n_0$ . Assim as mesmas propriedades de estabilidade válidas para solução  $x$  varificam-se para  $y$ , não dependendo de  $n_0$ .

i) De fato se  $x^*$  é uniformemente estável ele é estável. Suponhamos então que  $x^*$  é estável e conforme verificamos acima  $\delta$  não depende de  $n_0$ , logo  $x^*$  é assintoticamente estável.

A demonstração de (ii) e (iii) é dada através de argumentos análogos ao item (i). ■

**Exemplo 3.1.** Considere a equação de diferença escalar

$$x(n+1) = x(n)$$

sua solução é dada por  $x(n, n_0, x_0) = x_0$ , de fato  $x^* = 0$  é ponto de equilíbrio da solução. E dado  $\varepsilon > 0$  tomemos  $\delta = \varepsilon$ , assim se  $|x_0 - 0| < \delta$  então

$$|x(n, n_0, x_0) - 0| = |x_0 - 0| < \varepsilon,$$

ou seja,  $x^* = 0$  é uniformemente estável. Porém  $\lim x(n, n_0, x_0) = x_0$  assim se  $x_0 \neq 0$  então  $x^* = 0$  não é assintoticamente estável. Note que se tomarmos  $x^* = x_0$  então  $x^*$  será estável e uniformemente estável.

**Exemplo 3.2.** Considerando agora a equação escalar

$$x(n+1) = a(n)x(n),$$

vimos na página 18 que sua solução é dada por

$$x(n, n_0, x_0) = \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] x_0$$

de fato  $x^* = 0$  é o ponto de equilíbrio da equação, então:

i) O ponto de equilíbrio  $x^* = 0$  é estável se, e somente se

$$\left| \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right| \leq M(n_0) = M,$$

onde  $M$  é uma constante positiva que depende de  $n_0$ .

### Demonstração:

$\Rightarrow$ ) Suponhamos inicialmente que  $x^* = 0$  é estável, assim dado  $\varepsilon > 0$  e  $n_0 \geq 0$ , existe  $\delta(n_0) > 0$  tal que se  $|x_0| < \delta(n_0)$  então

$$|x(n, n_0, x_0)| = \left| \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] x_0 \right| < \varepsilon,$$

logo  $\left| \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right| < \frac{\varepsilon}{\delta(n_0)}$  e portanto existe a constante positiva  $M(n_0)$ .

$\Leftarrow$ ) Suponhamos agora que existe uma constante positiva  $M$  tal que

$$\left| \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right| \leq M(n_0),$$

assim dado  $\varepsilon > 0$  e  $n_0 \geq 0$  tomemos  $\delta(n_0) = \frac{\varepsilon}{M(n_0)}$ , logo se  $|x_0| < \delta(n_0)$  então

$$\begin{aligned} |x(n, n_0, x_0)| &= \left| \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] x_0 \right| = \left| \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right| |x_0| < M(n_0) \delta \\ &= M(n_0) \frac{\varepsilon}{M(n_0)} = \varepsilon \end{aligned}$$

ou seja  $x^*$  é estável. ■

ii) O ponto de equilíbrio  $x^* = 0$  é uniformemente estável se, e somente se, existe uma constante positiva  $M$  tal que

$$\left| \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right| \leq M$$

sendo  $M$  independente de  $n_0$ .

**Demonstração:**

$\Rightarrow$ ) Seja  $x^* = 0$  uniformemente estável, assim dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $|x_0| < \delta$  então

$$|x(n, n_0, x_0)| = \left| \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] x_0 \right| < \varepsilon,$$

logo  $\left| \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right| < \frac{\varepsilon}{\delta}$  e portanto existe a constante positiva  $M$ .

$\Leftarrow$ ) Se existe a constante positiva  $M$  tal que

$$\left| \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right| \leq M,$$

então dado  $\varepsilon > 0$  tomemos  $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ , analogamente ao item anterior, se  $|x_0| < \delta$  então  $|x(n, n_0, x_0)| < M\delta = \varepsilon$ . Portanto  $x^*$  é uniformemente estável. ■

iii) O ponto de equilíbrio  $x^* = 0$  é assintoticamente estável se, e somente se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right| = 0.$$

**Demonstração:**

$\Rightarrow$ ) Suponhamos inicialmente que  $x^* = 0$  é assintoticamente estável, ou seja  $x^*$  é estável e atrator, então dado  $\varepsilon > 0$  e  $n_0 \geq 0$  existe  $\delta(n_0) > 0$  tal que, se  $|x_0| < \delta(n_0)$  então  $\left| \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] x_0 \right| < \varepsilon$ . E existe  $\mu(n_0) > 0$  tal que, se  $|x_0| < \mu(n_0)$  então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) x_0 = 0$$

assim  $\lim x_0 = 0$  ou  $\lim \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) = 0$ , como  $x_0 \neq 0$  então de fato  $\lim \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) = 0$ . Portanto  $\lim \left| \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right| = 0$

$\Leftarrow$ ) Se  $\lim \left| \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right| = 0$ , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) x_0 = 0,$$

ou seja  $x^* = 0$  é atrator. E dado  $\varepsilon_0 > 0$  existe  $n_1$  natural tal que  $\left| \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right| < \varepsilon_0$  para todo  $n > n_1$ , assim dado  $\varepsilon > 0$ , tomemos  $\delta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ , de modo que se  $|x_0| < \delta$  então

$$\left| \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) x_0 \right| < \left| \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right| \delta < \varepsilon_0 \delta = \varepsilon.$$

■

*iv)* O ponto de equilíbrio  $x^* = 0$  é uniformemente assintoticamente estável e consequentemente exponencialmente estável se, e somente se, existem constantes  $M$  e  $\eta$  tais que,  $M > 0$  e  $\eta \in (0, 1)$  com  $\left| \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right| \leq M \eta^{n-n_0}$ .

**Demonstração:** Primeiramente vamos verificar que  $x^*$  ser uniformemente assintoticamente estável equivale a ser exponencialmente estável.

⇐) Suponhamos inicialmente que  $x^*$  é exponencialmente estável, assim temos que

$$0 < \left| \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) x_0 \right| \leq M |x_0| \eta^{n-n_0}$$

onde  $\eta < 1$ . Aplicando o limite na inequação verificamos pela Regra do Sanduíche que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) x_0 = 0,$$

ou seja  $x^*$  é uniformemente atrator. Além disso dado  $\varepsilon > 0$ , tomemos  $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ , logo se  $|x_0| < \delta$  então

$$\left| \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) x_0 \right| \leq M |x_0| \eta^{n-n_0} < M |x_0| < M \delta = \varepsilon,$$

assim,  $x^*$  é uniformemente estável.

⇒) Suponhamos agora que  $x^* = 0$  é uniformemente assintoticamente estável, então dado  $n_0 > 0$  existe  $\mu > 0$  e  $\delta > 0$  para qualquer  $\varepsilon > 0$  tais que se  $|x_0| < \mu$  e  $|x_0| < \delta$  então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) x_0 = 0, \quad \text{e} \quad \left| \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) x_0 \right| < \varepsilon$$



ou seja podemos tomar  $\varepsilon = M\eta^{n-n_0}$  e consequentemente  $x^*$  será exponencialmente estável.

Demonstremos agora a propriedade enunciada.

$\Rightarrow$ ) Seja  $x^* = 0$  exponencialmente estável, então existem  $\delta > 0$ ,  $M > 0$  e  $\eta \in (0, 1)$  tais que se  $|x_0| < \delta$  então

$$\left| \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) x_0 \right| \leq M |x_0| \eta^{n-n_0},$$

logo

$$\left| \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right| \leq M \eta^{n-n_0}.$$

$\Leftarrow$ ) Suponhamos que existam as constantes  $M$  e  $\eta$  tais que

$$\left| \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right| \leq M \eta^{n-n_0}.$$

De fato estamos trabalhando com  $x_0$  como sendo um escalar, logo existe  $\delta > 0$  tal que  $|x_0| < \delta$ . Assim podemos escrever que

$$\left| \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) x_0 \right| \leq M |x_0| \eta^{n-n_0}$$

e portanto  $x^* = 0$  é exponencialmente estável. ■

O próximo teorema será enunciado nesse trabalho somente com a finalidade de auxiliar na demonstração o resultado posterior ao mesmo, sendo assim não será demonstrado.

**Teorema 3.2.** *Seja  $f$  uma função contínua e  $x^*$  ponto fixo de  $f$ , então  $x^*$  será assintoticamente estável se, e somente se, existir um intervalo aberto  $(a, b)$  que contém  $x^*$  tal que  $f^2(x) > x$  para  $a < x < x^*$  e  $f^2(x) < x$  para  $x^* < x < b$ .*

**Demonstração:** A demonstração desse resultado está feita no Apêndice C de (ELAYDI, 2000) ■

Passemos então ao teorema que é de fato relevante ao nosso estudo.

**Teorema 3.3.** *Seja  $f$  uma função real contínua e  $x^*$  ponto fixo instável de  $f$ , então  $x^*$  não é atrator.*

**Demonstração:** Seja  $f$  uma função contínua em  $\mathbb{R}$  e  $x^*$  um ponto fixo instável e globalmente atrator de  $f$ , sendo assim a equação  $f^2(x) = x$  tem como solução  $x = x^*$ . Logo para  $x \neq x^*$  temos duas situações possíveis:

1.  $f^2(x) > x$  para  $x < x^*$  e  $f^2(x) < x$  para  $x > x^*$ ;
2.  $f^2(x) < x$  para  $x < x^*$  e  $f^2(x) > x$  para  $x > x^*$

Pelo teorema anterior temos que, no caso (1)  $x^*$  será assintoticamente estável, portanto não convém. Tomemos então o caso (2), assim se  $x_0 < x^*$  então

$$f^{2n}(x_0) = \underbrace{f^2(f^2(f^2(\dots(f^2(x_0))))))}_{n \text{ vezes}} < \underbrace{f^2(f^2(f^2(\dots(f^2(x_0))))))}_{n-1 \text{ vezes}} < \dots < f^2(x_0) < x_0 < x^*,$$

ou seja a seqüência  $f^{2n}(x_0)$  não converge para  $x^*$ . Portanto  $x^*$  não é um atrator global.

A demonstração para  $f^2(x) > x$  para  $x > x^*$  é análoga. ■

Esse resultado nos garante que não existe um ponto instável atrator.

**Exemplo 3.3.** Consiremos a equação de diferença em coordenadas polares

$$\begin{aligned} r(n+1) &= \sqrt{r(n)}, & r > 0 \\ \theta(n+1) &= \sqrt{2\pi\theta(n)}, & 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{aligned} \tag{3.4}$$

De fato temos que se  $r(0) = r_0$  e  $\theta(0) = \theta_0$ , então a solução de (3.4) é

$$\begin{aligned} r(n) &= r_0^{2^{-n}} \\ \theta(n) &= 2\pi^{1-2^{-n}} \theta_0^{2^{-n}} \end{aligned}$$

Assim  $\lim r(n) = 1$  e  $\lim \theta(n) = 2\pi$ . Porém se  $r_0 \neq 0$  e  $\theta_0 = 0$ , então  $(r(n), \theta(n)) = (r_0^{2^{-n}}, 0)$  e converge para  $(1, 0)$ . No entanto, se  $\theta_0 < \delta\pi$  com  $0 < \delta < 1$ , então a órbita de  $(r_0, \theta_0)$  vai em espiral circular para convergir para  $(1, 0)$ , assim  $(1, 0)$  é instável e atrator.

**Exemplo 3.4.** Consideremos agora a função

$$G_\mu = \begin{cases} -2x, & \text{se } x < \mu \\ 0, & \text{se } x \geq \mu \end{cases}$$

onde  $\mu \in \mathbb{R}^+$ . Tomemos então a equação do diferença

$$x(n+1) = G_\mu x(n)$$

com  $x(0) = x_0$ , assim sua solução é dada por

$$x(n) = \begin{cases} (-2)^n x_0, & \text{se } (-2)^{n-1} x_0 < \mu \\ 0, & \text{se } (-2)^{n-1} x_0 \geq \mu \end{cases}$$

Se  $x_0 \geq \mu$  então  $G_\mu^n(x_0) = 0$  para todo  $n$  maior ou igual a um. Se  $x_0 < \mu$ , então para algum  $k$  inteiro positivo,  $G_\mu^k(x_0) \geq \mu$ , logo  $G_\mu^n(x_0) = 0$  para todo  $n \geq k$ .

Assim independente de  $x_0$  temos que  $\lim G_\mu^n(x_0) = 0$ , ou seja,  $x^* = 0$  é globalmente atrator. Porém  $x^* = 0$  é instável, uma vez que dado  $x_0$  próximo a zero, o mesmo se afasta de  $x^* = 0$  até exceder  $\mu$ .

Temos assim dois exemplos de equações de diferenças de dimensão elevada ou com  $f$  descontínua, que possuem pontos instáveis atratores.

Na sequência vamos apresentar resultados específicos para sistemas de equações de diferença.

### 3.1 COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE SISTEMAS LINEARES

Consideremos aqui o sistema (2.2) dado por

$$x(n+1) = A(n)x(n)$$

sendo  $A$  uma matriz não singular, o sistema é válido para  $n \geq n_0 \geq 0$ . Cujas matriz fundamental é dada por  $\Phi(n)$ . Temos assim os seguintes resultados:

**Teorema 3.4.** *Dado o sistema (2.2),  $x^* = 0$  é:*

*i) Estável se, e somente se, existe uma constante positiva  $M$  tal que*

$$\|\Phi(n)\| \leq M \text{ para } n \geq n_0;$$

*ii) Uniformemente estável se, e somente se, existe uma constante positiva  $M$  tal que*

$$\|\Phi(n, m)\| \leq M$$

*para  $n_0 \leq m \leq n$ ;*

*iii) Assintoticamente estável se, e somente se,  $\lim \|\Phi(n)\| = 0$ ;*

*iv) Uniformemente Assintoticamente Estável se, e somente se, existem constantes positivas  $M$  e  $\eta$ , com  $\eta \in (0, 1)$  tais que  $\|\Phi(n, m)\| < M\eta^{n-m}$  para  $n_0 \leq m \leq n$ .*

**Demonstração:** Apresentaremos aqui somente a demonstração dos itens (i) e (iv).

Suponhamos sem perda de generalidade que  $\Phi(n_0) = I$ , assim  $x(n, n_0, x_0) = \Phi(n)x_0$ .

*i)*

$\Rightarrow$ ) Seja  $x^* = 0$  estável, assim dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $\|x_0\| < \delta$  então  $\|\Phi(n)x_0\| < \varepsilon$ . Porém  $\|x_0\| < \delta$  se, e somente se  $\frac{1}{\delta} \|x_0\| < 1$ . De fato

$$\|\Phi(n)\| = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|\Phi(n)\xi\|,$$

assim tomando  $\xi = \frac{1}{\delta} \|x_0\|$  temos

$$\frac{1}{\delta} \sup_{\|x_0\| \leq \delta} \|\Phi(n)x_0\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} = M.$$

$\Leftarrow$ ) Se  $\|\Phi(n)\| \leq M$ , então

$$\|x(n, n_0, x_0)\| \leq M \|x_0\|,$$

logo dado  $\varepsilon > 0$ , tomemos  $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ , assim se  $\|x_0\| < \delta$  então

$$\|x(n, n_0, x_0)\| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

portanto  $x^* = 0$  é estável.

*iv)*

$\Rightarrow$ ) Seja  $x^* = 0$  uniformemente assintoticamente estável, logo temos que em particular é uniformemente estável. Pelo item (ii),

$$\|\Phi(n, m)\| \leq M$$

para  $n_0 \leq m \leq n$ , além disso  $x^* = 0$  é uniformemente atrator, assim dados  $\tilde{\varepsilon} \in (0, 1)$  e  $n_0$ , existem  $\mu > 0$  e  $N = N(\tilde{\varepsilon})$  independentes de  $n_0$  tais que, se  $\|x_0\| < \mu$  então  $\|\Phi(n, n_0)\| < \tilde{\varepsilon}$  para todo  $n \geq n_0 + N$ .

Logo  $M \|\Phi(n, n_0)\| < \tilde{\varepsilon} M = \varepsilon$  para todo  $n \geq n_0 + N$ . Tomemos então  $n \in [n_0 + mN, n_0 + (m+1)N]$  onde  $m$  é um inteiro positivo. Note que

$$\begin{aligned} \Phi(n, n_0) &= \Phi(n, n_0 + mN) \Phi(n_0 + mN, n_0 + (m-1)N) \\ &\quad \dots \Phi(n_0 + N, n_0), \end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned} \|\Phi(n, n_0)\| &\leq \|\Phi(n, n_0 + mN)\| \\ &\|\Phi(n_0 + mN, n_0 + (m-1)N)\| \dots \|\Phi(n_0 + N, n_0)\| \leq \\ M\varepsilon^m &= \frac{M}{\varepsilon} \left(\varepsilon^{\frac{1}{N}}\right)^{(m+1)N} = \tilde{M}\eta^{(m+1)N} \leq \tilde{M}\eta^{(n-n_0)} \end{aligned}$$

pois  $mN \leq n - n_0 \leq (m+1)N$  e  $\eta < 1$ .

⇐) Se

$$\|\Phi(n, m)\| < M\eta^{n-m}$$

então pelo item (ii) temos que  $x^* = 0$  é uniformemente estável, além disso dado  $\varepsilon \in (0, M)$ , tomemos  $\mu = 1$  e  $N$  tal que  $\eta^N < \frac{\varepsilon}{M}$ . Se  $\|x_0\| < \mu = 1$  então

$$\|x(n, n_0, x_0)\| = \|\Phi(n, n_0)x_0\| \leq M\eta^{n-n_0} < \varepsilon$$

para  $n \geq n_0 + N$ , ou seja  $x^* = 0$  também é uniformemente atrator e portanto é uniformemente assintoticamente estável. ■

Derivados desse teorema temos os seguintes corolários:

**Corolário 3.1.** *Dado o sistema (2.2) temos que:*

- i)  $x^* = 0$  é estável se, e somente se todas as soluções são limitadas;
- ii)  $x^* = 0$  é exponencialmente estável se, e somente se é uniformemente assintoticamente estável.

**Demonstração:** Imediata do Teorema 3.4. ■

**Corolário 3.2.** *Considerando o sistema (2.2), temos que todas as propriedades de estabilidades locais válidas para  $x^* = 0$  implicam na estabilidade global correspondente.*

**Demonstração:** Imediata do Teorema 3.4. ■

**Teorema 3.5.** *Considere o sistema (2.2), onde  $A(n) = [a_{ij}(n)]$  com  $1 \leq i, j \leq k$ :*

- i) *Se  $\sum_{i=1}^k |a_{ij}(n)| \leq 1$  sendo  $1 \leq j \leq k$  e  $n \geq n_0$ , então  $x^* = 0$  é uniformemente estável;*
- ii) *Se  $\sum_{i=1}^k |a_{ij}(n)| \leq 1 - v$  para algum  $v \in (0, 1)$ , sendo  $1 \leq j \leq k$  e  $n \geq n_0$ , então  $x^* = 0$  é uniformemente assintoticamente estável.*

**Demonstração:** Consideremos para essa demonstração a norma  $l_1$ . Pela Observação da página 72 podemos tomar essa norma sem que haja perda de generalidade, nesse caso temos:

i)  $\|A(n)\|_1 = \sum_{i=1}^k |a_{ij}(n)| \leq 1$  para todo  $n \geq n_0$ , de fato qualquer solução do sistema pode ser escrita como  $\Phi(n, m)$  e

$$\|\Phi(n, m)\|_1 = \left\| \prod_{i=m}^{n-1} A(i) \right\| \leq \|A(n-1)\|_1 \|A(n-2)\|_1 \dots \|A(m)\|_1 \leq 1,$$

assim pelo Teorema 3.4,  $x^* = 0$  é uniformemente estável.

ii) De modo análogo ao caso anterior chegamos que

$$\|\Phi(n, m)\|_1 \leq (1 - v)^{n-1-m} = \frac{(1 - v)^{n-m}}{1 - v} = M\eta^{n-m}.$$

Portanto pelo Teorema 3.4,  $x^* = 0$  é uniformemente assintoticamente estável. ■

Quando o sistema (2.2) é autônomo, ou seja, quando estamos estudando (2.1) temos:

**Teorema 3.6.** *Dado o sistema autônomo (2.1) então:*

- i)  $x^* = 0$  *é assintoticamente estável se, e somente se,  $\rho(A) < 1$ .*
- ii)  $x^* = 0$  *é estável se, e somente se,  $\rho(A) \leq 1$ , e os autovalores unitários são semi-simples, ou seja, o bloco de Jordan correspondente ao mesmo é diagonal.*

**Demonstração:** Seja  $A = PJP^{-1}$ , onde  $J$  é uma matriz na forma canônica de Jordan, ou seja  $J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_r)$ .

i) De fato pelos resultados anteriores  $x^* = 0$  é estável se, e somente se  $\lim \|\Phi(n)\| = \lim \|A^n\| = 0$ . Como  $\|A^n\| = \|PJ^nP^{-1}\|$  podemos então considerar que  $x^* = 0$  ser estável equivale a  $\lim \|J^n\| = 0$ .

Passemos a analisar então  $J^n$ . É fato que

$$J^n = \text{diag}(J_1^n, J_2^n, \dots, J_r^n)$$

onde

$$J_i^n = \begin{bmatrix} \lambda_i^n & \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1} & \cdots & \binom{n}{s_i-1}\lambda_i^{n-s_i+1} \\ 0 & \lambda_i^n & \cdots & \binom{n}{s_i-2}\lambda_i^{n-s_i+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i^n \end{bmatrix}$$

sendo  $s_i$  a ordem do bloco de Jordan  $J_i$ .

Consideremos para nossa análise a norma  $l_\infty$ . Assim se  $|\lambda_i| > 1$ , então  $\lim \|J^n\|_\infty = \infty$ , o mesmo acontece caso  $|\lambda_i| = 1$  e  $s_i$  é maior que 1, pois

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \binom{n}{s_i-1} \lambda_i^{n-s_i+1} \right| = \infty.$$

Porém se  $|\lambda_i| < 1$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_i|^n n^l = 0,$$

logo  $\lim \|J^n\|_\infty = 0$ . Portanto  $x^* = 0$  é assintoticamente estável.

ii) Seja  $x^* = 0$  estável, isso equivale a existir uma constante positiva  $M$  tal que  $\|J^n\|_\infty \leq M$ . Pelo item anterior fica estabelecido que para  $|\lambda_i| > 1$ ,  $\lim \|J^n\|_\infty = \infty$ , ou seja  $x^* = 0$  não é estável. Para  $|\lambda_i| < 1$  verificamos que  $x^* = 0$  é assintoticamente estável, logo em particular é estável. Por fim, para  $|\lambda_i| = 1$ , se  $s_i$  é maior que 1,  $x^* = 0$



não é estável, porém se  $s_i = 1$  temos que

$$\|J^n\|_\infty = |\lambda_i^n| = 1,$$

portanto  $x^* = 0$  é estável. ■

Vamos agora abordar resultados sobre os casos em que alguns autovalores tem módulo menor que um e outros maiores, ou seja, alguns estão dentro do círculo unitário e outros estão fora. Para isso vamos definir alguns conjuntos:

**Definição 3.9.** *Dada  $A$  uma matriz constante de ordem  $k$  com autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , definimos:*

- i)  $\Delta s = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$  o conjunto dos autovalores de  $A$  com módulo menor que 1;*
- ii)  $\Delta u = \{\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \dots, \lambda_k\}$  o conjunto dos autovalores de  $A$  com módulo maior que 1;*
- iii)  $W^s$  o autoespaço gerado pelos autovetores de  $A$  contidos em  $\Delta s$ ;*
- iv)  $W^u$  o autoespaço gerado pelos autovetores de  $A$  contidos em  $\Delta u$ .*

**Teorema 3.7.** *(Teorema Subespaços Estáveis - Manifold) Seja  $A$  matriz constante de ordem  $k$  e  $x(n)$  uma solução de  $x(n+1) = Ax(n)$ :*

- i) Se  $x(0) \in W^s$ , então dado  $n$  natural temos que  $x(n) \in W^s$  e  $\lim x(n) = 0$ ;*
- ii) Se  $x(0) \in W^u$ , então dado  $n$  natural temos que  $x(n) \in W^u$  e  $\lim x(n) = +\infty$ .*

**Demonstração:** Inicialmente provemos que  $AE_\lambda = E_\lambda$ , onde  $E_\lambda$  é o autoespaço associado ao autovalor  $\lambda$ . De fato dado  $v \in AE_\lambda$ , temos que  $v = A\xi$ , onde  $\xi$  é um vetor de  $E_\lambda$ , assim é uma combinação

linear dos autovetores generalizados de  $A$ , associados a  $\lambda$ . Podemos escrever então que  $\xi = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_p v_p$ , sendo que os  $v_i$ 's são os autovetores generalizados associados a  $\lambda$ . Logo

$$v = Aa_1 v_1 + Aa_2 v_2 + \dots + Aa_p v_p = \lambda a_1 v_1 + \lambda a_2 v_2 + \dots + \lambda a_p v_p = \lambda \xi,$$

como  $\xi \in E_\lambda$ , então  $\lambda \xi \in E_\lambda$ , ou seja  $AE_\lambda \subset E_\lambda$ .

Tomemos agora  $v \in E_\lambda$ , como  $E_\lambda$  é o espaço que contém todas as combinações lineares dos autovetores generalizados associados a  $\lambda$ . Temos que  $\lambda v \in E_\lambda$ , porém  $\lambda v = Av$ , assim  $Av \in E_\lambda$ , ou seja  $E_\lambda \subset AE_\lambda$ . Portanto  $AE_\lambda = E_\lambda$ .

Passemos agora para a demonstração dos itens do teorema:

*i)* Seja  $x(n)$  solução da equação tal que  $x(0) \in W^s$ . Pela argumentação anterior temos que  $AW^s = W^s$ , e dado  $n$  natural  $x(n) = A^n x(0)$ , portanto  $x(n) \in W^s$ .

Sobre o limite de  $x(n)$ , temos que

$$x(0) = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_p v_p,$$

seja  $J = P^{-1}AP$  a forma canônica de Jordan de  $A$ , então

$$x(n) = A^n x(0) = PJ^n P^{-1} \sum_{i=1}^p a_i v_i,$$

e ainda podemos escrever  $J$  na forma:

$$J = \begin{bmatrix} J_s & 0 \\ 0 & J_u \end{bmatrix}$$

onde  $J_s$  é a matriz com os blocos de Jordan dos autovalores de  $A$  que pertencem a  $\Delta_s$ , e  $J_u$  a matriz com os blocos de Jordan dos autovalores que pertencem a  $\Delta_u$ . Assim os autovetores generalizados de  $J_s$  correspondentes a  $v_i$  são da forma  $\tilde{v}_i = P^{-1}v_i = (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{ir}, 0, \dots, 0)^T$ , logo

$$x(n) = PJ^n \sum_{i=1}^p a_i \tilde{v}_i = P \sum_{i=1}^p a_i \begin{bmatrix} J_s^n \tilde{v}_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

como  $J_s^n$  converge para o vetor nulo, temos que  $\lim x(n) = 0$ .

ii) Analogamente chegamos que  $J_u^n$  diverge para  $+\infty$ . ■

### 3.1.1 Implicações para Casos Particulares

Vamos abordar aqui a implicação dos resultados do último tópico para dois casos particulares de sistemas, os sistemas de ordem 2 e os periódicos.

**Caso 3.1. Sistema de Ordem 2:** O primeiro caso a ser estudado serão os sistemas de ordem 2 autônomos:

$$x(n+1) = Ax(n), \text{ sendo } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

O polinômio característico da matriz é dado por

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}),$$

ou ainda  $p(\lambda) = \lambda^2 - (\text{tr}A)\lambda + \det A$ . Para determinar os autovalores da matriz basta calcular as raízes do polinômio, obtemos então uma expressão semelhante a equação característica da equação de diferença (1.19) dada por

$$x(n+2) + p_1x(n+1) + p_2x(n) = 0,$$

a qual estudamos anteriormente na página 41.

Sobre o comportamento dessa equação de diferença temos um resultado que não apresentamos anteriormente:

**Lema 3.1.** *As condições*

$$1 + p_1 + p_2 > 0, \quad 1 - p_1 + p_2 > 0 \quad \text{e} \quad 1 - p_2 > 0,$$

são necessárias e suficientes para que o ponto de equilíbrio  $x^*$  de (1.19) seja assintoticamente estável.

**Demonstração:** Conforme vimos anteriormente o ponto de equilíbrio  $x^*$  da equação (1.19) será assintoticamente estável se, e somente se,  $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$ , onde os  $\lambda$ 's são as raízes características da equação. Assim:

$\Rightarrow$ ) Suponhamos que  $x^*$  seja assintoticamente estável, logo  $|\lambda_1| < 1$  e  $|\lambda_2| < 1$ . Da equação característica  $\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0$  temos que

$$\lambda_1 = \frac{-p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2} \text{ e } \lambda_2 = \frac{-p_1 - \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2}$$

existem então dois casos a considerar:

1. As raízes são reais, ou seja  $p_1^2 - 4p_2 \geq 0$ , logo

$$-2 + p_1 < \sqrt{p_1^2 - 4p_2} < 2 + p_1,$$

assim como

$$-2 + p_1 < -\sqrt{p_1^2 - 4p_2} < 2 + p_1,$$

da desigualdade

$$\sqrt{p_1^2 - 4p_2} < 2 + p_1$$

obtemos que  $1 + p_1 + p_2 > 0$ . Por outro lado de

$$-2 + p_1 < -\sqrt{p_1^2 - 4p_2}$$

chegamos que  $1 - p_1 + p_2 > 0$ . Por fim

$$2 + p_1 > \sqrt{p_1^2 - 4p_2} > 0 \text{ e } 2 - p_1 > \sqrt{p_1^2 - 4p_2} > 2 + p_1 > 0 \text{ e } 2 - p_1 > 0,$$

ou seja  $|p_1| < 2$ , assim

$$0 < \sqrt{p_1^2 - 4p_2} < 2\sqrt{1 - p_2},$$

logo  $1 - p_2 > 0$ . Portanto as três desigualdades são verificadas.

2. As raízes são complexas, ou seja  $p_1^2 - 4p_2 < 0$ , imediatamente verificamos que

$$-2\sqrt{p_2} < p_1 < 2\sqrt{p_2}.$$

Nesse caso teríamos que

$$\lambda_1 = -\frac{p_1}{2} + \frac{i\sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -\frac{p_1}{2} - \frac{i\sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2},$$

logo

$$|\lambda_1|^2 = \frac{p_1^2}{4} + \frac{4p_2}{4} - \frac{p_1^2}{4} = p_2,$$

como  $|\lambda_1| < 1$ , temos que  $1 - p_2 > 0$ .

Para verificar as outras desigualdades o processo não é apenas de manipulação algébrica, para isso vamos definir a função

$$f(x) = 1 + x - 2\sqrt{x}.$$

Note que  $f(0) = 1$  e  $f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ , como  $f'(1) = 0$  temos que  $x = 1$  é um ponto crítico da função, de fato  $f$  é decrescente para  $x \in (0, 1)$  então  $x = 1$  é um ponto de mínimo local, ou seja, para  $x \in (0, 1)$  temos  $f(x) > 1$ , conseqüentemente  $f(x) > 0$  nesse intervalo. De fato chegamos que  $1 - p_2 > 0$ , logo  $0 < p_2 < 1$ , assim  $1 + p_2 - 2\sqrt{p_2} > 0$ . Como  $-2\sqrt{p_2} < p_1$  então  $1 + p_2 + p_1 > 0$  e ainda  $p_1 < 2\sqrt{p_2}$  logo  $1 + p_2 - p_1 > 0$ . Portando as três desigualdades se verificam.

$\Leftrightarrow$  Supondo agora que as três desigualdades sejam válidas, através de manipulações algébricas análogas as anteriores chegamos que  $|\lambda_1| < 1$  e  $|\lambda_2| < 1$ . ■

Pelo Teorema 3.6 temos que  $x^* = 0$  é assintoticamente estável se, e somente se,  $\rho(A) < 1$  e pelo último Lema temos que isso acontece se  $1 + \text{tr}(A) + \det(A) > 0$ ,  $1 - \text{tr}(A) + \det(A) > 0$  e  $1 - \det(A) > 0$ . Ou  $|\text{tr}(A)| < 1 + \det(A) < 2$ , sendo assim, uma vez determinada a matriz  $A$  de ordem dois do sistema, é imediato verificar se  $x^* = 0$  é assintoticamente estável.

**Caso 3.2. Sistema Periódico:** *Tratemos agora do estudo da estabilidade do sistema periódico (2.6) dado por:*

$$x(n+1) = A(n)x(n),$$

sendo que existe um natural  $p$  tal que  $A(n+p) = A(n)$ , o qual foi abordado anteriormente na página 65 onde apresentamos alguns resultados sobre o mesmo. Porém usando o Teorema 3.6 chegamos ao seguinte resultado:

**Teorema 3.8.** *Dado o sistema (2.6), considere o ponto de equilíbrio  $x^* = 0$ , temos que:*

- i)  $x^* = 0$  será estável se, e somente se, os expoentes de Floquet tem módulo menor ou igual a 1;*
- ii)  $x^* = 0$  é assintoticamente estável se, e somente se, todos os expoentes de Floquet tem módulo menor que 1.*

**Demonstração:** Pela teoria apresentada na subseção 2.2.2 temos que existe uma matriz constante  $B$  e uma matriz  $p$ -periódica  $P$ , tais que  $\Phi(n, n_0) = P(n, n_0) B^{n-n_0}$ , sendo  $\Phi$  a matriz fundamental de (2.6). Note que o comportamento de  $\Phi$  é dado pelo comportamento de  $B^{n-n_0}$ , como definimos anteriormente os autovalores de  $B$  são os chamados expoentes de Floquet. Assim pelo Teorema 3.6,  $x^* = 0$  é assintoticamente estável se, e somente se,  $\rho(B) < 1$  e  $x^* = 0$  é estável se, e somente se,  $\rho(B) \leq 1$ . ■

## 3.2 ESTABILIDADE DE EQUAÇÕES DE DIFERENÇA NÃO-LINEARES

Nesta seção vamos tratar do método direto de *Liapunov*, que levanta dados qualitativos das soluções sem determiná-las explicitamente. Dada uma função  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^k$ , sendo  $G$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^k$ , consideremos então a equação de diferença não-linear

$$x(n+1) = f(x(n)) \tag{3.6}$$

e  $x^*$  ponto de equilíbrio de (3.6).

**Definição 3.10.** Dada uma função  $f$  como a de (3.6), uma função real  $V : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada **função Liapunov** em um subconjunto  $H$  de  $\mathbb{R}^k$  se as duas condições forem satisfeitas:

- i)  $V$  é contínua em  $H$ ;
- ii)  $\Delta V(x) = V(f(x)) - V(x) \leq 0$ , para todo  $x$  e  $f(x)$  contidos em  $H$ .

**Definição 3.11.** Seja  $B(x, \gamma) = \{y \in \mathbb{R}^k; \|y - x\| < \gamma\}$  a bola aberta de centro em  $x$  e raio  $\gamma$ . Dizemos que o valor real da função  $V$  é **positivo definido** em  $x^*$  se:

- i)  $V(x^*) = 0$ , e
- ii)  $V(x) > 0$  para todo  $x \in B(x^*, \gamma)$ , para algum  $\gamma > 0$ .

Podemos então enunciar o Teorema de Estabilidade de Liapunov:

**Teorema 3.9.** (Teorema de Estabilidade de Liapunov) Se  $V$  é uma função de Liapunov para (3.6) em uma vizinhança  $H$  do ponto de equilíbrio  $x^*$ , e  $V$  é positivo definido em relação à  $x^*$ , então  $x^*$  é estável. Se além disso  $\Delta V(x) < 0$  sempre que  $x$  e  $f(x)$  pertencem a  $H$  e  $x \neq x^*$ , então  $x^*$  é assintoticamente estável. Porém se  $G = H = \mathbb{R}^k$  e  $V(x) \rightarrow \infty$  quando  $\|x\| \rightarrow \infty$  então  $x^*$  é globalmente assintoticamente estável.

**Demonstração:** Tomemos  $\alpha_1 > 0$  tal que  $B(x^*, \alpha_1) \subset G \cap H$ . Como  $f$  é contínua existe  $\alpha_2 > 0$  tal que se  $x \in B(x^*, \alpha_2)$  então  $f(x) \in B(x^*, \alpha_1)$ . Dado  $0 < \varepsilon \leq \alpha_2$ , definimos

$$\Psi(\varepsilon) = \min\{V(x); \varepsilon \leq \|x - x^*\| \leq \alpha_1\},$$

pelo Teorema do Valor Médio, existe  $0 < \delta < \varepsilon$  tal que  $V(x) < \Psi(\varepsilon)$  sempre que

$$\|x - x^*\| < \delta.$$

Note que se  $x_0 \in B(x^*, \delta)$  então  $x(n) \in B(x^*, \varepsilon)$  para todo  $n \geq 0$ , pois caso contrário existiria  $x_0 \in B(x^*, \delta)$  e um inteiro positivo  $m$ , tais que  $x(r) \in B(x^*, \varepsilon)$  para  $1 \leq r \leq m$  e  $x(m+1) \notin B(x^*, \varepsilon)$ . Porém  $x(m) \in B(x^*, \varepsilon) \subset B(x^*, \alpha_2)$ , assim  $x(m+1) \in B(x^*, \alpha_1)$  logo  $V(x(m+1)) \geq \Psi(\varepsilon)$ . Mas por definição temos que  $\Delta V(x) \leq 0$  para todo  $x$  e  $f(x)$  em  $H$ , assim  $V(x(m+1)) \leq \dots \leq V(x_0) < \Psi(\varepsilon)$ , chegamos então a um absurdo. Logo se  $x_0 \in B(x^*, \delta)$  então  $x(n) \in B(x^*, \varepsilon)$  para todo  $n \geq 0$ , portanto  $x^*$  é estável.

Tomemos  $x_0 \in B(x^*, \delta)$ , então  $x(n) \in B(x^*, \varepsilon)$  para todo  $n \geq 0$ . Se a sequência  $x(n)$  não converge para  $x^*$ , então existe uma subsequência  $x(n_i)$  que converge para  $y \in \mathbb{R}^k$ . Seja  $E \subset B(x^*, \alpha_1)$  uma vizinhança aberta de  $y$  que não contém  $x^*$ . Definimos então em  $E$  a função

$$h(x) = \frac{V(f(x))}{V(x)},$$

note que  $h$  é bem definida e contínua em  $E$ , sendo que  $h(x) < 1$  para todo  $x \in E$ . Tomemos agora  $\eta \in (h(y), 1)$ , então existe  $\alpha > 0$  tal que, se  $x \in B(y, \alpha)$  então  $h(x) \leq \eta$ , assim para  $n_i$  suficientemente grande temos que

$$V(x(n_i)) \leq \eta V(x(n_i - 1)) \leq \eta^2 V(x(n_i - 2)) \leq \dots \leq \eta^{n_i} V(x_0).$$

Logo  $\lim_{n_i \rightarrow \infty} V(x(n_i)) = 0$ . Por outro lado temos que  $x(n_i) \rightarrow y$ , logo

$$\lim_{n_i \rightarrow \infty} V(x(n_i)) = V(y)$$

assim  $V(y) = 0$ . Portanto  $y = x^*$ , ou seja toda subsequência de  $x(n)$  converge para  $x^*$ , logo  $x(n)$  converge para  $x^*$  e o mesmo é assintoticamente estável.

Para finalizar a demonstração do teorema suponhamos que  $G = H = \mathbb{R}^k$  e  $V(x) \rightarrow \infty$  quando  $\|x\| \rightarrow \infty$ . Vamos provar então que toda solução  $x(n)$  é limitada independente da condição inicial, provando isso e a partir da argumentação acima concluímos que  $x^*$  é



globalmente assintoticamente estável. Suponhamos que existe uma solução  $x(n)$  ilimitada, então existe uma subsequência  $x(n_i) \rightarrow \infty$  quando  $n_i \rightarrow \infty$ . Assim teríamos que

$$V(x(n_i)) \rightarrow \infty$$

quando  $n_i \rightarrow \infty$ , o que é uma contradição, pois  $G = H = \mathbb{R}^k$ , assim  $V(x_0) > V(x(n_i))$  para todo  $i$ . Portanto  $x^*$  é globalmente assintoticamente estável. ■

**Teorema 3.10.** *Se  $V$  é uma função de Liapunov sobre o conjunto*

$$A_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^k; \|x\| > \alpha\}$$

*para algum  $\alpha > 0$ , e é válido que  $V(x) \rightarrow \infty$  quando  $\|x\| \rightarrow \infty$ , então toda solução de (3.6) é limitada.*

**Demonstração:** Suponhamos que existe uma solução  $x(n)$  ilimitada, assim há uma subsequência  $x(n_i)$  de  $x(n)$  tal que  $x(n_i) \rightarrow \infty$ . De fato existe um inteiro positivo  $m$  tal que  $\|x(n_i)\| > \alpha$  para todo  $i \geq m$  e um  $\alpha > 0$ , então  $V$  é uma função de Liapunov sobre cada um dos pontos de  $x(n_i)$ ,  $i \geq m$ . Logo

$$\lim_{n_i \rightarrow \infty} V(x(n_i)) = \infty.$$

Por outro lado temos que  $V(x_0) > V(x(n_i))$  para todo  $i \geq m$ , chegamos então a uma contradição. Observando agora  $x(n_i)$  para  $0 \leq i \leq m$  temos que esses termos não pertencem ao conjunto  $A_\alpha$ , assim para eles  $\|x(n_i)\| \leq \alpha$ , logo são termos finitos, sendo assim  $x(n_i)$  é limitada e portanto  $x(n)$  é limitada. ■

**Definição 3.12.** (LIMA, 2006) *Seja  $G$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^k$ , então:*

- i)  $x \in \mathbb{R}^k$  é um **ponto aderente** de  $G$  se existe uma seqüência  $x(i)$  contida em  $G$  que converge para  $x$ .*

ii) O conjunto dos pontos aderentes de  $G$  é chamado **fecho de  $G$**  e denotado por  $\overline{G}$ .

**Definição 3.13.** Considerando a equação (3.6) e o ponto  $x_0 = x(0)$  definimos que:

- i) Sua **órbita positiva**  $O^+(x_0)$  é dada por  $O^+(x_0) = \{x(n, 0, x_0); n \in \mathbb{Z}^+\}$ . Como lidamos somente com a órbita positiva nesse trabalho vamos denotar a mesma somente por  $O(x_0)$ ;
- ii) O **conjunto limite**  $\Omega(x_0)$  de  $x_0$  é o conjunto de todos os pontos que são limite de  $x_0$ , ou seja  $\Omega(x_0) = \{y \in \mathbb{R}^k; x(n_i) \rightarrow y, \text{ para alguma sequência } x(n_i)\}$ .
- iii) Um conjunto  $A$  é **positivamente invariante** se  $O(x_0) \subset A$  para todo  $x_0 \in A$ .

Note que de acordo com essa definição temos que  $O(x_0)$  e  $\Omega(x_0)$  são positivamente invariantes.

**Teorema 3.11.** Seja  $x_0 \in \mathbb{R}^k$  e  $\Omega(x_0)$  seu conjunto limite, onde  $x(n)$  é uma solução de (3.6). Então é válido que:

- i)  $\Omega(x_0) = \bigcap_{i=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=i}^{\infty} (f^n(x_0))} = \bigcap_{i=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=i}^{\infty} (x(n))}$
- ii) Dado  $j$  um número inteiro positivo, se  $f^j(x_0) = y_0$ , então  $\Omega(y_0) = \Omega(x_0)$ .
- iii)  $\Omega(x_0)$  é fechado e invariante.
- iv) Se a órbita  $O(x_0)$  é limitada então  $\Omega(x_0)$  é não vazio e limitado.

**Demonstração:** Apresentaremos aqui a demonstração dos itens (i) e (iii).

*i)* Seja  $y \in \Omega(x_0)$ . Então  $f^{n_i}(x_0) \rightarrow y$  quando  $n_i \rightarrow \infty$ , e para cada  $i$ , existe um inteiro positivo  $N_i$  tal que

$$f^{n_j}(x_0) \in \bigcup_{i=0}^{\infty} (f^i(x_0))$$

para todo  $n_j \geq N_i$ . Assim  $y \in \bigcup_{n=i}^{\infty} (x(n))$  para todo  $N$  e consequentemente

$$y \in \bigcap_{i=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=i}^{\infty} (f^n(x_0))},$$

ou seja, provamos que é válida uma inclusão entre os conjuntos. Tomemos agora

$$y \in \bigcap_{i=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=i}^{\infty} (f^n(x_0))},$$

então para cada  $i$ ,  $y \in \bigcup_{n=i}^{\infty} (f^n(x_0))$ , assim existe  $f^{n_i}(x_0) \in B_y(x_0)$  para cada  $i$ , com  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$  e  $n_i \rightarrow \infty$  quando  $i \rightarrow \infty$ . Logo  $f^{n_i}(x_0) \rightarrow y$  quando  $n_N \rightarrow \infty$  assim  $y \in \Omega(x_0)$ .

*iii)* Pelo item *(i)* temos que

$$\Omega(x_0) = \bigcap_{i=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=i}^{\infty} (f^n(x_0))},$$

de fato  $\overline{\bigcup_{n=i}^{\infty} (f^n(x_0))}$  é fechado, pois é um fecho de um conjunto, e ainda é fato que a intersecção de conjuntos fechados é fechado. Logo  $\Omega(x_0)$  é fechado.

Agora seja  $y \in \Omega(x_0)$ , então  $f^{n_i}(x_0) \rightarrow y$ , como  $f$  é continua temos que

$$f^{n_i+1}(x_0) \rightarrow f(y),$$

assim  $f(y) \in \Omega(x_0)$ , logo  $\Omega(x_0)$  é invariante. ■

**Definição 3.14.** Dada  $V$  uma função de Liapunov positiva em um subconjunto  $G \subset \mathbb{R}^k$ , tomemos  $E = \{x \in \overline{G}; \Delta V = 0\}$  definimos então o **subconjunto maximal invariante**  $M$  de  $E$  como sendo a união de todos os subconjuntos invariantes de  $E$ .

**Teorema 3.12.** (*Princípio de Invariância de LaSalle*) *Seja  $V$  uma função de Liapunov positiva definida em  $G \subset \mathbb{R}^k$  para (3.6). Então para cada solução limitada  $x(n)$  de (3.6) contida em  $G$  para todo  $n$  inteiro não negativo, existe um número  $c$  tal que  $x(n) \rightarrow M \cap V^{-1}(c)$ .*

**Demonstração:** Seja  $x(n)$  uma solução limitada de (3.6) contida em  $G$  e tal que  $x(0) = x_0$ . Pelo Teorema 3.11,  $\Omega(x_0) \neq \emptyset$  além disso,  $\Omega(x_0) \subset G$ , assim se  $y \in \Omega(x_0)$  então  $x(n_i) \rightarrow y$  para alguma subsequência  $n_i \in \mathbb{Z}^+$ . Como  $V(x(n))$  é uma função não-crescente e limitada inferiormente temos que

$$\lim V(x(n)) = c$$

para algum número  $c$ . De fato  $V$  é contínua, assim

$$V(x(n_i)) \rightarrow V(y),$$

então  $V(y) = c$ . Logo  $V(\Omega(x_0)) = c$ , e conseqüentemente  $\Omega(x_0) \subset V^{-1}(c)$ .

Por outro lado temos que  $\Delta V(y) = 0$  para todo  $y \in \Omega(x_0)$ , logo  $\Omega(x_0) \subset E$ , porém  $\Omega(x_0)$  é invariante, ou seja  $\Omega(x_0) \subset M$ , então  $\Omega(x_0) \subset M \cap V^{-1}(c)$ , como  $x(n) \rightarrow \Omega(x_0)$  concluímos que

$$x(n) \rightarrow M \cap V^{-1}(c).$$

■

O teorema a seguir trata da estabilidade, ou melhor da instabilidade do ponto de equilíbrio  $x^* = 0$ .

**Teorema 3.13.** *Seja  $\Delta V$  positivo e definido em uma vizinhança da origem, se existe uma seqüência  $a_i \rightarrow 0$  tal que  $V(a_i) > 0$ , então o ponto de equilíbrio  $x^* = 0$  de (3.6) é instável.*

**Demonstração:** Seja  $\Delta V > 0$  para todo  $x \in B(0, \eta) = B(\eta)$  sendo  $x$  não nulo,  $\eta > 0$  e  $V(0) = 0$ . Assumimos inicialmente que

$x^* = 0$  é estável, assim para  $\varepsilon < \eta$  existiria  $\delta < \varepsilon$  tal que, se  $\|x_0\| < \delta$  então  $\|x(n, 0, x_0)\| < \varepsilon$  para todo  $n$  inteiro positivo.

Como  $a_i \rightarrow 0$ , tomemos  $x_0 = a_j$  para algum  $j$  com  $\Delta V(x_0) > 0$  e  $\|x_0\| < \delta$ , assim o fecho da órbita  $\overline{O(x_0)} \subset \overline{B(\varepsilon)} \subset B(\eta)$  de  $x_0$  é fechado e limitado, ou seja, compacto. Assim  $V(x(n))$  é compacto, pois tem domínio compacto, ou seja em particular  $V(x(n))$  é limitado superiormente. Além disso  $V(x(n))$  é crescente, logo  $V(x(n)) \rightarrow c$ , para algum  $c$ . Pela prova do teorema anterior verificamos que  $x(n) \rightarrow 0$ , sendo assim

$$0 < V(x_0) < \lim V(x(n)) = V(0) = 0,$$

temos então uma função crescente, positiva convergindo para zero, ou seja chegamos a um absurdo, portanto  $x^* = 0$  é instável.

O mesmo é válido para o caso em que  $\Delta V$  é identicamente negativo e  $V(a_i) < 0$ . ■

Trataremos agora de um resultado a cerca de sistemas de equações de diferença autônomos, mas especificamente consideremos o sistema (2.1) :

$$x(n+1) = Ax(n)$$

onde  $A$  é uma matriz não singular de ordem  $k$ .

**Definição 3.15.** *Uma matriz  $A$  de ordem  $k$  é **positiva** se  $V(x) = x^T Ax$  é positivo.*

**Definição 3.16.** *Seja  $B$  uma matriz positiva, definimos então  $V(x) = x^T Bx$  como a função de Liapunov de (2.1).*

Nesse caso temos que

$$\begin{aligned} \Delta V(x(n)) &= V(Ax(n)) - V(x(n)) \\ &= x^T(n) A^T B A x(n) - x^T(n) B x(n) \\ &= x^T(n) (A^T B A - B) x(n). \end{aligned}$$

Assim  $\Delta V(x(n)) < 0$  se, e somente se,

$$A^T B A - B = -C \quad (3.7)$$

onde  $C$  é uma matriz positiva.

**Teorema 3.14.** *O ponto de equilíbrio  $x^* = 0$  de (2.1) é assintoticamente estável se, e somente se, para cada matriz simétrica positiva  $C$ , (3.7) tem uma única solução  $B$  positiva e simétrica.*

**Demonstração:**  $\Rightarrow$ ) Seja  $x^* = 0$  assintoticamente estável e  $C$  uma matriz simétrica positiva. Consideremos a equação (3.7) e multipliquemos a mesma por  $(A^T)^r$  pela esquerda e  $A^r$  pela direita, assim obtemos

$$(A^T)^{r+1} B A^{r+1} - (A^T)^r B A^r = - (A^T)^r C A^r,$$

ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^n \left[ (A^T)^{r+1} B A^{r+1} - (A^T)^r B A^r \right] = - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^n (A^T)^r C A^r$$

logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ B - (A^T)^{r+1} B A^{r+1} \right] = \sum_{r=0}^{\infty} (A^T)^r C A^r$$

Como  $x^* = 0$  é assintoticamente estável pelo Teorema 3.6  $\rho(A) < 1$ , conseqüentemente  $\rho(A^T) < 1$ , logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A^T)^{r+1} B A^{r+1} = 0.$$

Assim

$$B = \sum_{r=0}^{\infty} (A^T)^r C A^r,$$

de fato  $B$  assim definido é a única solução de (3.7).

$\Leftarrow$ ) Suponhamos que exista uma única solução  $B$  simétrica e positiva de (3.7). Tomando  $V(x) = x^T B x$  temos que  $\Delta V(x(n)) <$

0, pelo Teorema de Estabilidade de Liapunov temos que  $x^* = 0$  é assintoticamente estável. ■

Desse teorema, juntamente com o Teorema 3.6 concluímos o seguinte resultado.

**Corolário 3.3.** *Dado o sistema (2.1), se  $\rho(A) > 1$ , então existe uma matriz simétrica  $B$  não positiva tal que (3.7) é válida para alguma matriz  $C$  positiva.*

### 3.3 ESTABILIDADE DE EQ. DE DIFERENÇA DE ORDEM SUPERIOR

Já estudamos a estabilidade de sistemas de equações de diferença, e vimos anteriormente que é possível transformar uma equação escalar de ordem superior em um sistema de equações. Então teoricamente temos argumentos suficientes para estudar tanto equações escalares e lineares de ordem superior quanto sistemas, porém na prática nem sempre é viável fazer a transformação de equações escalares para sistemas, por isso dedicamos esse tópico especificamente ao estudo de equações escalares de ordem superior.

#### 3.3.1 Equações Lineares

Consideremos a equação de diferença linear autônoma de ordem  $k$  (1.15) dada por:

$$x(n+k) + p_1x(n+k-1) + p_2x(n+k-2) + \dots + p_kx(n) = 0$$

onde os  $p_i$ 's são números reais.

De fato temos resultados que nos permitem determinar o comportamento da solução dessa equação a partir dos valores das raízes características do polinômio

$$p(\lambda) = \lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + \dots + p_k.$$

Sendo que  $x^* = 0$  é assintoticamente estável se, e somente se,  $|\lambda| < 1$  para todas as raízes da equação, é estável se, e somente se,  $|\lambda| \leq 1$  para todas as raízes de  $p(\lambda)$ , sendo que as raízes características com  $|\lambda| = 1$  são simples, ou seja, não se repetem. Se houver uma raiz repetida com  $|\lambda| = 1$  ou  $|\lambda| > 1$  para alguma raiz característica, então  $x^* = 0$  é instável.

O que vamos abordar agora é um método que fornece as condições necessárias e suficientes para que as raízes características  $\lambda$ 's estejam dentro do disco unitário, tal método é conhecido como critério de Schur-Cohn.

**Definição 3.17.** As *inners* (interiores) de  $B = (b_{ij})$  são todas as matrizes obtidas omitindo sucessivamente a primeira e última linha, assim como a primeira e última coluna da matriz  $B$  sendo que a própria matriz  $B$  é considerada uma *inners* dela mesma.

**Definição 3.18.** Dada uma matriz  $B$  a mesma é dita *positive innerwise* (positiva interiormente) se os determinantes de todas as suas interiores são positivos.

**Teorema 3.15.** (Critério de Schur – Cohn) As raízes do polinômio característico

$$p(\lambda) = \lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + \dots + p_k$$

estão dentro do disco unitário se e somente se:

i)  $p(1) > 0$ ,

ii)  $(-1)^k p(-1) > 0$ ,

iii) As matrizes  $(k-1) \times (k-1)$

$$B_{k-1}^{\pm} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{k-3} & p_{k-4} & \cdots & 0 \\ p_{k-2} & p_{k-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & p_k \\ 0 & 0 & \cdots & p_k & p_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & p_k & \cdots & p_4 & p_3 \\ p_k & p_{k-1} & \cdots & p_3 & p_2 \end{bmatrix}$$



são positivas interiormente.

O critério de Schour-Cohn nos permite determinar condições necessárias e suficientes para estabilidade de equações de diferença de cada ordem. Por exemplo, o ponto  $x^* = 0$  será assintoticamente estável para a equação de diferença (1.19)

$$x(n+2) + p_1x(n+1) + p_2x(n) = 0$$

se, e somente se,  $|p_1| < 1 + p_2 < 2$  que equivale a afirmação do Lema 3.1.

Para a equação

$$x(n+3) + p_1x(n+2) + p_2x(n+1) + p_3x(n) = 0$$

$x^* = 0$  será assintoticamente estável se, e somente se,  $|p_1 + p_3| < 1 + p_2$  e  $|p_2 - p_1p_3| < 1 - p_3^2$ .

Porém quanto maior a ordem da equação, mais complicados são os cálculos envolvidos na determinação das condições explícitas. (ELAYDI, 2000) apresenta uma técnica utilizada por Levin e May, para determinar a estabilidade de equações do tipo

$$x(n+1) - x(n) + qx(n-k) = 0, \quad (3.8)$$

**Teorema 3.16.** *Dada a equação de diferença (3.8),  $x^* = 0$  é assintoticamente estável se, e somente se,*

$$0 < q < 2 \cos\left(\frac{k\pi}{2k+1}\right).$$

**Demonstração:** A demonstração desse teorema necessita de vários resultados auxiliares, por isso não iremos abordá-la nesse trabalho. A mesma está feita em um dos apêndices de (ELAYDI, 2000)

■

Mais adiante em seu texto (ELAYDI, 2000) aborda também a condição apresentada por Clark para estabilidade do ponto de equilíbrio  $x^* = 0$  da equação de diferença

$$x(n+k) + px(n+k-1) + qx(n) = 0,$$

o qual é assintoticamente estável se  $|p| + |q| < 1$  e instável se  $|p| - |q| > 1$ . Porém (ELAYDI, 2000) vai além dessa abordagem e estende o Teorema de Clark para a equação geral (1.15) :

**Teorema 3.17.** *O ponto de equilíbrio  $x^* = 0$  de (1.15) é assintoticamente estável se  $\sum_{i=1}^k |p_i| < 1$ .*

Para facilitar a demonstração desse teorema o autor utiliza o Teorema de Gerschgorin:

**Teorema 3.18.** *(Teorema de Gerschgorin) Seja  $A$  uma matriz real ou complexa de ordem  $k$  e  $S_i$  o disco no plano complexo com centro em  $a_{ii}$  e raio  $r_i = \sum_{j=1, j \neq i}^k |a_{ij}|$ . Então todos os autovalores de  $A$  "caem" em  $S = \bigcup_{i=1}^k S_i$ .*

Voltemos então para demonstração do Teorema 3.17.

**Demonstração:** Transformando a equação escalar (1.15) no sistema  $x(n+1) = Ax(n)$  onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -p_k & -p_{k-1} & -p_{k-2} & \cdots & -p_1 \end{bmatrix}$$

O teorema de Gerschgorin nos garante que todos os autovalores de  $A$  estão em  $S_1 \cup S_2$ , onde  $S_1$  é o disco unitário centrado em zero e  $S_2$  é o disco com centro em  $-p_1$  e raio

$$r = \sum_{i=2}^k |p_i|.$$

Por hipótese  $\sum_{i=1}^k |p_i| < 1$ , ou seja,  $r < 1$  isso implica que  $|\lambda| \leq 1$ . Suponhamos que  $|\lambda_i| = 1$  para algum dos autovalores de  $A$ , como

$$p(\lambda_i) = \lambda_i^k + p_1 \lambda_i^{k-1} + \dots + p_k = 0,$$

então

$$1 = |\lambda_i^k| \leq |-p_1 \lambda_i^{k-1}| + |-p_2 \lambda_i^{k-2}| + \dots + |-p_k| = \sum_{i=1}^k |p_i| < 1,$$

absurdo, ou seja  $|\lambda_i| < 1$  para todo  $i = 1, \dots, k$ . De fato  $|\lambda| < 1$  para todas as raízes características de (1.15) é condição suficiente para que  $x^* = 0$  ser assintoticamente estável. ■

**Teorema 3.19.** *O ponto de equilíbrio  $x^* = 0$  de (1.15) é instável se  $|p_1| - \sum_{i=2}^k |p_i| > 1$ .*

Para provar esse teorema vamos utilizar além do teorema de Gerschgorin um segundo resultado auxiliar:

**Lema 3.2.** *Seja  $S_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , discos de Gerschgorin de uma matriz  $A$  de ordem  $k$ . Se para algum  $1 \leq m \leq k$ ,*

$$\left( \bigcup_{i=1}^m S_i \right) \cap \left( \bigcup_{i=m+1}^k S_i \right) = \emptyset,$$

*então existem exatamente  $m$  autovalores (contando as multiplicidades) de  $A$  que "caem" em  $\bigcup_{i=1}^m S_i$  e  $k - m$  autovalores que caem em  $\bigcup_{i=m+1}^k S_i$ .*

Voltemos então para a demonstração do resultado que é nosso foco.

**Demonstração:** Consideremos a equação (1.15) na forma do sistema  $x(n+1) = Ax(n)$  como na demonstração do resultado anterior. Todos os autovalores caem em  $S_1 \cup S_2$  que são os mesmos discos do caso anterior. Por hipótese temos que

$$|p_1| - \sum_{i=2}^k |p_i| > 1$$

assim

$$|p_1| > 1 + \sum_{i=2}^k |p_i|$$

sendo que  $r = \sum_{i=1}^k |p_i|$  é o raio do disco  $S_2$  que tem centro em  $-p_1$ , logo  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ . Pelo último lema  $S_2$  contém um autolavor  $\lambda_j$  de  $A$ , logo  $|\lambda_j| > 1$ , portanto  $x^* = 0$  é instável ■

Citaremos agora alguns resultados sobre critérios explícitos para determinar a estabilidade de tipos específicos de equações de diferença:

**Caso 3.3.** *A equação de diferença*

$$x(n+1) - ax(n) + bx(n-k) = 0,$$

onde  $a$  é um número real não negativo,  $b$  um número real arbitrário,  $n$  e  $k$  inteiros positivos. O ponto  $x^* = 0$  é assintoticamente estável se, e somente se,  $|a| < \frac{k+1}{k}$ , e:

- i)  $|a| - 1 < b < (a^2 + 1 - 2|a|\cos\phi)^{\frac{1}{2}}$  para  $k$  ímpar, ou  
 ii)  $|b-a| < 1$  e  $|b| < (a^2 + 1 - 2|a|\cos\phi)^{\frac{1}{2}}$  para  $k$  par, onde  $\phi$  é a solução em  $\left(0, \frac{\pi}{k+1}\right)$  de

$$\frac{\sin(k\theta)}{\sin(k+1)\theta} = \frac{1}{|a|}.$$

**Caso 3.4.** *Consideremos a equação de diferença*

$$x(n+k) + ax(n) + bx(n-l) = 0,$$

onde  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $k$  e  $l$  são inteiros maiores ou iguais a um. De acordo com Elayde (ELAYDI, 2000) tal equação é abordada por Danna sendo que:

- i) Se  $l \geq 1$  e  $k > 1$  são inteiros ímpares e primos entre si. Então  $x^* = 0$  será assintoticamente estável se, e somente se

$$|a| < 1 \quad e \quad |a| - 1 < b \min_{\theta \in S} (1 + a^2 - 2|a|\cos k\theta)^{\frac{1}{2}}$$

onde  $S$  é o conjunto de soluções de

$$\frac{1}{|a|} = \frac{\sin l\theta}{\sin(l+k)\theta}$$

no intervalo  $(0, \pi)$ .

ii) Se  $l$  é um inteiro par e  $k > 1$  um inteiro ímpar, onde  $l$  e  $k$  são primos entre si. Então  $x^* = 0$  é assintoticamente estável se, e somente se,

$$|a| - 1 < b \min_{\theta \in S} (1 + a^2 - 2|a| \cos k\theta)^{\frac{1}{2}} \quad e \quad -1 < a < 0$$

e

$$a - 1 < -b \min_{\theta \in S} (1 + a^2 - 2a \cos k\theta)^{\frac{1}{2}}$$

para  $0 < a < 1$ , onde  $S$  é o mesmo conjunto do item anterior.

iii) Se  $l \geq 1$  é um inteiro ímpar e  $k$  um inteiro par, com  $l$  e  $k$  primos entre si. Então  $x^* = 0$  é assintoticamente estável se, e somente se,  $|b| < 1 - |a|$  para  $-1 < a < 0$  e  $|b| \min_{\theta \in S^*} (1 + a^2 + 2a \cos k\theta)^{\frac{1}{2}}$  para  $0 < a < 1$ , onde  $S^*$  é o conjunto das soluções de

$$-\frac{1}{a} = \frac{\sin l\theta}{\sin(l+k)\theta}$$

no intervalo  $(0, \pi)$ .

Finalizamos aqui nossa abordagem acerca de resultados sobre estabilidade de soluções de equações de diferença. Os demais resultados apresentados em livros introdutórios ao estudo de equações de diferença não cabem em nossa proposta de estudo, uma vez que para compreender os mesmos são necessários conceitos matemáticos avançados que vão além do curso de graduação em questão.



## 4 APLICAÇÕES

Neste capítulo iremos abordar algumas aplicações de equações de diferença em alguns campos do conhecimento como biologia, economia e física, utilizando os resultados abordados nos capítulos anteriores para estimar o comportamento dos modelos a longo prazo.

### 4.1 UM MODELO SIMPLES DA OSCILAÇÃO DE PREÇOS E DEMANDAS

Geralmente acontecem oscilações na produção e preço de um determinado produto ao longo do tempo, por exemplo (MICKKENS, 1990) aborda o comércio do milho para ilustrar essa situação. De acordo com o autor os produtores de milho determinam o tamanho de sua plantação de acordo com o preço atual do mesmo. Suponhamos então que no ano  $n_0$  o preço do milho esteja em alta, então os produtores tendem a cultivar grandes plantações, sendo assim no ano seguinte,  $n_0 + 1$ , essa produção de milho será colhida e levada ao mercado, e nesse caso pode ocorrer da oferta ser superior a demanda, conseqüentemente os preços do milho cairiam e os produtores reduziriam suas plantações. Assim a safra do ano  $n_0 + 2$  seria inferior a do ano anterior, e a demanda dessa vez poderia exceder a oferta, logo o preço do milho voltaria a subir e os agricultores aumentariam suas plantações novamente, o que pode fazer com que a oferta do ano  $n_0 + 3$  exceda novamente a demanda, iniciando assim um novo ciclo.

Vamos modelar essa situação de um modo geral, sem considerar o milho como o produto a ser comercializado. Consideremos então três funções,  $D(n)$  a demanda do produto no período  $n$ ,  $S(n)$  o quantidade de produtos fornecidos no período  $n$  e  $p(n)$  o preço unitário do produto no período  $n$ . Dependendo do produto estudado o período  $n$  pode ser

medido em meses, anos ou semestres, de acordo com o que for mais adequado para cada caso, por exemplo no caso do milho, considerando safras anuais, o mais adequado é tomar  $n$  em anos.

Assim como (MICKKENS, 1990), para construir o modelo faremos três suposições:

1. A demanda do produto em um período  $n$  depende linearmente do preço do mesmo nesse período, ou seja

$$D(n) = d_0 - ap(n),$$

onde  $d_0$  e  $a$  são constantes positivas. A constante  $a$  traduz a sensibilidade dos consumidores ao preço, por isso aparece com o sinal negativo, pois de um modo geral quanto maior o preço menor a atração do consumidor pelo produto. Independente do preço, existe uma demanda finita para o produto que é dada por  $d_0$ .

2. A quantidade de produto fornecida em um período  $n$  também depende linearmente do preço do mesmo no período anterior  $n-1$ , assim

$$S(n) = -s_0 + bp(n-1),$$

onde  $b$  e  $s_0$  são constantes positivas. Nesse caso  $b$  representa a curva de oferta, e tem sinal positivo pois quanto maior o preço no período anterior maior será a produção no período em questão. E  $s_0$  por sua vez indica os custos com a produção, por isso afeta negativamente a oferta;

3. Durante todo o período o preço do produto é determinado pela oferta disponível, sendo que o mesmo é estipulado supondo a situação ideal onde a demanda e oferta são iguais, ou seja todo o estoque será vendido. Neste caso temos que o preço é determinado a partir da equação  $D(n) = S(n)$ .

Uma vez que os produção tem custos, existe um preço limite  $\tilde{p}$  abaixo do qual os produtores não apresentarão nenhuma oferta. O preço que deixa o sistema em equilíbrio é o preço de interseção das curvas de demanda e oferta.



Aplicando à condição  $D(n) = S(n)$  as equações determinadas nos outros itens obtemos que

$$d_0 - ap(n) = -s_0 + bp(n-1),$$

podemos escrever então

$$p(n+1) = -\frac{b}{a}p(n) + \frac{s_0 + d_0}{a},$$

uma equação de diferença linear, de primeira ordem com coeficientes constantes. Para facilitar escreveremos como

$$p(n+1) = Ap(n) + B.$$

É importante ressaltar que  $A < 0$ , pois  $A = -\frac{b}{a}$ , assim a solução da equação é dada por

$$p(n) = A^n p_0 + B \left[ \frac{A^n - 1}{A - 1} \right]$$

onde  $p_0 = p(0)$  é a condição inicial do problema. Além disso o ponto de equilíbrio  $p^*$  da equação é tal que  $Ap^* + B = p^*$ , assim  $p^* = \frac{B}{1-A}$ .

Observando a solução da equação concluímos que:

*i)* Se  $A = -1$ , ou seja a curva de demanda é igual a curva de oferta, então  $p(n)$  oscila entre  $-p_0 + B$  e  $p_0$  assim  $p^*$  é ponto de equilíbrio estável;

*ii)* Se  $-1 < A < 0$ , ou seja a curva de demanda é maior que a curva de oferta, então o preço oscila, porém  $p(n) \rightarrow p^*$ , assim  $p^*$  é ponto de equilíbrio assintoticamente estável;

*iii)* Se  $A < -1$ , ou seja a curva de oferta é maior que a curva de demanda, nesse caso  $p(n)$  diverge e temos que  $p^*$  é ponto de equilíbrio instável.

Aproveitemos essa aplicação para citar um recurso gráfico que podemos utilizar para estudar a estabilidade de pontos de equilíbrio, que não abordamos no primeiro capítulo. Esse recurso é conhecido como

"Teia de Aranha" e é feito a partir do gráfico da função que determina a equação de diferença.

Primeiramente vamos entender como funciona a "Teia de Aranha" para a equação geral  $x(n+1) = f(x(n))$ . Inicialmente faz-se o esboço do gráfico de  $f$  no plano  $(x(n), x(n+1))$ , de fato o ponto de equilíbrio dessa equação é dado pela intersecção de  $f$  com a reta  $x(n+1) = x(n)$ . Partindo da condição inicial  $x(0) = x_0$  podemos determinar  $x(1)$  traçando uma reta vertical perpendicular ao eixo  $x(n)$  que passa por  $x(0)$ , e  $x(1)$  será o ponto de intersecção dessa reta com o gráfico de  $f$ . Feito isso para determinar  $x(2)$ , partindo do ponto  $(x_0, x(1))$  traçamos um segmento de reta horizontal até interceptar a reta  $x(n+1) = x(n)$  no ponto  $(x(1), x(1))$ . Partindo então desse novo ponto traçamos novamente um segmento perpendicular até interceptar o gráfico de  $f$  no ponto  $(x(1), x(2))$ . Repetindo então o mesmo processo é possível determinar qualquer termo da sequência  $x(n)$  solução da equação de diferença.

Uma vez feito o diagrama da "Teia de Aranha" para observar a estabilidade de  $x^*$ , basta observar se o diagrama se aproxima ou se afasta de  $x^*$ . Se os pontos do diagrama estão cada vez mais próximos de  $x^*$  então o mesmo é ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Se os pontos do diagrama não se aproximam de  $x^*$  porém, mantém uma distância limitada do mesmo, então trata-se de um ponto de equilíbrio estável. Por fim se os pontos do diagrama se afastam de  $x^*$  então o mesmo é ponto de equilíbrio instável.

Neste modelo, para os casos citados acima temos os diagramas das Figura 3, 4 e 5.

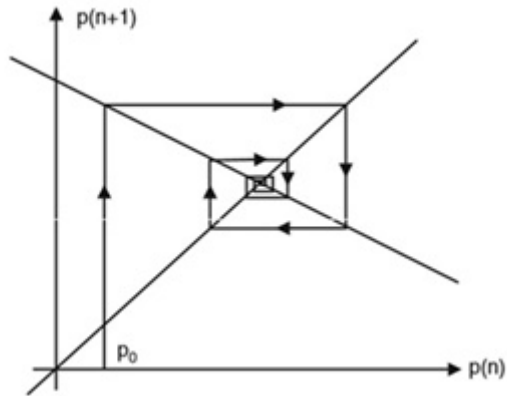


Figura 3 – Preço Assintoticamente Estável

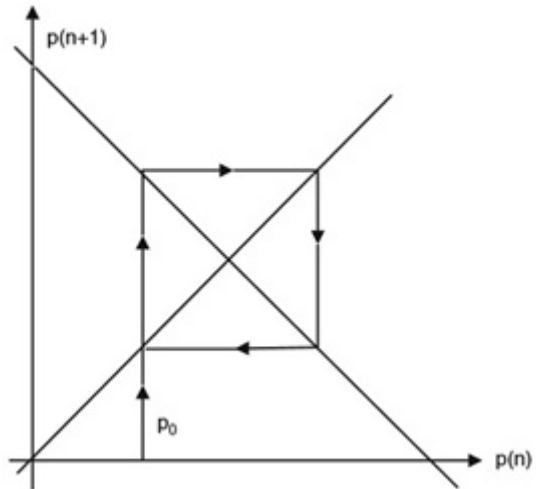


Figura 4 – Preço Estável

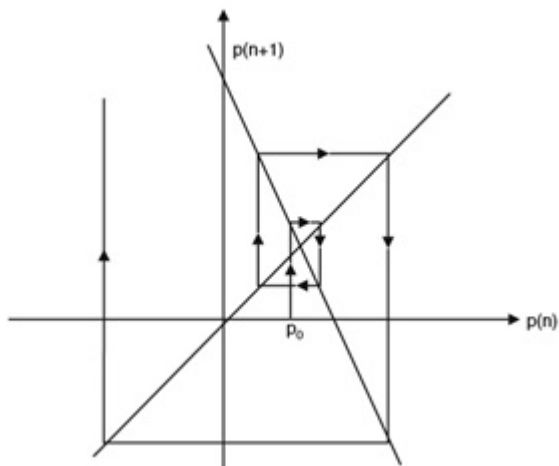


Figura 5 – Preço Intável

## 4.2 PROPAGAÇÃO DE DOENÇAS

Vamos estudar o modelo de propagação de uma doença em determinada população apresentado por (MICKKENS, 1990). Inicialmente faremos uma abordagem simples, onde supomos a população geral dividida em três grupos, de acordo com a situação da saúde de cada indivíduo:

$S(n)$  representa o grupo de indivíduos suscetíveis a doença no momento  $n$ , ou seja as pessoas que não tem a doença, porém podem contraí-la;

$I(n)$  o grupo dos infectados no instante  $n$ , são as pessoas que tem a doença e podem transmití-la à outras pessoas;

$R(n)$  consiste no grupo de "removidos" no momento  $n$ , que são as pessoas que já foram infectadas e estão curadas, mortas ou isoladas da população. Faremos aqui uma outra suposição, considerando que uma vez curada a pessoa está imune a doença, ou seja não voltará a ficar infectada, sendo assim os indivíduos desse grupo não transmitem

nem infectam-se com a doença.

Consideremos aqui uma população com três pré-requisitos:

*i)* A população total permanece constante de tamanho  $N$  durante o período de tempo  $n$ , ou seja  $S(n) + I(n) + R(n) = N$ ;

*ii)* A mudança na população de suscetíveis é proporcional ao produto do número de pessoas suscetíveis e infectadas, ou seja

$$\Delta S(n) = S(n+1) - S(n) = -rS(n)I(n),$$

onde  $r$  é uma constante positiva que fornece a taxa de infecção. A equação tem o sinal negativo pois, após o contato de uma pessoa infectada com uma pessoa suscetível, os únicos eventos possíveis são o grupo de infectados aumentar e o grupo de suscetíveis diminuir, ou se manterem do mesmo tamanho.

*iii)* Considerando que o grupo de removidos aumenta proporcionalmente ao número de pessoas infectadas, temos que a variação de pessoas infectadas é dada por

$$\Delta I(n) = rS(n)I(n) - \gamma I(n),$$

onde  $\gamma$  é uma constante positiva chamada taxa de remoção. Assim temos que

$$\Delta R(n) = \gamma I(n).$$

Porém não precisamos trabalhar com  $\Delta R(n)$ , para nosso estudo podemos considerar somente  $\Delta S(n)$  e  $\Delta I(n)$ , pois para determinar  $R(n)$  basta aplicar na equação

$$S(n) + I(n) + R(n) = N$$

os valores de  $S(n)$  e  $I(n)$  determinados.

Observe que  $\Delta S(n)$  é sempre menor ou igual a zero (a população de suscetíveis diminui ou se mantém constante). Assim a sequência  $S(n)$  é monótona decrescente e limitada inferiormente, pois não é possível que tenhamos uma população de tamanho negativo. Logo  $S(n)$

converge e chamaremos o valor limite dessa sequência de  $S_\infty$ , então  $S(n) \rightarrow S_\infty$ .

Além disso podemos escrever a equação da variação de  $I(n)$  da forma

$$\Delta I(n) = rI(n)(S(n) - S^*),$$

onde  $S^* = \frac{\gamma}{r} > 0$ , então  $I(n)$  cresce se  $S(n) > S^*$  e decresce se  $S(n) < S^*$ . De fato, de acordo com Mickens (MICKKENS, 1990)  $I(n)$  e  $S(n)$  não tem solução explícita, porém podemos estimar o comportamento da mesma através da seguinte análise:

Inicialmente note que

$$\frac{\Delta I(n)}{\Delta S(n)} = \frac{S^*}{S(n)} - 1,$$

Consideremos uma condição inicial  $(S_0, I_0)$ . Como  $S(n)$  é monótona e decrescente, temos que  $S_0$  será o maior valor assumido pela mesma. Analisemos então os casos:

1. Se um número pequeno  $I_0$  de infectados é colocado em uma grande população de suscetíveis, porém  $S_0 < S^*$ , então  $\frac{S^*}{S(n)} > 1$  e assim  $\frac{\Delta I(n)}{\Delta S(n)} > 0$ . Como  $\Delta S(n) < 0$ , temos que  $\Delta I(n) < 0$ , sendo assim, o número de infectados  $I(n)$  também será decrescente convergindo para zero.

2. Se um número pequeno de indivíduos infectados  $I_0$  é colocado em uma grande população de suscetíveis  $S_0$ , sendo que  $S_0 > S^*$ , temos que com o tempo  $S(n)$  vai decrescer e se aproximar de  $S^*$ . Nesse período temos que  $\frac{S^*}{S(n)} < 1$ , então  $\frac{\Delta I(n)}{\Delta S(n)} < 0$ . Isso implica que  $\Delta I(n) > 0$ , ou seja, enquanto  $S(n)$  decresce para  $S^*$ ,  $I(n)$  cresce. Quando  $S(n) = S^*$  temos que  $\Delta I(n) = 0$  e o crescimento se estabiliza. Para  $S(n) > S^*$  temos que  $\Delta I(n) < 0$  ou seja o número de infectados volta a ser decrescente, portanto o número máximo de infectados é dado no instante em que  $S(n) = S^*$ .

Concluimos então que ocorrerá uma epidemia somente quando  $S(n) > S^*$ , sendo que se  $S(n)$  passa a ser menor que  $S^*$ , ou seja,

o número de pessoas suscetíveis é menor que a razão entre a taxa de remoção pela taxa de infecção, então a propagação da doença tende a zero.

### 4.3 TRANSMISSÃO DE INFORMAÇÕES

Essa é uma das aplicações de equações de diferença apresentadas por (ELAYDI, 2000).

Para construção desse modelo vamos supor que um sistema de sinalização emite dois sinais,  $s_1$  e  $s_2$ , sendo que antes das mensagens serem transmitidas são codificadas em sequências desses dois sinais. Consideremos que  $s_1$  necessite de exatamente  $n_1$  unidades de tempo para ser transmitido e  $s_2$  precise de  $n_2$  unidades de tempo para transmissão. Seja  $M(n)$  o número de possíveis sequências de mensagens de duração  $n$ .

De fato uma mensagem de duração  $n$  termina com sinal  $s_1$  ou  $s_2$ . Suponhamos que a mensagem termine com um sinal  $s_1$ , então o último sinal deve começar no instante  $n - n_1$ . Há assim  $M(n - n_1)$  possíveis mensagens que podem ser anexadas ao último sinal  $s_1$ , ou seja há  $M(n - n_1)$  mensagens de duração  $n$  que terminam com  $s_1$ .

Seguindo esse mesmo raciocínio concluímos que há  $M(n - n_2)$  mensagens de duração  $n$  que terminam com sinal  $s_2$ . Assim o número total de mensagens  $M(n)$  com duração  $n$  é dado por

$$M(n) = M(n - n_1) + M(n - n_2).$$

Se  $n_1 \geq n_2$ , podemos reescrever a equação na forma

$$M(n + n_1) = M(n) + M(n + n_1 - n_2),$$

de maneira análoga podemos reescrever a equação para o caso em que  $n_1 \leq n_2$ .

Observemos rapidamente um caso particular em que  $n_1 = 1$  e  $n_2 = 2$ , temos a equação de diferença  $M(n + 2) = M(n + 1) +$

$M(n)$ , que é a equação de diferença que modela o problema dos coelhos proposto por Fibonacci. De fato a equação característica da mesma é  $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ , logo suas raízes são  $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  e  $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ , ou seja temos duas raízes distintas. Como  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$  pela Afirmação 1.2 da página 41 o comportamento da solução desse problema é determinado por  $\lambda_1$ , e ainda como  $\lambda_1 > 1$  temos que o sistema é instável.

De fato a solução geral para essa equação é

$$M(n) = a_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + a_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

No contexto em que estamos trabalhando, faz sentido supor que no instante  $n = 0$  nenhuma mensagem tenha sido transmitida, assim  $M(0) = 0$  e no instante 1, como temos um tipo de sinal que leva um minuto para ser transmitido, tenhamos que  $M(1) = 1$ . Nesse caso  $M(0) = a_1 + a_2 = 0$ , ou seja

$$a_1 = -a_2 \text{ e } M(1) = a_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + a_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = a_1 \sqrt{5} = 1,$$

logo  $a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$  e  $a_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ . Portanto

$$M(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Na teoria de transmissão de informações, de acordo com (ELAYDI, 2000), a capacidade  $C$  de um canal é definida como:

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M(n)}{n}$$

Aplicando para o nosso caso particular, temos que a capacidade do canal em questão seria

$$\begin{aligned} C &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 \left[ \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\log_2 \frac{1}{\sqrt{5}}}{n} + \frac{1}{n} \log_2 \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \simeq 0,7 \end{aligned}$$



ou seja, no caso em que  $n_1 = 1$  e  $n_2 = 2$  teríamos um canal com capacidade de aproximadamente 70%.

## 4.4 A EQUAÇÃO DO CALOR

Seguiremos aqui o modelo proposto por (ELAYDI, 2000), que se assemelha ao modelo abordado por (MICKKENS, 1990). Consideremos então a distribuição de calor através de uma barra fina composta de um material homogêneo. Sejam  $x_1, x_2, \dots, x_k$ ,  $k$  pontos equidistantes na barra, e  $T_i(n)$  a temperatura no ponto  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  no instante  $n$ . Denotamos as temperaturas nas extremidades direita e esquerda da barra por  $T_0(n)$  e  $T_{k+1}(n)$  respectivamente.

Suponhamos que os lados da barra estejam bem isolados, de modo que o único fator que afeta a temperatura no ponto  $x_i$  é a temperatura dos pontos próximos a ele, ou seja a temperatura dos pontos  $x_{i-1}$  e  $x_{i+1}$ . Assumimos também que a temperatura da barra na extremidade direita é mantida em  $b$  °C e na extremidade esquerda em  $c$  °C, assim  $T_0(n) = b$  e  $T_{k+1}(n) = c$  para todo  $n$  inteiro não negativo.

De acordo com a lei de arrefecimento de Newton, a mudança de temperatura

$$\Delta T_i(n) = T_i(n+1) - T_i(n)$$

no ponto  $x_i$ , no instante de  $n$  para  $n+1$ , é proporcional a diferença de temperatura do ponto  $x_i$  e seus pontos próximos  $x_{i-1}$  e  $x_{i+1}$ . Logo

$$\begin{aligned} \Delta T_i(n) &= \alpha [(T_{i-1}(n) - T_i(n)) + (T_{i+1}(n) - T_i(n))] \\ &= \alpha [T_{i-1}(n) - 2T_i(n) + T_{i+1}(n)] \end{aligned} \quad (4.1)$$

Portanto

$$T_i(n+1) = \alpha T_{i-1}(n) + (1 - 2\alpha) T_i(n) + \alpha T_{i+1}(n), \quad i = 1, \dots, k-1.$$

Essa equação é válida para cada um dos pontos, podemos então considerar o sistema

$$T(n+1) = AT(n) + g \quad (4.2)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} (1-2\alpha) & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & (1-2\alpha) & \alpha & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & (1-2\alpha) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (1-2\alpha) \end{bmatrix} \text{ e } g = \begin{bmatrix} \alpha b \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \alpha c \end{bmatrix}$$

Esta é uma matriz tridiagonal *Toeplitz*, e seus autovalores podem ser determinados através da fórmula

$$\lambda_n = (1-2\alpha) + \alpha \cos\left(\frac{n\pi}{k+1}\right)$$

sendo  $n = 1, \dots, k$ . Assim

$$|\lambda_n| = \left| (1-2\alpha) + \alpha \cos\left(\frac{n\pi}{k+1}\right) \right| \leq |1-2\alpha + \alpha| < 1,$$

ou seja  $|\lambda| < 1$  para qualquer autovalor de  $A$ , logo  $A^n \rightarrow 0$ . A solução do sistema (4.2) é

$$T(n) = A^n T(0) + \sum_{r=0}^{n-1} A^r g,$$

assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{n-1} A^r g$$

Podemos tomar  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{n-1} A^r g$  como sendo a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita. Neste caso  $\lim T(n) = g(I - A)^{-1}$ , ou seja, a temperatura no ponto  $x_i$  tende a se aproximar da  $i$ -ésima componente da matriz  $(I - A)^{-1} g$ , independente da temperatura inicial no ponto.

Tracemos agora um paralelo com a equação de calor modelada por equações diferenciais parciais. Consideremos então  $\Delta x = x_i - x_{i-1}$  a variação de espaço entre um ponto e outro e  $\Delta t = t_{i-1} - t_i$  a variação de tempo. Assumimos que  $\alpha = \left[ \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \right] \beta$ , onde  $\beta$  é uma constante que

depende do material da barra, de modo que quanto menor o valor de  $\Delta t$ , menor a alteração na temperatura num ponto. E quanto menor a distância entre os pontos, maior a sua influência na mudança de temperatura nos pontos próximos.

Assim  $\frac{\Delta T_i(n)}{\Delta t} = \beta \left[ \frac{T_{i+1}(n) - 2T_i(n) + T_{i-1}(n)}{(\Delta x)^2} \right]$ , fazendo  $\Delta t$  e  $\Delta x$  irem para zero quando  $n$  cresce indefinidamente, obtemos a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\beta \partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}.$$

## 4.5 DESENVOLVIMENTO DO FLOUR BEETLE

De acordo com (ROBERTSON, 2009) os modelos matemáticos podem ser muito úteis para estimar o comportamento de um fenômeno biológico complexo, como por exemplo o tamanho de populações de animais. Porém ao acrescentarmos variáveis que tornem o modelo biologicamente mais preciso, corremos o risco de torná-lo matematicamente intratável. Por isso para uma abordagem inicial é interessante tratar dos besouros da farinha, pois de acordo com o autor esse animal apresenta fases bem definidas da vida, com duração fixa. Sendo que ocorre o canibalismo em algumas dessas fases, fornecendo uma dinâmica interessante para o população, que não apresentam complexidade matemática além do nosso alcance.

Utilizaremos aqui dois referenciais principais, (ELAYDI, 2000) e (ROBERTSON, 2009), que descrevem o mesmo modelo com uma abordagem semelhante.

Vamos dividir os ciclos de vida de um *Flour Beetle* em *ovo*  $\rightarrow$  *larva*  $\rightarrow$  *pupa*  $\rightarrow$  *adulto*, sendo que os períodos de larva e pupa duram em média duas semanas.

Nessas etapas o canibalismo ocorre da seguinte forma: os adultos comem ovos ( $C_{AO}$ ) e pupas ( $C_{AP}$ ), as larvas se alimentam de ovos ( $C_{LO}$ ). Os adultos não são alimentos para os demais de sua espécie, e ainda, o canibalismo de adultos por larvas ( $C_{AL}$ ), assim como o de

larvas por pupas ( $C_{LP}$ ), ocorrem em taxas pequenas, por isso vamos considerá-los como desprezíveis.

Em um período  $n$  definimos que  $L(n)$  é a população de larvas nesse instante,  $P(n)$  a população de pupas, e  $A(n)$  a população de adultos. Denotemos por  $\mu_L$  e  $\mu_A$  a probabilidade de larvas e adultos morrerem por causas que não são o canibalismo, sendo assim as mesmas variam de zero a um. Definimos ainda os chamados coeficientes de canibalismo  $C_{AO}$ ,  $C_{LO}$  e  $C_{AP}$  que são todos maiores ou iguais a zero, de modo que  $\exp(-C_{AO}A(n))$  é a probabilidade de que um ovo tenha contato com a população  $A(n)$  porém não seja eliminado. Definimos  $\exp(-C_{LO}L(n))$  como a probabilidade de um ovo sobreviver ao encontro com a população  $L(n)$ , por último  $\exp(-C_{AP}A(n))$  é a probabilidade de uma pupa não ser eliminada ao ter contato com a população de  $A(n)$ .

Supondo que o canibalismo de adulto é a única importante causa da mortalidade de pupas, obtemos o seguinte modelo de larva-pupa-adultos, chamado de ( $LPA$ ) pelos autores:

$$\begin{aligned} L(n+1) &= bA(n) \exp(-C_{AO}A(n) - C_{LO}L(n)) \\ P(n+1) &= (1 - \mu_L) L(n) \\ A(n+1) &= P(n) \exp(-C_{AP}A(n)) + (1 - \mu_A) A(n) \end{aligned}$$

onde  $L(0)$ ,  $P(0)$  e  $A(0)$  são maiores ou iguais a zero.

Existem dois pontos de equilíbrio para essas equações, o ponto  $(0, 0, 0)^T$  e o ponto

$$(L^*, P^*, A^*) \in \mathbb{R}_+^3$$

dados por

$$\begin{aligned} L^* \exp(C_{LO}L^*) &= bA^* \exp(-C_{AO}A^*) \\ P^* &= (1 - \mu_L) L^* \\ P^* &= \mu_A A^* \exp(C_{AP}A^*) \end{aligned}$$

Juntando as duas igualdades de  $P^*$  obtemos que  $(1 - \mu_L) L^* = \mu_A A^* \exp(C_{AP} A^*)$ , dividindo a primeira equação por essa nova equação obtemos

$$\exp(C_{LO} L^*) = \frac{b(1 - \mu_L)}{\mu_A} \exp(A^* (-C_{AO} - C_{AP}))$$

O número  $N = \frac{b(1 - \mu_L)}{\mu_A}$  é chamado de *número de reprodução inerente líquida*. Note que se  $N < 1$  então a equação não tem solução, se  $N > 1$  então a equação tem uma solução no plano  $(A, L)$ . Para investigar a estabilidade do ponto de equilíbrio  $(L^*, P^*, A^*)^T$  vamos determinar o Jacobiano  $J$  das equações originais.

$$\begin{bmatrix} -C_{LO} b A^* e^{(-C_{AO} A^* - C_{LO} L^*)} & 0 & b e^{(-C_{AO} A^* - C_{LO} L^*)(1 - C_{AO} A^*)} \\ 1 - \mu_L & 0 & 0 \\ 0 & e^{(-C_{AP} A^*)} & 1 - \mu_A - C_{AP} P^* e^{-C_{AP} A^*} \end{bmatrix}$$

De modo particular para o ponto de equilíbrio  $(L^*, P^*, A^*)^T = (0, 0, 0)^T$ , temos que o Jacobiano das equações é

$$\tilde{J} = J\left((0, 0, 0)^T\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b \\ 1 - \mu_L & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 - \mu_A \end{bmatrix},$$

cujos polinômio característico é  $p(\lambda) = \lambda^3 - (1 - \mu_A)\lambda^2 - b(1 - \mu_L)\lambda = 0$ . De acordo com o que foi abordado no trabalho anteriormente, pelo critério de Schur-Cohn página 102 o ponto de equilíbrio  $(0, 0, 0)^T$  será assintoticamente estável se, e somente se

$$|-(1 - \mu_A) - b(1 - \mu_L)| < 1 \text{ e } |-b(1 - \mu_L)(1 - \mu_A)| < 1 - (b(1 - \mu_L))^2.$$

Da primeira condição concluímos que  $(1 - \mu_A) + b(1 - \mu_L) < 1$ , logo

$$N = \frac{b(1 - \mu_L)}{\mu_A} < 1.$$

Da segunda condição temos que

$$b(1 - \mu_L)(1 - \mu_A) + b^2(1 - \mu_L)^2 < 1,$$

note que se  $N < 1$  então

$$b(1 - \mu_L)(1 - \mu_A) + b^2(1 - \mu_L)^2 < \mu_A(1 - \mu_A) + \mu_A^2 = \mu_A < 1,$$

assim se a primeira condição é satisfeita, a segunda também é. Concluimos então que a solução trivial será assintoticamente estável se, e somente se  $N < 1$ . Quando  $N$  cresce de modo que  $N > 1$  então o ponto de equilíbrio  $(0, 0, 0)^T$  passa a ser instável.

Para  $N > 1$  temos o ponto de equilíbrio  $(L^*, P^*, A^*)^T$ , cujo Jacobiano é dado por

$$J_2 = J(L^*, P^*, A^*) = \begin{pmatrix} -C_{LO}L^* & 0 & \frac{L^*}{A^*} - C_{AO}L^* \\ 1 - \mu_L & 0 & 0 \\ 0 & A^*e^{C_{AP}} & 1 - \mu_A - A^*\mu_A C_{AP} \end{pmatrix},$$

que tem como polinômio característico

$$q(\lambda) = \lambda^3 + (-C_{LO}L^* + A^*\mu_A C_{AP} - (1 - \mu_A))\lambda^2 - C_{LO}L^*(1 - \mu_A)\lambda - \left(\frac{L^*}{A^*} - C_{AO}L^*\right)(1 - \mu_L)e^{-C_{AP}A^*}$$

A estabilidade desse ponto é determinada em dois casos específicos, aqui pontuaremos os resultados apresentados por (ELAYDI, 2000) porém não aprofundaremos nossa discussão para o ponto  $(L^*, P^*, A^*)^T$  pois seriam necessários conhecimentos sobre conceitos e resultados matemáticos que não foram explanados no trabalho.

**Caso 4.1.** Se  $C_{LO} = 0$  então o ponto de equilíbrio positivo  $(L^*, P^*, A^*)^T$  é atrator global se

$$1 < N < \exp\left(\min\left\{1, \left(\frac{C_{AO}}{C_{AP}}\right)\left(\frac{1 - \mu_A}{\mu_A}\right)\right\}\right)$$

**Caso 4.2.** Em alguns experimentos de longa duração observou-se que  $\mu_A = 0,96$  sendo assim faz sentido investigar o que acontece com o caso em que  $\mu_A = 1$ . Temos então o conjunto de equações

$$L(n+1) = \frac{N}{1 - \mu_L} A(n) \exp(-C_{AO}A(n) - C_{LO}L(n))$$

$$P(n+1) = (1 - \mu_L)L(n)$$

$$A(n+1) = P(n) \exp(-C_{AP}A(n))$$

*Para esse caso (ELAYDI, 2000) apresenta o seguinte resultado: Para  $N > 1$ , o ponto de equilíbrio trivial do conjunto de equações acima é instável, e existe um único ponto de equilíbrio positivo. Esse ponto de equilíbrio positivo, bifurca-se do ponto de equilíbrio trivial em  $N = 1$ , e é instável para todo  $N = 1 + \delta$ , onde  $\delta$  é suficientemente pequeno.*

Finalizamos aqui nossa abordagem do modelo para os besouros, mais detalhes e discussões são encontradas em (ELAYDI, 2000).





# CONCLUSÃO

Assim como afirma (ELAYDI, 2000) de um modo geral as equações de diferença descrevem a evolução de um fenômeno no tempo, o qual é tratado como uma variável discreta. Um dos exemplos seria o crescimento de populações, como o caso do problema dos coelhos de Fibonacci. Porém (FIGUEIREDO; NEVES, 2006) afirma que a matemática tem uma característica ímpar, em relação as demais ciências, de poder penetrar como uma arma importante e até mesmo indispensável em outros ramos do conhecimento humano. Conforme visto no trabalho a teoria de equações de diferença faz jus a tal singularidade da matemática, ultrapassando tais limites e podendo ser aplicada em áreas do conhecimento como biologia e economia.

Ao estudar tais fenômenos no decorrer do tempo é interessante fazer projeções em longo prazo, e nesses casos diversas vezes é importante que exista uma estabilidade. Os resultados apresentados nesse trabalho dão a base necessária para esses estudos.

Além das aplicações em outras áreas de conhecimento, de acordo com (GIL, 2007) a teoria de equações de diferença está cada vez mais sendo empregada dentro de outras teorias e conceitos matemáticos, como por exemplo na discretização de equações diferenciais, análise numérica, teoria de controle, “finite mathematics”, e ciências da computação.

Faz-se necessário chamar atenção para um desses pontos, a equação de diferença aplicada na discretização das equações diferenciais. De fato é comum tratar destas como a versão discreta das equações diferenciais, e conforme citado em alguns pontos do texto, vários dos resultados aplicados na teoria de uma tem seu correspondente análogo dentro da teoria da outra.

Após realizar esse trabalho temos base suficiente para finalizar o estudo do livro do Elaydi, ler livros como o *Global Behavior of Non-linear Difference Equations* (KOCIC; LADAS, 1993) e artigos como *Global Asymptotic Stability for Linear Fractional Difference Equation* (BRETT; JANOWSKI; KULENOVIC, 2014). O objetivo agora é continuar os estudos sobre equações de diferença, tanto buscando novos resultados em artigos relativamente recentes como o citado, além de buscar fazer um retrospecto sobre cada uma das técnicas estudadas visando traçar um paralelo também com equações diferenciais, pois acreditamos que assim fazemos pesquisa de qualidade e chegamos a novos resultados.

# Referências

- BORTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. *Fundamentos de Análise Funcional*. Rio de Janeiro: SBM, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 71.
- BRETT, A.; JANOWSKI, E. J.; KULENOVIC, M. Global asymptotic stability for linear fractional difference equation. *Journal of Difference Equations*, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 128.
- CULL, P.; FLAHITE, M.; ROBSON, R. *Difference Equations: From Rabbits to Chaos*. New York: Springer, 2005. Citado na página 13.
- ELAYDI, S. *An Introduction to Difference Equations*. New York: Springer, 2000. Citado 16 vezes nas páginas 14, 18, 31, 39, 71, 79, 103, 104, 106, 117, 118, 119, 121, 124, 125 e 127.
- EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Campinas, SP: UNICAMP, 2004. Citado na página 13.
- FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F. *Equações Diferenciais Aplicadas*. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. Citado na página 127.
- GIL, M. I. *Difference Equations in Normed Spaces: Stability and oscillations*. Amsterdam: Elsevier Science, 2007. Citado na página 127.
- HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos editora, 1979. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 56.
- JANOWSKI, E. J.; KULENOVIC, M. Attractivity and global stability for linearizable difference equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 2009. Citado na página 53.
- KOCIC, V. L.; LADAS, G. *Global Behavior of Nonlinear Difference Equations of Higher Order with Applications*. London: Kluwer Academic Publishers, 1993. Citado na página 128.
- LEON, S. J. *Álgebra Linear com aplicações*. Rio de Janeiro: LTC, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 14, 56 e 71.

- LIMA, E. L. *Análise Real*. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 14, 44 e 95.
- LIMA, E. L. *Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 56.
- LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. Citado na página 14.
- LUÍS, R. D. G. *Equações de diferenças e aplicações. Dissertação Mestrado*. Funchal: Universidade da Madeira, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.
- MARTINS, P. R.; VASCONCELLOS, C. F. Teorema do ponto fixo de brouwer. *Cadernos do IME*, 2014. Citado na página 19.
- MICKKENS, R. E. *Difference Equations: Theory and Applications*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1990. Citado 6 vezes nas páginas 14, 109, 110, 114, 116 e 119.
- ROBERTSON, S. Modeling populationsof flour beetles. *Statistics Case Studies*, 2009. Citado na página 121.