Universidade Técnica de Lisboa
Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Testes e Exames Resolvidos de Equações Diferenciais

Fernando Pestana da Costa

Setembro 1998

Nota Introdutória

Este texto consiste numa colectânia de testes e exames resolvidos da disciplina de Equações Diferenciais, leccionada aos cursos de licenciatura em Química, Eng.ª Aeroespacial, Eng.ª do Ambiente e Eng.ª Mecânica do Instituto Superior Técnico, entre 1994 e 1998.

FERNANDO PESTANA DA COSTA

Índice

Exame de 22.6.94 e resolução.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

(Engenharia Mecânica, 1ºAno)

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

Data: 22/6/1994
Duração: 3h00.

I.

Considere a equação diferencial

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ 3 & 1 & & & \\ & & -2 & & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \tag{1}$$

onde as posições da matriz que não estão explicitamente indicadas são zeros.

a) Determine a solução de (1) com condição inicial $x_1(0) = x_2(0) = 0, x_3(0) = x_4(0) = -x_5(0) = 1$.

b) Determine o maior conjunto $L \subset \mathbb{R}^5$ tal que as soluções $\mathbf{x}(t)$ de (1) com condições iniciais em L são globalmente limitadas (i.e., existe uma constante M tal que $\|\mathbf{x}(t)\| \leq M$, para todo o $t \in \mathbb{R}$.)

II.

1. Determine a solução da equação separável $xx' - (1 + x^2)t^2 = 0$ com condição inicial $x(0) = 1$.

2. Considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = \dfrac{2}{\pi} \dfrac{1 + x^2}{x} t^2 \arctan(x + t) \\ \\ x(0) = 1 \end{cases} \tag{2}$$

   a) Verifique, justificando cuidadosamente, que este problema tem solução local única.

   b) Verifique que o intervalo máximo de existência da solução de (2) contém o intervalo $[0, +\infty[$.
   (*Sugestão: Tenha em conta o resultado da questão* II.1)

III.

Considere o sistema

$$\begin{cases} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -g(x_1) \end{cases} \tag{3}$$

onde $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma funão localmente lipschitziana.

1. Verifique que a funão $V : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$V(x_1, x_2) = x_2^2 + 2\int_0^{x_1} g(\upsilon)d\upsilon$$

é uma constante do movimento para (3).

2. Com $g(x_1) = x_1 - 2x_1^3$,

   a) Determine todos os pontos de equilíbrio de (3).

   b) Linearize (3) em torno dos pontos de equilíbrio e indique, justificadamente, para quais dos casos o método de linearização é válido. Para os casos em que o método de linearização fôr válido esboce o retrato de fase na vizinhança do ponto de equilíbrio.

   c) Esboce o retrato de fase do sistema e determine a estabilidade de todos os pontos de equilíbrio.

IV.

1. Seja $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável. Seja $\tilde{f}$ o prolongamento par de f a $[-2, 2]$ tal que $\tilde{f}(x) = -f(2 - x)$ para $x \in [1, 2]$. Estendendo $\tilde{f}$ a toda a recta real como uma função periódica de período 4, mostre que a série de Fourier de $\tilde{f}$ é uma série de cosenos e que todos os coeficientes de ordem par da série de Fourier são nulos.

2. Utilizando o método de separação de variáveis determine a solução formal do problema seguinte

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times]0, 1[\\ u_x(t, 0) = u(t, 1) = 0, & t > 0 \\ u(0, x) = 1 - x^2, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

(*Sugestão: Pode ser útil ter presente o resultado da questão anterior.*)

Resolução:

I.

a) Seja A a matriz do sistema (1). A solução geral de (1) é $\mathbf{x}(t) = P(t;0)\mathbf{x}(0)$ onde $P(t;0) = e^{At}$ é a matriz principal em $t_0 = 0$. Como a matriz do sistema é diagonal por blocos tem-se que $e^{At} = \operatorname{diag}\left(e^{A_1 t}, e^{-2t}, e^{A_2 t}\right)$ onde $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, e $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Consequentemente, a solução pretendida é

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & & \\ & e^{-2t} & \\ & & e^{A_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-2t} \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix},$$

onde

$$\begin{bmatrix} x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix} = e^{A_2 t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Calculemos agora $e^{A_2 t}$:

Os valores próprios da matriz A_2 são os zeros do polinómio característico $p_{A_2}(\lambda) = \det(A_2 - \lambda I_2) = \lambda(\lambda - 2)$, os quais são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$. Utilizando o método de Putzer tem-se

$$e^{A_2 t} = r_1(t) P_0(A_2) + r_2(t) P_1(A_2)$$

onde

$$P_0(A_2) = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_1(A_2) = A_2 - \lambda_1 I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e $(r_1(t), r_2(t))$ é a solução de

$$\begin{cases} r_1' = \lambda_1 r_1, & r_1(0) = 1 \\ r_2' = \lambda_2 r_2 + r_1, & r_2(0) = 0. \end{cases}$$

A equação para $r_1(t)$ é uma EDO linear escalar homogénea de primeira ordem, a qual é facilmente integrável obtendo-se

$$r_1(t) = 1, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Multiplicando a segunda equação por um factor integrante $\mu = \mu(t)$ tem-se $\mu r_2' - 2\mu r_2 = \mu$, e para que o membro esquerdo seja igual a $(\mu r_2)' = \mu r_2' + \mu' r_2$ tem de se escolher μ tal que

$\mu' = -2\mu$. Nestas condições a segunda equação pode-se escrever como $\left(e^{-2t}r_2\right)' = e^{-2t}$, a qual, integrando entre 0 e um valor arbitrário t e usando a condição inicial $r_2(0) = 0$, fornece a solução

$$r_2(t) = \frac{1}{2}\left(e^{2t} - 1\right).$$

Conclui-se que

$$e^{A_2 t} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(e^{2t}+1\right) & \frac{1}{2}\left(e^{2t}-1\right) \\ \frac{1}{2}\left(e^{2t}-1\right) & \frac{1}{2}\left(e^{2t}+1\right) \end{bmatrix}.$$

Portanto

$$\begin{bmatrix} x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(e^{2t}+1\right) & \frac{1}{2}\left(e^{2t}-1\right) \\ \frac{1}{2}\left(e^{2t}-1\right) & \frac{1}{2}\left(e^{2t}+1\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e a solução pedida é

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-2t} \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

b) Vejamos primeiro quais são os valores próprios da matriz do sistema: como a matriz é diagonal por blocos os seus valores próprios são os valores prprios das submatrizes que constituem os blocos. Isto permite concluir que $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$ são valores próprios. Para o primeiro bloco $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ a equação característica é

$$0 = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 4$$

donde se conclui que os restantes dois valores próprios de A são $\lambda_4 = 1 + i\sqrt{3}$ e $\lambda_5 = 1 - i\sqrt{3}$. Como os valores próprios são todos simples (multiplicidade algébrica = 1) conclui-se que os correspondentes vectores próprios são todos linearmente independentes e portanto as soluções (complexas) do sistema são combinações lineares de funções do tipo

$$\mathbf{x}_\ell(t) = e^{\lambda_\ell t}\mathbf{v}_\ell,$$

onde $(\lambda_\ell, \mathbf{v}_\ell)$ é um par prprio de A. Então, no presente caso,

$$\|\mathbf{x}_\ell(t)\| \longrightarrow +\infty \quad \text{quando} \quad |t| \to +\infty$$

se e só se $\operatorname{Re}(\lambda_\ell) \neq 0$, pelo que se conclui que para que as soluções sejam limitadas para todo o $t \in \mathbb{R}$ é necessário e (neste caso também) suficiente que a condição inicial pertença ao espaço vectorial dado pela soma directa dos espaços próprios correspondentes aos valores próprios da matriz com parte real nula. Como o único valor próprio com parte real nula é $\lambda_1 = 0$ tem-se que L é o correspondente espaço próprio:

$$\begin{bmatrix} 1-0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1-0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2-0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1-0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

ou seja,

$$\begin{cases} v_1 - v_2 = 0 \\ 3v_1 + v_2 = 2 \\ -2v_3 = 0 \\ v_4 + v_5 = 0 \\ v_4 + v_5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = 0 \\ v_3 = 0 \\ v_5 = -v_4 \end{cases}$$

e portanto tem-se $L = \left\{ (0, 0, 0, \alpha, -\alpha)^{\mathrm{T}} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$.

II.

1.

$xx' = (1 + x^2)t^2 = 0, \quad x(0) = 1$

separando as variáveis t e x vem

$\dfrac{x}{1+x^2} x' = t^2, \quad x(0) = 1$

e integrando esta equação, tendo em conta a condição inicial, tem-se

$$\frac{1}{2} \int_1^x \frac{2u}{1+u^2} du = \int_0^t s^2 ds$$

$$\frac{1}{2} \log\left(1 + u^2\right)\Big|_1^x = \frac{1}{3} s^3 \Big|_0^t$$

$$\tfrac{1}{2} \log\left(1 + x^2\right) - \tfrac{1}{2} \log 2 = \tfrac{1}{3} t^3$$

$$\log \frac{1+x^2}{2} = \tfrac{2}{3} t^3$$

$$1 + x^2 = 2e^{\frac{2}{3}t^3}$$

$$x = x(t) = \sqrt{2e^{\frac{2}{3}t^3} - 1},$$

onde o sinal da raiz na última linha acima foi escolhido atendendo a que $x(0) = 1 > 0$.

2.a) Sendo

$$f(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{\pi} \frac{1+x^2}{x} t^2 \arctan(x + t)$$

tem-se que $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ é contínua como função de t, diferenciável como função de x, e a derivada $\frac{\partial f}{\partial x}$ é limitada em qualquer vizinhança aberta de (t, x) que não contenha pontos com $x = 0$. Em particular, é localmente lipschitziana em x numa vizinhança de $(t, x) = (0, 1)$.

Consequentemente, pelo Teorema de Picard-Lindelöf, o problema de Cauchy (2) tem solução local única definida para t numa vizinhança suficientemente pequena de 0.

b) Notando que

$$|f(t,x)| = \left|\frac{2}{\pi}\frac{1+x^2}{x}t^2\arctan(x+t)\right| < \frac{1+x^2}{|x|}t^2 =: g\left(t,|x|\right),$$

(onde $g\left(t,|x|\right)$ é definida pela última igualdade) tem-se, utilizando os Teoremas de comparação, $|x(t)| \leq u(t)$, onde $u(t)$ é a solução de

$$\begin{cases} u' = g(t,u) \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Ora este problema de Cauchy já foi resolvido na alínea II.1. e sabe-se que

$$u(t) = \sqrt{2e^{\frac{2}{3}t^3} - 1},$$

pelo que

$$|x(t)| \leq \sqrt{2e^{\frac{2}{3}t^3} - 1}$$

para qualquer $t \geq 0$ no intervalo de existência de $x(t)$. Isto significa que $x(t)$ não "explode" para $+\infty$ nem para $-\infty$ no conjunto $[0,+\infty[$. Portanto, se $x(t)$ não estiver definido para todo o $t \in [0,+\infty[$ é porque existe $\tau \in]0,+\infty[$ tal que

$$(t,x(t)) \to \text{ fronteira do domínio de } f$$

quando $t \to \tau^-$. A fronteira do domínio de f é $\{(\theta,0) : \theta \in \mathbb{R}\}$ pelo que terá de se verificar $x(t) \to 0$ quando $t \to \tau^-$. Como a condição inicial é $x(0) = 1 > 0$ tem-se

$$\lim_{t\to 0^+} x'(t) = \lim_{(t,x)\to(0^+,1)} f(t,x) = 0^+$$

pelo que $x(t)$ é não-decrescente numa semi-vizinhança direita de $t = 0$ suficientemente pequena. Como, além disso, $x(0) = 1 > 0$ e $x'(t) = f(t,x) > 0$ para $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, conclui-se que $x(t)$ é positivo e estritamente crescente em $\mathbb{R}_0^+$ e portanto $x(t) \not\to 0$ quando $t \to \tau$, para qualquer $\tau \in \mathbb{R}_0^+$. Isto implica que o intervalo máximo de existência da solução $x(t)$ contêm o intervalo $[0,+\infty[$, como se pretendia.

III.

1. Comece-se por observar que g localmente lipschitziana $\Longrightarrow$ g contínua $\Longrightarrow$ $\partial V/\partial x_1$ existe e é igual a $2g$, pelo que se tem

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}x_1' + \frac{\partial V}{\partial x_2}x_2' = 2g(x_1)x_1' + 2x_2\left(-g(x_1)\right) = 0$$

concluindo-se que V é uma constante do movimento.

2.a) Pontos de equilíbrio:

$$\begin{cases} x_1' = 0 \\ x_2' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_1^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \ \vee \ x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \ \vee \ x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Os pontos de equilíbrio são $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $(0,0)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

b) Linearização em torno dos pontos de equilíbrio: A matriz jacobiana do sistema num ponto (x_1, x_2) arbitrário é

$$A(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 + 6x_1^2 & 0 \end{bmatrix}$$

pelo que

$$A(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = A(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Linearizaçõ em torno de $(0,0)$.
  Valores próprios de $A(0,0)$:

$$0 = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1 \iff \lambda_\pm = \pm i.$$

Como a parte real dos valores próprios de $A(0,0)$ é igual a zero o método de linearização não pode ser utilizado para estudar o retrato de fase do sistema não-linear (3) em vizinhanças do ponto de equilíbrio $(0,0)$.

- Linearizações em torno de $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ e de $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$.
  Valores próprios de $A(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = A(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$:

$$0 = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2 \iff \lambda_\pm = \pm\sqrt{2}.$$

Sendo $\mathrm{Re}\,(\lambda_\pm) \neq 0$ podem-se utilizar os resultados fornecidos pelas linearizações em torno dos pontos de equilíbrio $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ para esboçar o retrato de fase do sistema não-linear em pequenas vizinhanças destes pontos. Vejamos os vectores próprios da matriz:
Correspondendo ao valor próprio $\lambda_+ = \sqrt{2}$:
Atendendo a que

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 1 \\ 2 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -\sqrt{2}v_1 + v_2 = 0 \\ 2v_1 - \sqrt{2}\,v_2 = 0 \end{cases} \iff v_2 = \sqrt{2}\,v_1,$$

o espaço próprio é constituido pelos vectores

$$\mathbf{v}_+ = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Correspondendo ao valor próprio $\lambda_+ = \sqrt{2}$ tem-se

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 2 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}v_1 + v_2 = 0 \\ 2v_1 + \sqrt{2}\,v_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow v_2 = -\sqrt{2}\,v_1,$$

e o espaço próprio correspondente é

$$\mathbf{v}_- = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Os retratos de fase das linearizações são, então, o apresentado na Figura 1

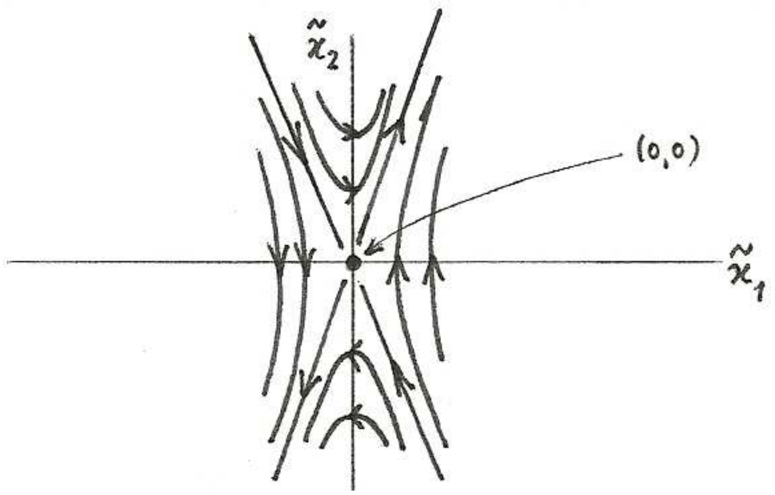


Figura 1: Retrato de fase das linearizações em torno de $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ e de $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$.

c) Sabendo que

$$V(x_1, x_2) = x_2^2 + 2\int_0^{x_1} \left(u - 2u^3\right) du = x_2^2 + x_1^2 - x_1^4$$

é uma constante do movimento, conclui-se que as órbitas de (3) estão contidas em conjuntos de nível da função f. Escrevendo $E_c(x_2) = x_2^2$, $E_p(x_1) = x_1^2 - x_1^4$ tem-se $V(x_1, x_2) = E_c(x_2) + E_p(x_1)$ e $E_c(x_2) \geq 0$. Consequentemente tem-se o gráfico de E_p e esboço das curvas de nível de V apresentado nas Figura 2 e 3.

(A parte das curvas de nível que se encontram próximas dos pontos $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ podem ser traçadas recorrendo aos resultados da linearização).
O sentido das órbitas é obtido directamente do sistema (3): atendendo à primeira equação de (3), $x_1' = x_2$, conclui-se que os sentidos têm de ser tais que $x_1(t)$ é crescente no semi-espaço $x_2 > 0$ e decrescente em $x_2 < 0$).

O ponto de equilíbrio $(0, 0)$ é estável (mas não assimptoticamente estável) e os outros dois pontos de equilíbrio são instáveis (são pontos de sela.)

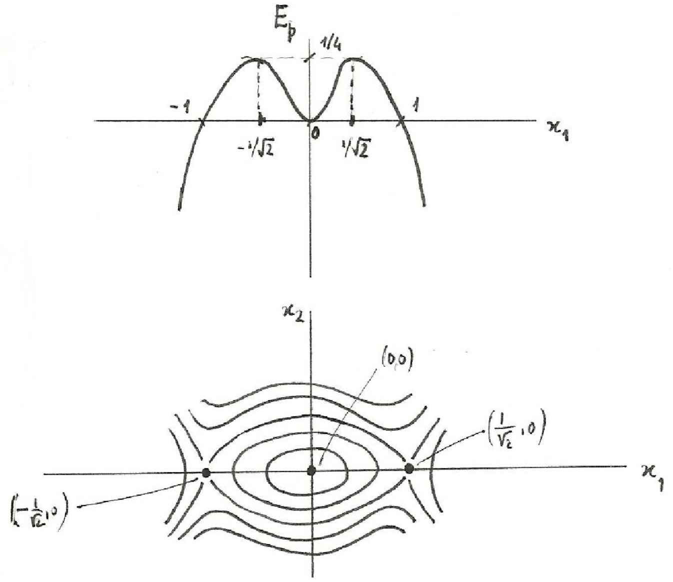


Figura 2: Gráfico de E_p e esboço das curvas de nível de V.

IV.

1. Estando a considerar o prolongamento par de $\tilde{f}$ a toda a recta real tem-se que a série de Fourier tem de ser uma função par e portanto será uma série de cosenos:

$$\tilde{f} \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\tfrac{n\pi}{2}x\right)$$

(o 2 surge no denominador do argumento do coseno porque $\tilde{f}$ é periódica de período 4 e portanto $2L = 4 \Longleftrightarrow L = 2$.)
Vejamos agora os coeficientes de ordem par da série de Fourier de $\tilde{f}$ (incluindo $n = 0$):

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{2}\int_0^2 \tilde{f}(x)\cos\left(\tfrac{0\pi}{2}x\right)dx = \\
&= \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 \left(-f(2-x)\right)dx = \\
&\quad \text{(usando a mudança de variáveis } u = 2-x \text{ no segundo integral)} \\
&= \int_0^1 f(x)dx - \int_1^0 \left(-f(u)\right)du = \\
&= \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 f(u)du = \\
&= 0.
\end{aligned}$$

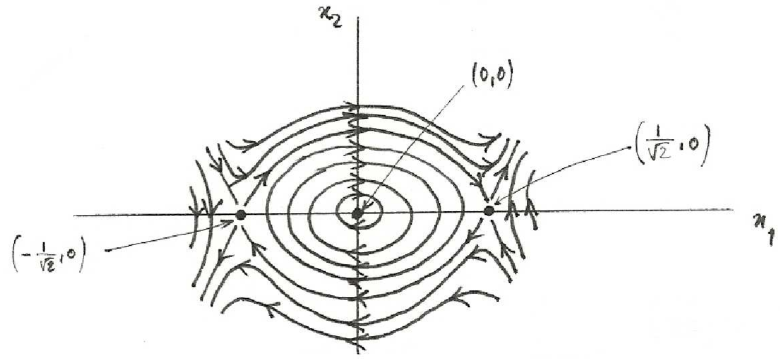


Figura 3: Esboço do retrato de fase de (3) .

Para $n \geq 2$, par, i.e., $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}_1$, tem-se

$$\begin{aligned}
a_{2k} &= \frac{2}{2}\int_0^2 \tilde{f}(x)\cos\left(\tfrac{2k\pi}{2}x\right)dx = \\
&= \int_0^1 f(x)\cos(k\pi x)dx - \int_1^2 f(2-x)\cos(k\pi x)dx = \\
&\ \text{(usando a mudança de variáveis } u = 2-x \text{ no segundo integral)} \\
&= \int_0^1 f(x)\cos(k\pi x)dx - \left(-\int_1^0 f(u)\cos(k\pi(2-u))du\right) = \\
&= \int_0^1 f(x)\cos(k\pi x)dx - \int_0^1 f(u)\cos(2k\pi - \pi k u)du = \\
&= \int_0^1 f(x)\cos(k\pi x)dx - \int_0^1 f(u)\cos(-\pi k u)du = \\
&= \int_0^1 f(x)\cos(k\pi x)dx - \int_0^1 f(u)\cos(\pi k u)du = \\
&= 0.
\end{aligned}$$

2. Seja $u(t,x) = F(x)G(t)$. Atendendo a que $u_t = FG'$ e $u_{xx} = F''G$ a equação diferencial parcial dada pode-se escrever como $F(x)G'(t) = F''(x)G(t)$. Supondo que $F(x) \neq 0$ para todo o $x \in]0,1[$ e que $G(t) \neq 0$ para todo o $t > 0$, pode-se dividir esta última equação por $F(x)G(t)$ obtendo-se
$$\frac{F''}{F}(x) = \frac{G'}{G}(t), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times]0,1[.$$
Consequentemente, terá de existir uma constante real σ, independente de t e de x, tal que
$$\frac{F''}{F} = \sigma = \frac{G'}{G}.$$

Como $u_x(t,0) = F'(0)G(t)$ e $u(t,1) = F(1)G(t)$ conclui-se que as condições na fronteira podem-se escrever do seguinte modo: $F'(0) = 0 = F(1)$. Deste modo, o problema para F é

$$\begin{cases} F'' - \sigma F = 0 \\ F'(0) = F(1) = 0. \end{cases}$$

Estudaremos de seguida a possibilidade de obtenção de soluções *não-triviais* (que não são identicamente nulas) deste problema:

- Considere-se $\sigma = 0$. A equação diferencial fica reduzida a $F'' = 0$ cujas soluções são $F(x) = ax + b$ e atendendo às condições na fronteira $0 = F'(0) = a$ e $0 = F(1) = a + b$ conclui-se imediatamente que $a = b = 0$ e portanto a única solução do problema é a solução trivial $F(x) \equiv 0$.
- Seja agora $\sigma > 0$. A solução geral da equação é $F(x) = ae^{\sqrt{\sigma}x} + be^{-\sqrt{\sigma}x}$. Atendendo às condições na fronteira tem-se $0 = F'(0) = a\sqrt{\sigma} - b\sqrt{\sigma}$ e $0 = F(1) = ae^{\sqrt{\sigma}} + be^{-\sqrt{\sigma}}$ cuja única solução é $a = b = 0$ fornecendo como única solução da equação a função identicamente nula $F(x) \equiv 0$.
- Finalmente tome-se $\sigma < 0$. Por facilidade de notação é conveniente escrever $\sigma = -\lambda^2$ com $\lambda > 0$. A solução geral real da equação diferencial é agora $F(x) = a\cos\lambda x + b\sin\lambda x$. Atendendo às condições na fronteira tem-se $0 = F'(0) = -a\lambda\sin 0 + b\lambda\cos 0 = b\lambda$ e portanto $0 = F(1) = a\cos\lambda + 0\sin\lambda = a\cos\lambda$ concluindo-se que, ou $a = 0$ e obtemos a solução $F(x) \equiv 0$, ou $\cos\lambda = 0$, isto é, $\lambda = \lambda_k = k\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{(2k-1)\pi}{2}$, $k \in \mathbb{N}_1$, obtendo-se assim infinitas soluções do problema de valores na fronteira, em particular as funções

$$F_k(x) = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}x\right), \quad \forall k \in \mathbb{N}_1,$$

  e todas as combinações lineares de um número finito destas funções.

Sendo $\sigma = \sigma_k = -\lambda_k^2 = -\left(\frac{2k-1}{2}\pi\right)^2$ tem-se como soluções de $G' = \sigma G$ as funções

$$G_k(t) = \exp\left[-\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}\right)^2 t\right], \quad \forall k \in \mathbb{N}_1.$$

Daqui se conclui que a solução formal geral da equação com as condições de fronteira apresentadas é

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi x\right) e^{-(2k-1)^2\pi^2 t/4}.$$

Para que a condição inicial seja satisfeita tem de verificar-se

$$1 - x^2 = u(0,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi x\right).$$

Observando que a série do membro direito é uma série de cosenos que contém apenas termos de ordem ímpar, e recordando o enunciado do problema anterior, para determinar os coeficientes α_k há que prolongar $f(x) = 1 - x^2$ como função par a $[-2, 2]$ com o prolongamento a $[1, 2]$ definido por $\tilde{f} = -f(2-x) = -\big(1 - (2-x)^2\big) = (2-x)^2 - 1$. Pelo problema anterior tem-se, então,

$$a_n = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = 0, \quad \text{se } n \text{ é par.}$$

Se n é ímpar, $n = 2k-1, k \in \mathbb{N}_1$, e conclui-se que

$$\begin{aligned}
a_{2k-1} &= \int_0^2 \tilde{f}(x)\cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi x\right) dx = \\
&= \int_0^1 \big(1 - x^2\big)\cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi x\right) dx + \int_1^2 \big((2-x)^2 - 1\big)\cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi x\right) dx = \\
&= \int_0^1 \cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi x\right) dx - \int_0^1 x^2\cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi x\right) dx + \\
&\quad + \int_1^2 (2-x)^2\cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi x\right) dx - \int_1^2 \cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi x\right) dx = \\
&\quad \text{(usando a mudança de variáveis } u = 2 - x \text{ nos terceiro e quarto} \\
&\quad \text{integrais e lembrando que } \cos((2k-1)\pi - \theta) = -\cos\theta\text{)} \\
&= \int_0^1 \cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi x\right) dx - \int_0^1 x^2\cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi x\right) dx.
\end{aligned} \tag{4}$$

O primeiro integral em (4) é facilmente obtido por primitivação imediata:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi x\right) dx &= \frac{2}{(2k-1)\pi}\sin\left(\tfrac{2k-1}{2}\pi x\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = \\
&= \frac{2}{(2k-1)\pi}\sin\left((2k-1)\tfrac{\pi}{2}\right) = \\
&= \frac{2}{(2k-1)\pi}(-1)^{k+1}.
\end{aligned}$$

Para o segundo integral em (4) integra-se duas vezes por partes e obtém-se

$$\int_0^1 x^2\cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi x\right) dx = -\frac{16}{(2k-1)^3\pi^3}(-1)^{k+1}.$$

Conclui-se assim que

$$a_{2k-1} = \frac{2}{(2k-1)\pi}\left(1 + \frac{8}{(2k-1)^3\pi^2}\right)(-1)^{k+1}$$

e portanto $\alpha_k = a_{2k-1}$ pelo que a solução formal do problema de valores iniciais e de fronteira dado é

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi}\left(1 + \frac{8}{(2k-1)^3\pi^2}\right)(-1)^{k+1}\cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi x\right) e^{-(2k-1)^2\pi^2 t/4}.$$

Exame de 1.7.94 e resolução.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

(Engenharia Mecânica, 1ºAno)

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

Data: 1/7/1994
Duração: 3h00.

I.

Consider o sistema de EDOs lineares

$$\begin{cases} x_1' &= & -x_2 \\ x_2' &= & 4x_1 \\ x_3' &= & -x_3 \\ x_4' &= & x_4 \end{cases}$$

a) Determine a matriz principal deste sistema em $t_0 = 0$.

b) Determine para que condições iniciais as soluções do sistema são limitadas em $\mathbb{R}^+$.

II.

Considere a equação linear escalar

$$x''' + 2x'' + x' = h(t)$$

onde $h(t)$ é uma função contínua definida em $\mathbb{R}$. Determine a solução da equação que verifica as condições iniciais $x(0) = x'(0) = x''(0) - 1 = 0$, sendo

a) $h(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

b) $h(t) = t$.

III.

Considere a equação diferencial não-linear homogénea

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + x} \tag{5}$$

1.a) Determine uma expressão implícita para as soluções de (5).

b) Utilize a expressão implícita da alínea anterior para concluir que todas as soluções de (5) são limitadas e estão definidas em intervalos limitados de $\mathbb{R}$.
(*Sugestão: argumente por redução ao absurdo*)

2. Definindo uma variável auxiliar t pela expressão $t = x$, a equação (5) é transformada no seguinte sistema bidimensional autónomo

$$\begin{cases} x' &= 1 \\ y' &= \frac{y-x}{y+x} \end{cases} \tag{6}$$

onde $()'$ designa a derivação em ordem a t.

a) Identifique as regiões do espaço de fases onde $y(t)$ é crescente [decrescente].

b) Identifique as regiões do espaço de fases onde a distância à origem de pontos sobre as órbitas aumenta [diminui] com t.

c) Atendendo às alíneas anteriores e ao resultado obtido em 1b) esboce o retrato de fase de (6) justificando cuidadosamente.

IV.

Suponha que $y(t), y'(t)$ e $y''(t)$ são funções de ordem exponencial (com constante $\alpha \geq 0$). As funções $y(t)$ e $y'(t)$ são contínuas e $y''(t)$ é seccionalmente contínua em $\mathbb{R}^+$. Seja $Y(s)$ a transformada de Laplace de $y(t)$,

$$Y(s) = L[y(t)](s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} y(t)e^{-st}dt,$$

definida para $s > \alpha \geq 0$.

a) Mostre que

$$L[t^2y''(t)](s) = s^2Y''(s) + 4sY'(s) + 2Y(s).$$

(*Sugestão: poderá ser útil recordar as seguintes igualdades*
$L[t^n f(t)](s) = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n} L[f(t)](s)$
$L[f^n(t)](s) = s^n L[f(t)](s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - s^0 f^{(n-1)}(0)$.)

b) Aplicando transformadas de Laplace à equação

$$t^2y'' + 3ty' + y = 1 \tag{7}$$

obtenha a seguinte equação para $Y(s)$:

$$Y'' + \frac{1}{s}Y' = \frac{1}{s^3} \tag{8}$$

c) Resolva (8) e utilize o resultado obtido para determinar uma solução de (7).
(*Sugestão: poderá ser útil considerar a mudança de variáveis $Z(s) = Y'(s)$ na resolução de* (8).)

Resolução:

I.

a) Escrevendo o sistema dado na forma vectorial tem-se

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & & \\ 4 & 0 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \tag{9}$$

onde as posições da matriz não explicitamente escritas são iguais a zero. A matriz principal deste sistema em $t_0 = 0$ é dada por

$$P(t) = e^{At}$$

onde A é a matriz de (9). Como A é uma matriz diagonal por blocos tem-se

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & & \\ & e^{-t} & \\ & & e^{t} \end{bmatrix}$$

onde $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$. Utilizamos o método de Putzer para calcular $e^{A_1 t}$. Os valores próprios de A_1 são os zeros do polinómio característico $p(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det(A_1 - \lambda I_2) = \lambda^2 + 4$, ou seja, $\lambda_1 = 2i$ e $\lambda_2 = -2i$. Tem-se, então, $P_0(A_1) = I_2$, $P_1(A_1) = A_1 - 2iI_2$, e o seguinte sistema para as funções $r_j(t)$:

$$\begin{cases} r_1' = 2ir_1, & r_1(0) = 1 \\ r_2' = -2ir_2 + r_1, & r_2(0) = 0. \end{cases}$$

A equação para $r_1(t)$ tem como solução $r_1 = e^{2it} = \cos 2t + i \sin 2t$. Multiplicando a equação para $r_2(t)$ pelo factor integrante $\mu(t) = e^{2it}$ e integrando entre 0 e um valor de t arbitrário conclui-se que $r_2(t) = \frac{1}{4i}\left(e^{2it} - e^{-2it}\right) = \frac{1}{2}\sin 2t$. Obtém-se então

$$\begin{aligned} e^{A_1 t} &= (\cos 2t + i \sin 2t)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\sin 2t \begin{bmatrix} -2i & -1 \\ 4 & -2i \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos 2t + i \sin 2t - 2i\frac{1}{2}\sin 2t & -\frac{1}{2}\sin 2t \\ 2\sin 2t & \cos 2t + i\sin 2t - 2i\frac{1}{2}\sin 2t \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos 2t & -\frac{1}{2}\sin 2t \\ 2\sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e portanto e^{At} é dada por

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos 2t & -\frac{1}{2}\sin 2t & 0 & 0 \\ 2\sin 2t & \cos 2t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix}.$$

b) Utilizando o resultado da alínea anterior e sabendo que qualquer solução $\mathbf{x}(t)$ de (9) pode ser escrita na forma $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{c}$, com $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4$ um vector constante (que é a condição inicial em $t = 0$), conclui-se que

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} (\cos 2t)\, c_1 - \left(\frac{1}{2}\sin 2t\right) c_2 \\ (2\sin 2t)\, c_1 + (\cos 2t)\, c_2 \\ e^{-t}c_3 \\ e^{t}c_4 \end{bmatrix}.$$

As duas primeiras componentes de $\mathbf{x}(t)$ são limitadas em $\mathbb{R}$ e a terceira é limitada em qualquer intervalo $[a, +\infty[$, com $a \in \mathbb{R}$. A última componente tende, em valor absoluto, para $+\infty$ quando $t \to +\infty$, a menos que c_4 seja nulo. Isto permite concluir que para se ter soluções limitadas em $\mathbb{R}^+$ é necessário e suficiente ter $c_4 = 0$ e portanto as condições iniciais $\mathbf{c}$ têm de satisfazer $c_4 = 0$ e c_1, c_2, c_3 quaisquer números reais.

II.

a) Considerando o problema de Cauchy

$$\begin{cases} x''' + 2x'' + x' = 0 \\ x(0) = x'(0) = x''(0) - 1 = 0. \end{cases}$$

Observando que $x''' + 2x'' + x' = 0 \iff \left(D^3 + 2D^2 + D\right) x = 0 \iff D\left(D^2 + 2D + 1\right) x = 0 \iff D\,(D+1)^2\, x = 0$, e tendo em atenção que $Dy = 0$ tem como solução geral $y_0(t) = \alpha_0 \in \mathbb{R}$ e que $(D+1)^2\, y = 0$ tem como base do espaço das soluções as funções $y_1(t) = e^{-t}$ e $y_2(t) = te^{-t}$ conclui-se que a solução geral da equação dada é

$$x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 e^{-t} + \alpha_2 te^{-t},$$

onde $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ são constantes reais arbitrárias. A fim de determinar as constantes para as quais a solução satisfaz as condições iniciais dadas necessitamos de calcular primeiro $x'(t)$ e $x''(t)$:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\alpha_1 e^{-t} + \alpha_2 e^{-t} - \alpha_2 te^{-t} \\ x''(t) &= \alpha_1 e^{-t} - \alpha_2 e^{-t} - \alpha_2 e^{-t} + \alpha_2 te^{-t} \end{aligned}$$

pelo que se tem

$$\begin{cases} x(0) = \alpha_0 + \alpha_1 = 0 \\ x'(0) = -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ x''(0) = \alpha_1 - 2\alpha_2 = 1 \end{cases}$$

cuja solução é $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = \alpha_2 = -1$, pelo que a solução pretendida é

$$x(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t}.$$

b) Agora o problema de Cauchy que pretendemos resolver é

$$\begin{cases} x''' + 2x'' + x' = t \\ x(0) = x'(0) = x''(0) - 1 = 0. \end{cases}$$

Vimos na alínea anterior que a solução geral da equação homogénea é

$$x_{\text{hom}}(t) = \alpha_0 + \alpha_1 e^{-t} + \alpha_1 t e^{-t}.$$

Procuremos agora uma solução particular da equação não-homogénea. Como o termo não-homogéneo $h(t) = t$ é do tipo $t^m e^{\lambda t}$ com $m = 1$ e $\lambda = 0$, e como $\lambda = 0$ é uma raiz, com multiplicidade igual a 1, do polinómio característico da equação diferencial, podemos tentar uma solução particular da forma

$$x_{\text{part}}(t) = at^2 + bt + c$$

com a, b e c constantes reais. Tendo em conta isto vem $x'_{\text{part}}(t) = 2at + b$, $x''_{\text{part}}(t) = 2a$, e $x'''_{\text{part}}(t) = 0$, pelo que substituindo na equação temos $x'''_{\text{part}}(t) + 2x''_{\text{part}}(t) + x'_{\text{part}}(t) = t \iff 0 + 2(2a) + (2at + b) = t \iff (2a)t + (4a + b) = t$ e portanto $a = 1/2$, $b = -2$ e c é qualquer real, pelo que, sem perda de generalidade, pode-se tomar $c = 0$. Assim, uma solução particular é $x_{\text{part}}(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2t$ e a solução geral da equação não-homogénea é

$$x_{\text{geral}}(t) = \alpha_0 + \alpha_1 e^{-t} + \alpha_2 t e^{-t} + \frac{1}{2}t^2 - 2t.$$

Para determinar a solução que satisfaz a condição inicial observe-se que

$$\begin{array}{rcl} x'(t) & = & (\alpha_2 - \alpha_1)\, e^{-t} - \alpha_2 t e^{-t} + t - 2 \\ x''(t) & = & (\alpha_2 - 2\alpha_3)\, e^{-t} + \alpha_3 t e^{-t} + 1 \end{array}$$

pelo que se tem

$$\begin{cases} x(0) & = & \alpha_0 + \alpha_1 = 0 \\ x'(0) & = & \alpha_2 - \alpha_1 - 2 = 0 \\ x''(0) & = & \alpha_1 - 2\alpha_2 + 1 = 1 \end{cases}$$

cuja solução é $\alpha_0 = 4, \alpha_1 = -4, \alpha_2 = -2$, pelo que a solução pretendida é

$$x(t) = 4 - 2t + \frac{1}{2}t^2 - 4e^{-t} - 2te^{-t}.$$

III.

1.a) Definindo uma variável $u = u(x)$ por $u(x) = y(x)/x$ tem-se $y = xu$, donde se conclui que $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$ e como o membro direito de (5) pode ser escrito como

$$\frac{y - x}{y + x} = \frac{\frac{y}{x} - 1}{\frac{y}{x} + 1} = \frac{u - 1}{u + 1}$$

a equação dada é transformada em

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{y+x} \quad &\Longleftrightarrow \quad u+x\frac{du}{dx}=\frac{u-1}{u+1}\\ &\Longleftrightarrow \quad x\frac{du}{dx}=\frac{u-1-u(u+1)}{u+1}\\ &\Longleftrightarrow \quad x\frac{du}{dx}=-\frac{1+u^2}{1+u}\\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{1+u}{1+u^2}\frac{du}{dx}=-\frac{1}{x}\end{aligned}$$

Primitivando (em ordem a x) ambos os membros da última equação vem

$$\int \frac{1+u}{1+u^2}\frac{du}{dx}dx=-\int \frac{1}{x}dx,$$

ou seja

$$\int \frac{1+u}{1+u^2}du=-\int \frac{1}{x}dx,$$

pelo que se tem

$$\arctan u+\frac{1}{2}\log\left(1+u^2\right)=-\log|x|+C$$

onde C é uma constante real arbitrária. Invertendo a mudança de variáveis tem-se

$$\arctan\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)=-\log|x|+C.$$

Atendendo a que $\log|x|=\log\sqrt{x^2}=\frac{1}{2}\log x^2$, a última equação pode ser escrita na forma mais simplificada

$$\arctan\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\log\left(x^2+y^2\right)=C.$$

b) Fixemos um valor arbitrário da constante real C. De acordo com o resultado obtido na alínea anterior, a solução $y(x)$ da equação diferencial é dada implicitamente por

$$\arctan\frac{y(x)}{x}+\frac{1}{2}\log\left(x^2+y(x)^2\right)=C, \tag{10}$$

onde x varia no intervalo máximo de existência de $y(x)$. Suponhamos que $y(x)$ está definida num intervalo ilimitado, por exemplo em $]a,+\infty[$, para algum $a\in\mathbb{R}$. Então, quando $x\to+\infty$, tem-se $\log\left(x^2+y(x)^2\right)\geq\log x^2\to+\infty$ e $\arctan\frac{y(x)}{x}$ é limitada porque $\arctan z\in]-\pi/2,\pi/2[$, $\forall z\in\mathbb{R}$. Conclui-se que o membro esquerdo de (10) terá de tender para $+\infty$ o que é impossível visto que é igual a uma constante real C, para todo o x no intervalo em causa. A mesma contradição surge se tivermos a supôr que o intervalo é ilimitado à esquerda. Para concluir que a solução é limitada usa-se o mesmo argumento. Se $y(x)$ não fôr limitada no seu domínio existirá uma sucessão (x_n) convergente para um ponto α da fronteira do intervalo máximo de definição da solução $y(x)$ e tal que $|y(x_n)| \to +\infty$. Nestas circunstâncias $\log\left(x_n^2 + y(x_n)^2\right) \geq \log y(x_n)^2 \to +\infty$ e tem-se uma contradição igual à anterior. Isto prova o pretendido.

2.a) Atendendo à equação tem-se

$$\begin{array}{llllll} y(t) \text{ crescente} & \Leftrightarrow & y'(t) > 0 & \Leftrightarrow & \{(x,y) : y > x \wedge y > -x\} \cup \{(x,y) : y < x \wedge y < -x\} \\ y(t) \text{ decrescente} & \Leftrightarrow & y'(t) < 0 & \Leftrightarrow & \{(x,y) : y > x \wedge y < -x\} \cup \{(x,y) : y < x \wedge y > -x\} \\ y(t) \text{ estacionário} & \Leftrightarrow & y'(t) = 0 & \Leftrightarrow & \{(x,y) : y = x \wedge y \neq -x\}. \end{array}$$

Na Figura 4 apresenta-se um esboço das regiões em causa.

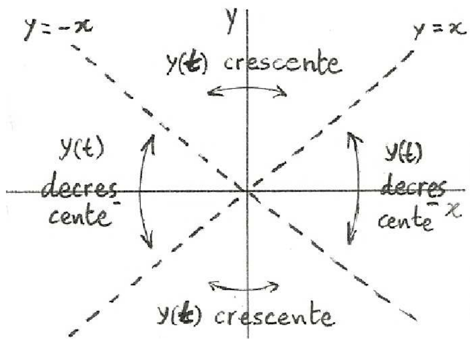


Figura 4: Regiões de monotonia de $y(t)$.

b) Em vez de considerarmos a função "distância à origem" podemos considerar a função "quadrado da distância à origem" uma vez que a primeira é uma função não negativa e que o quadrado é uma função monótona crescente quando restringido a $\mathbb{R}_0^+$. Seja então (x, y) um ponto de uma órbita de (6) e considere-se a sua distância à origem $F(x, y) = x^2 + y^2$. Atendendo à diferenciabilidade de F em relação a x e a y (F é um polinómio de segundo grau!) tem-se que a dependência de $F(x(t), y(t))$ em relação a t pode ser investigada recorrendo à derivada (total) de F em ordem a t :

$$F' = \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}x' + \frac{\partial F}{\partial y}y' = 2x + 2y\frac{y-x}{y+x} = 2\frac{y^2+x^2}{y+x},$$

pelo que

$$\begin{array}{lllll} F \text{ crescente} & \Longleftrightarrow & F' > 0 & \text{se e só se} & y > -x \\ F \text{ decrescente} & \Longleftrightarrow & F' < 0 & \text{se e só se} & y < -x. \end{array}$$

Na Figura 5 apresenta-se um esboço das regiões em causa.

c) Para além das informações obtidas nas duas alíneas anteriores é conveniente observar que $y' = 0$ quando $y = x\ (\neq 0)$, que $x' = 1 > 0$ para todo o t, e portanto todas as órbitas têm um sentido

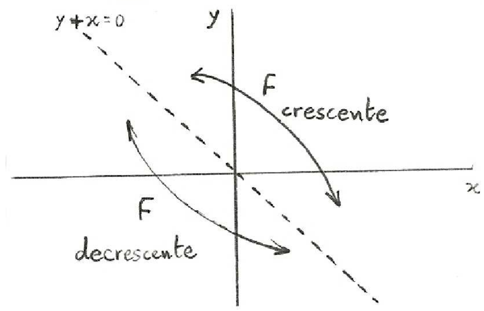


Figura 5: Regiões de monotonia de $t \mapsto F(x(t), y(t))$.

tal que $x(t)$ é crescente, e que, atendendo a que a variável t foi definida por $t = x$, a alínea 1.b) permite concluir que todas as órbitas do sistema (6) estão contidas em conjuntos limitados do espaço de fases. Observe-se ainda que $y' \to +\infty$ quando $y \to (-x)^+$ com $y > x$ e quando $y \to (-x)^-$ com $y < x$, e analogamente $y' \to -\infty$ quando $y \to (-x)^-$ com $y > x$ e quando $y \to (-x)^+$ com $y < x$.

Estes resultados permitem concluir que o retrato de fase de (6) é o apresentado na Figura 6.

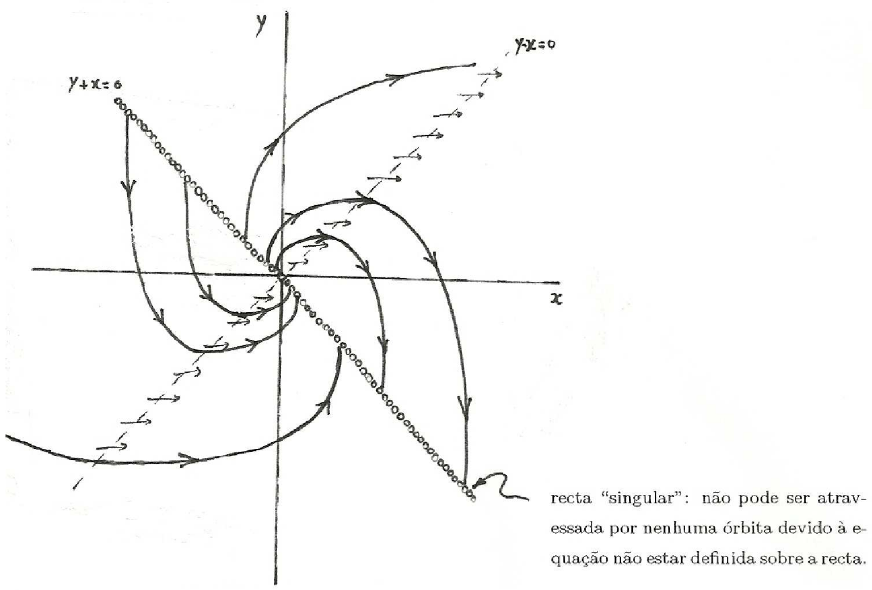


Figura 6: Esboço do retrato de fases de (6).

IV.

a)

$$\begin{aligned} L[t^2y''(t)](s) &= (-1)^2\frac{d^2}{ds^2}\big(L[y''](s)\big) = \\ &= \frac{d^2}{ds^2}\big(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\big) = \\ &= \frac{d}{ds}\big(2sY(s) + s^2Y'(s) - y(0)\big) = \\ &= 2Y(s) + 2sY'(s) + 2sY'(s) + s^2Y''(s) = \\ &= s^2Y''(s) + 4sY'(s) + 2Y(s) \end{aligned}$$

b) Como

$$\begin{aligned} L[t^2y''] &= s^2Y'' + 4sY' + 2Y \\ L[ty'] &= -(sY - y(0))' = -Y - sY' \\ L[y] &= Y \\ L[1] &= \frac{1}{s} \end{aligned}$$

conclui-se que

$$\begin{aligned} t^2y'' + 3ty' + y = 1 &\iff s^2Y'' + 2Y - 3Y - 3sY' + Y = \frac{1}{s} \\ &\iff s^2Y'' + sY' = \frac{1}{s} \\ &\iff Y'' + \frac{1}{s}Y' = \frac{1}{s^3} \end{aligned}$$

c) Fazendo $Z(s) \stackrel{\text{def}}{=} Y'(s)$ a equação acima é transformada em

$$Z' + \frac{1}{s}Z = \frac{1}{s^3}, \quad s \geq \alpha. \tag{11}$$

Multiplicando esta equação por $\mu = \mu(s)$ conclui-se que o membro esquerdo é igual à derivada de μZ, i.e., $\mu Z' + \mu' Z$, se e só se $\mu' = \frac{1}{s}\mu$. Assim, *um* factor integrante para esta equação é $\mu(s) = \exp\left(-\int -\frac{1}{s}ds\right) = \exp\left(\int \frac{1}{s}ds\right) = \exp\log s = s$. Atendendo a isto a solução geral de (11) é

$$Z(s) = \frac{C}{s} - \frac{1}{s^2}$$

onde C é uma constante real arbitrária. Consequentemente tem-se

$$Y(s) = C\log s + \frac{1}{s} + D,$$

onde D é também uma constante real arbitrária.

Para que $Y(s)$ tenha transformada inversa de Laplace é necessário que seja uma função contínua (em $s \geq \alpha$) e que $Y(s) \to 0$ quando $s \to +\infty$. Esta última condição implica que $C = D = 0$ e portanto conclui-se que $Y(s) = \frac{1}{s}$ cuja transformada inversa é

$$y(t) = 1.$$

Reconhece-se imediatamente que esta função é efectivamente uma solução de (7).

Exame de 25.7.94 e resolução.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

(Engenharia Mecânica, 1 Ano)

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

Data: 25/7/1994
Duração: 3h00.

I.

Considereo sistema de equações diferenciais lineares

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

1. Calcule os valores próprios e os espaços próprios da matriz do sistema (12).

2.a) Escreva uma expressão para a solução geral de (12).

b) Determine a solução de (12) que satisfaz as condiões iniciais

$$x_1(0) - 1 = x_2(0) - 1 = x_3(0) = 0.$$

3.a) Mostre que o subespaço de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$E = \left\{ \mathbf{v} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

é invariante para (12) (i.e., $\forall \mathbf{x}_0 \in E$, a solução de (12) com condição inicial $\mathbf{x}_0$ verifica $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) \in E$, $\forall t \in \mathbb{R}$).

b) Esboce o retrato de fase da restrição de (12) ao subespaço E.

II.

1. Considere a equação diferencial ordinária escalar

$$x^{(4)} + x''' + x'' + x' = 0 \tag{13}$$

a) Determine a solução geral de (13).

b) Determine para que condições iniciais (em $t = 0$) as soluções da equação diferencial em causa são convergentes quando $t \to +\infty$.

2. Considere agora a equação não-homogénea correspondente a (13) com termo independente $h(t) = \cos t$. Determine a solução desta equação que satisfaz a condião inicial $x(0) = 2$, $x'(0) = -1/4$, $x''(0) = -1/2$, $x'''(0) = -5/4$.

III.

a) Determine a solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x+y^2}{2xy} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

b) Determine, justificando devidamente, o intervalo máximo de existência da solução da alínea anterior.

IV.

Considere o seguinte problema para a equação das ondas unidimensional

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ u(t,0) = 0 & t > 0 \\ u(0,x) = 0, \;\; u_t(0,x) = f(x) & x > 0 \end{cases} \tag{14}$$

onde $f(x)$ é uma função de classe $\mathcal{C}^1$ definida em $\mathbb{R}^+$.

a) Utilizando a mudança de variáveis $(t,x) \mapsto (\xi,\eta)$ definida por $\xi = x+t$, $\eta = x-t$, e sendo $v(\xi,\eta) = v(\xi(t,x),\eta(t,x)) \stackrel{\text{def}}{=} u(t,x)$, prove que a equação das ondas $u_{tt} = u_{xx}$ é transformada em $v_{\xi\eta} = 0$.

b) Prove que a solução geral da equação transformada tem a forma

$$v(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

onde F e G são funções arbitrárias.

c) Utilize as condições iniciais e de fronteira do problema (14) para obter as expressões de F e G em termos dos dados do problema.

d) Determine a solução de (14).

Resolução:

I.

1. Os valores próprios da matriz são os zeros do polinómio característico, o qual é

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \\ &= (1-\lambda)[(1-\lambda)(1-\lambda)-1] - 1(1-\lambda-1) + 1[1-(1-\lambda)] = \\ &= (1-\lambda)^3 - 1 + \lambda + \lambda + \lambda = \\ &= 1 - \lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 + 3\lambda = \\ &= \lambda^2(3-\lambda). \end{aligned}$$

Portanto os valores próprios são

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = \lambda_2 = 0 & \text{(valor próprio duplo)}, \\ \lambda_3 = 3 & \text{(valor próprio simples)}. \end{array}$$

Para os espaços próprios correspondentes tem-se:

- espaço próprio correspondente ao valor próprio nulo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \iff v_1 v_2 + v_3 = 0 \iff$$
$$\iff v_3 = -v_1 - v_2$$

pelo que se conclui que o espaço próprio em causa é

$$\begin{aligned} E_0 &= \left\{ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\alpha-\beta \end{bmatrix}, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ \mathbf{v} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

(o espaço próprio é bidimensional).

- espaço próprio correspondente ao valor próprio $\lambda_3 = 3$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \iff \left\{ \begin{array}{l} -2v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 - 2v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 + v_2 - 2v_3 = 0 \end{array} \right.$$

multiplicando a segunda equação por 2 e adicionando o resultado à primeira tem-se

$$-3v_2 + 3v_3 = 0 \iff v_2 = v_3,$$

e multiplicando a primeira equação por 2 e adicionando-a à terceira obtém-se

$$-3v_1 + 3v_2 = 0 \iff v_1 = v_2,$$

pelo que se conclui que o espaço próprio é

$$E_3 = \left\{ \mathbf{v} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

2.a) Atendendo ao resultado da alínea anterior conclui-se que a expressão da solução geral de (12) pode ser dada por

$$\mathbf{x}(t) = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$$

onde a_1, a_2 e a_3 são constantes reais arbitrárias.

b) Usando a expressão geral da alínea anterior e as condições iniciais $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1$ e $x_3(0) = 0$ tem-se

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou seja

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 1 \\ a_2 + a_3 = 1 \\ -a_1 - a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$$

cuja solução é $a_1 = a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{2}{3}$ e portanto a solução procurada é

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}.$$

3.a) Considere-se uma condição inicial $\mathbf{x}_0 \in E$, então, para algum $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{x}(t_0) = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t_0} = \alpha_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{x}_0.$$

Daqui conclui-se que $a_1 = \alpha_0$, $a_2 = 0$ e $a_3 = \beta_0 e^{-3t_0}$. Então, a solução verificará

$$\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) = \alpha_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta_0 e^{3(t-t_0)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in E, \ \ \forall t \in \mathbb{R},$$

e portanto E é invariante para (12).

b) Comecemos por observar que os vectores $(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$ e $(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ são ortogonais:

$$\langle (1,0,-1)^{\mathrm{T}}, (1,1,1)^{\mathrm{T}} \rangle = 1 + 0 - 1 = 0.$$

por outro lado, como foi visto na alínea anterior, as soluções do sistema restringido a E são da forma

$$\mathbf{x}(t;t_0,\mathbf{x}_0) = \alpha_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta_0 e^{3(t-t_0)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in E, \ \ \forall t \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

Designe-se por S_1 o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$ e por S_2 o gerado por $(1,1,1)^{\mathrm{T}}$. O subespaço S_1 é constituido apenas por pontos de equilibrio uma vez que $S_1 \subset E_0$. Por outro lado tem-se $S_2 = E_3$ e portanto S_2 é também invariante. Como quando $\mathbf{x}_0 \notin S_1 \cup S_2$ a expressão (15) permite concluir que a componente de $\mathbf{x}(t)$ segundo S_1 é constante, conclui-se que as órbitas não-constantes são rectas paralelas a S_2 e que pontos sobre as órbitas convergem para um ponto de equilíbrio em S_1 quando $t \to -\infty$. Isto permite esboçar o seguinte retrato de fase apresentado na Figura 7.

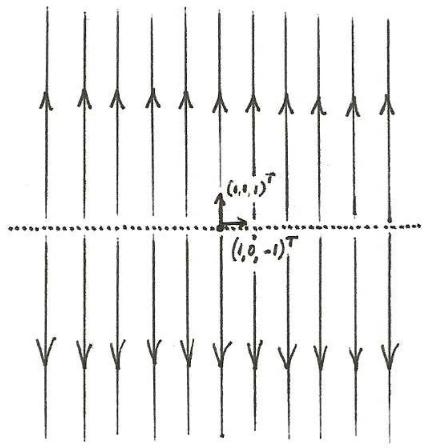


Figura 7: Esboço do retrato de fases da restrição de (12) ao subespaço E.

II.

1.a) Utilizando a notação $D = \frac{d}{dt}$ pode-se escrever a equação (13) na forma

$$(D^4 + D^3 + D^2 + D)x = 0.$$

O polinómio característico é $p(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda+1)(\lambda^2+1)$ pelo que se pode factorizar o polinómio diferencial e escrever a equação diferencial como

$$D(D+1)(D^2+1)x = 0.$$

Observando agora que *(i)* $Dx = 0$ tem $x(t) = 1$ como único elemento de uma base do espaço das soluções, *(ii)* $(D + 1)x = 0$ tem e^{-t} como único elemento de uma base do espaço das soluções e *(iii)* as funções $\cos t$ e $\sin t$ formam uma base do espaço das soluções da equação $(D^2 + 1)x = 0$, conclui-se que uma expressão para a solução geral (real) de (13) será

$$x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 e^{-t} + \alpha_2 \cos t + \alpha_3 \sin t,$$

onde $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2,$ e α_3 são constantes reais arbitrárias.

b) Para que uma solução $x(t)$ tenha limite quando $t \to +\infty$ tem de se ter, na notação da alínea anterior, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$; as constantes α_0 e α_1 podem ser quaisquer uma vez que $\alpha_0 + \alpha_1 e^{-t} \to \alpha_0$ quando $t \to +\infty$. Como

$$\begin{aligned}
&x(0) = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_0 + \alpha_1\\
&x'(0) = -\alpha_1 + \alpha_3 = -\alpha_1\\
&x''(0) = \alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_1\\
&x'''(0) = -\alpha_1 - \alpha_3 = -\alpha_1
\end{aligned}$$

conclui-se que as condições iniciais têm de satisfazer $x'''(0) = x'(0)$, $x''(0) = -x'(0)$ com $x'(0)$ e $x(0)$ reais arbitrários.

2. Considerando agora a equação $D(D+1)(D^2+1)x = \cos t$ e atendendo a que $\cos t$ é uma solução real de $(D^2 + 1)y = 0$ sabe-se que uma solução particular da equação não-homogénea será do tipo

$$x_{\text{part}}(t) = (\alpha t + \beta)\cos t + (\gamma t + \delta)\sin t,$$

onde α, β, γ e δ são constantes reais a determinar. Derivando esta expressão até à quarta ordem tem-se:

$$\begin{aligned}
x'_{\text{part}}(t) &= \alpha\cos t - \alpha t\sin t - \beta\sin t + \gamma\sin t + \gamma t\cos t + \delta\cos t\\
x''_{\text{part}}(t) &= -2\alpha\sin t - \alpha t\cos t - \beta\cos t + 2\gamma\cos t - \gamma t\sin t - \delta t\\
x'''_{\text{part}}(t) &= -3\alpha\cos t + \alpha t\sin t + \beta\sin t - 3\gamma\sin t - \gamma t\cos t - \delta\cos t\\
x^{(4)}_{\text{part}}(t) &= 4\alpha\sin t + \alpha t\cos t + \beta\cos t - 4\gamma\cos t + \gamma t\sin t + \delta\sin t
\end{aligned}$$

e portanto, para que $x^{(4)}_{\text{part}}(t) + x'''_{\text{part}}(t) + x''_{\text{part}}(t) + x'_{\text{part}}(t) = \cos t$ é suficiente que se verifique

$$\begin{cases}
4\alpha + \delta + \beta - 3\gamma - 2\alpha - \delta - \beta + \gamma = 0\\
\gamma + \alpha - \gamma - \alpha = 0\\
\alpha - \gamma - \alpha + \gamma = 0\\
\beta - 4\gamma - 3\alpha - \delta - \beta + 2\gamma + \alpha + \delta = 1
\end{cases}$$

ou seja, $\alpha = \gamma = -1/4$, β e δ quaisquer, vindo uma solução particular

$$x_{\text{part}}(t) = -\frac{1}{4}t\cos t - \frac{1}{4}t\sin t.$$

A solução geral do problema não-homogéneo é

$$x(t) = a_0 + a_1 e^{-t} + a_2\cos t + a_3\sin t - \frac{1}{4}t\cos t - \frac{1}{4}t\sin t.$$

Utilizando as condições iniciais dadas conclui-se que

$$\begin{cases} 2 = x(t) = a_0 + a_1 + a_2 \\ -\frac{1}{4} = x'(0) = -a_1 + a_3 - \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} = x''(0) = a_1 - a_2 - \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} = x'''(0) = -a_1 - a_3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \end{cases}$$

cuja solução é $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ e $a_0 = 0$, pelo que a solução pretendida é

$$x(t) = e^{-t} + \frac{1}{4}(4 - t)(\cos t + \sin t).$$

III.

a) Escrevendo a equação dada na forma $(x + y^2) + (2xy)\frac{dy}{dx} = 0$ e definindo $M(x, y) = x + y^2$ e $N(x, y) = 2xy$ tem-se $\frac{\partial M}{\partial y} = 2y = \frac{\partial N}{\partial x}$, pelo que a equação é exacta. Sabe-se então que existe uma função $\Phi(x, y)$ tal que $M = \partial\Phi/\partial x, N = \partial\Phi/\partial y$ e $\Phi(x, y) = 0$ é uma expressão implícita para todas as soluções da equação diferencial. Para o calculo de Φ observe-se que integrando a equação $\partial\Phi/\partial x = M(x, y) = x + y^2$ em ordem a x obtém-se $\Phi(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + xy^2 + h(y)$ e portanto, derivando esta expressão em ordem a y vem $\partial\Phi/\partial y = 2xy + h'(y) = N(x, y) = 2xy$, pelo que se conclui que $h'(y) = 0$, i.e., $h(y) = K$, para qualquer constante arbitrária K. Assim, a função Φ é dada por

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + xy^2 + K.$$

Sendo a equação diferencial dada equivalente a $\Phi(x, y) = 0$ e sendo Φ quadrática em y pode-se resolver a equação explicitamente em ordem a y como se segue:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2 + xy^2 + K = 0 \iff & y^2 = -\frac{K}{x} - \frac{1}{2}x \\ \iff & y = \pm\sqrt{-\frac{K}{x} - \frac{1}{2}x}. \end{aligned} \tag{16}$$

Para o problema de Cauchy dado sabe-se que $y(1) = 1$ pelo que o sinal que nos interessa na expressão (16) é $+$ e, além disso,

$$1 = y(1) = \sqrt{-K - \frac{1}{2}} \iff K = -\frac{3}{2},$$

concluindo-se que a solução pedida é

$$y(x) = \sqrt{\frac{3 - x^2}{2x}}.$$

b) O domínio de $y(x)$ é

$$\mathcal{D}_y = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{3 - x^2}{2x} \geq 0\right\} =]-\infty, -\sqrt{3}] \cup]0, \sqrt{3}].$$

Como o intervalo máximo de existência é o maior subintervalo do domínio que contém $x = 1$ e para o qual $y(x)$ é de classe $\mathcal{C}^1$ conclui-se que é

$$I_{\max} =]0, \sqrt{3}[.$$

A razão do ponto $x = \sqrt{3}$ não estar incluido em $I_{\max}$ prende-se com o facto de y não ter derivada finita nesse ponto e, portanto, não ser aí de classe $\mathcal{C}^1$:

$$y'(x) = -\frac{3+x^2}{4x^2}\sqrt{\frac{2x}{3-x^2}} \longrightarrow -\infty \quad \text{quando} \quad x \to (\sqrt{3})^-.$$

IV.

a) Atendendo à mudança de variáveis dada e à relação entre v e u tem-se, pelo teorema de derivação das funções compostas

$$\begin{aligned}
u_t &= v_\xi \xi_t + v_\eta \eta_t = v_\xi - v_\eta \\
u_{tt} &= (v_\xi - v_\eta)_t = (v_\xi - v_\eta)_\xi \, \xi_t + (v_\xi - v_\eta)_\eta \, \eta_t = \\
&= v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \\
u_x &= v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = v_\xi + v_\eta \\
u_{xx} &= (v_\xi + v_\eta)_x = (v_\xi + v_\eta)_\xi \, \xi_x + (v_\xi + v_\eta)_\eta \, \eta_x = \\
&= v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}
\end{aligned}$$

pelo que a equação $u_{tt} = u_{xx}$ escreve-se agora

$$v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta},$$

ou seja,

$$v_{\xi\eta} = 0.$$

b) Considere-se a equação $v_{\xi\eta} = 0$, i.e.,

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) = 0.$$

Sendo esta equação válida para todos os pontos de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ conclui-se que $\frac{\partial v}{\partial \eta}$ não pode depender de ξ e portanto

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \tilde{G}(\eta)$$

para alguma função $\tilde{G}$. Integrando esta última equação tem-se

$$v(\xi, \eta) = \int \tilde{G}(\eta) d\eta + F(\xi)$$

onde $F(\xi)$ é uma função só de ξ, e portanto é constante para a integração em η. Designando $\int \tilde{G}(\eta) d\eta$ por $G(\eta)$ conclui-se, então, que a solução geral da equação é $v(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$.

c) Utilizando as condições de fronteira de (14) tem-se

$$\begin{array}{l} 0 = u(0,x) = v(x,x) = F(x) + G(x), \quad x > 0 \\ f(x) = u_t(0,x) = v_\xi(x,x) - v_\eta(x,x) = F'(x) - G'(x), \quad x > 0. \end{array}$$

Da primeira condição tem-se

$$F(x) = -G(x) \implies F'(x) = -G'(x)$$

e portanto, substituindo na segunda condição, vem $-2G'(x) = f(x)$, $x > 0$. Integrando ambos os membros desta igualdade entre 0 e um valor de x arbitrário positivo obtém-se

$$G(x) = -\frac{1}{2}\int_0^x f(s)ds - K, \quad x > 0,$$

onde $K \stackrel{\text{def}}{=} G(0)$, e

$$F(x) = \frac{1}{2}\int_0^x f(s)ds + K, \quad x > 0.$$

Observe-se que $\eta = x - t$ pode ser negativo para $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ pelo que há que conhecer a expressão de $G(\eta)$ para $\eta < 0$ (a expressão de G dada acima é apenas válida para valores positivos do seu argumento). Utilizando a condição inicial em (14) tem-se

$$0 = u(t,0) = v(t,-t) = F(t) + G(-t), \quad t > 0,$$

pelo que se conclui que $G(t) = -F(-t)$ para $t < 0$. Tem-se, portanto,

$$G(\eta) = -\frac{1}{2}\int_0^{-\eta} f(s)ds - K, \quad \eta < 0.$$

As expressões pretendidas são, então, as seguintes:

$$\begin{array}{rcll} F(\xi) & = & \frac{1}{2}\int_0^\xi f(s)ds + K, & \xi > 0 \\ G(\eta) & = & -\frac{1}{2}\int_0^{|\eta|} f(s)ds - K, & \forall \eta \in \mathbb{R} \end{array}$$

d) Como a solução do problema é $u(t,x) = v(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta) = F(x+t) + G(x-t)$ com as expressões de F e G determinadas na alínea anterior conclui-se imediatamente que

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\int_{|x-t|}^{x+t} f(s)ds.$$

Exame de 28.11.94 e resolução.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

(Engenharia Mecânica, 1 Ano)

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

Data: 28/11/1994 (Época Especial[1])
Duração: 3h00.

I.

Considere a equação diferencial $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{h}(t)$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{h}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \end{bmatrix}.$$

a) Determine a solução geral da equação homogénea associada à equação dada.

b) Determine o maior subconjunto L de $\mathbb{R}^3$ tal que soluções da equação homogénea com condições iniciais em L são limitadas em $\mathbb{R}^-$.

c) Determine a solução da equação dada que passa pelo ponto $\mathbf{y}(0) = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$.

II.

Considere a equação diferencial ordinária escalar

$$x''' + 8x = te^t + \cos t.$$

a) Determine uma solução particular desta equação.

b) Determine a solução geral desta equação.

III.

Considere a equação diferencial não-linear separável $x' = x \sin t + x^2 \sin t$.

a) Determine a solução desta equação que satisfaz a condição inicial $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$.

b) Determine o intervalo máximo de existência da solução obtida na alínea anterior.

[1]Para Finalistas, Atletas de Alta Competição, Militares, O.S., ...

IV.

Considere a equação diferencial $x'' + G(x) = 0$, com $G(x) = -2x + 3x^2$.

a) Identifique a mudança de variáveis que permite escrever a equação dada na forma do seguinte sistema de primeira ordem

$$\begin{cases} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -g(x_1) \end{cases} \tag{17}$$

e relacione g com a função dada G.

b) Determine os pontos de equilíbrio do sistema (17) e verifique se o método de linearização em torno desses pontos de equilíbrio pode ser aplicado ao estudo de (17).

c) Determine uma função $E(x_1, x_2)$ que seja constante ao longo das soluções de (17).

d) Utilize os resultados das alíneas anteriores para esboçar o retrato de fase de (17).
Sugestão: se não resolveu a alínea anterior utilize a função $E(x_1, x_2) = -2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1^3$.

e) Identifique no retrato de fase as regiões que correspondem a: *(i)* Soluções periódicas, *(ii)* Soluções não-periódicas limitadas e *(iii)* Soluções ilimitadas.

V.

a) Determine as soluções de

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times]0,\pi[\\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & t \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial $u(0,x) = (\pi - x)x$.

Resolução:

I.

a) Sabendo que a solução geral pretendida pode ser escrita na forma $\mathbf{y}(t) = e^{At}\mathbf{y}(0)$ iremos calcular e^{At}. Os valores próprios de A são os zeros do polinómio característico

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = (1-\lambda)[(2-\lambda)(-\lambda)+1] = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = -(\lambda-1)^3.$$

Conclui-se daqui que $\lambda = 1$ (com multiplicidade algébrica igual a 3) é o único valor próprio de A. O nucleo de $A - I_3$ é constituido pelos vectores $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^{\mathrm{T}}$ que satisfazem

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} v_2 = 0 \\ v_2 - v_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_2 = 0 \\ v_3 = 0. \end{cases}$$

Consequentemente o espaço próprio de A associado a $\lambda = 1$ é o seguinte subespaço unidimensional de $\mathbb{R}^3 : E = \{(\alpha, 0, 0)^{\mathrm{T}} : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Tendo $\lambda = 1$ multiplicidade algébrica igual a 3 e geométrica igual a 1 conclui-se que existe uma matriz de mudança de base de $\mathbb{R}^3$, S, tal que $A = SJS^{-1}$ e J é a matriz de Jordan associada a A:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente tem-se

$$\begin{aligned}
AS = SJ \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & a_3 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & a_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ 0 & 2a_2 - a_3 & 2b_2 - b_3 \\ 0 & a_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 + a_1 & a_1 + b_1 \\ 0 & a_2 & a_2 + b_2 \\ 0 & a_3 & a_3 + b_3 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 + a_2 = 1 + a_1 \\ b_1 + b_2 = a_1 + b_1 \\ 2a_2 - a_3 = a_2 \\ 2b_2 - b_3 = a_2 + b_2 \\ a_2 = a_3 \\ b_2 = a_3 + b_3 \end{cases} \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a_2 = a_3 = 1 \\ b_2 = 1 + b_3 \\ b_2 = a_1 \end{cases}
\end{aligned}$$

e a_1 e b_1 são reais arbitrários. Uma possível matriz S, obtida fazendo $a_1 = b_1 = 0$, é a seguinte

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

A sua inversa é facilmente calculável (usando, por exemplo, eliminação de Gauss) obtendo-se $S^{-1} = S$. Podemos agora calcular e^{At} : como $A = SJS^{-1}$ tem-se $e^{At} = Se^{Jt}S^{-1} = Se^{Jt}S$ e tendo em conta que

$$\begin{aligned} e^{Jt} &= e^{(I_3+N_3)t} = e^{I_3t}e^{N_3t} = \\ &= e^tI_3\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & t^2/2! \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \\ &= e^t \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2! \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

conclui-se que

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2! \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \\ &= e^t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t+t^2/2! & -t^2/2! \\ 0 & 1+t & -t \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= e^t \begin{bmatrix} 1 & t+t^2/2! & -t^2/2! \\ 0 & 1+t & -t \\ 0 & t & 1-t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e a solução geral pretendida pode ser escrita como

$$\mathbf{y}(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 & t+t^2/2 & -t^2/2 \\ 0 & 1+t & -t \\ 0 & t & 1-t \end{bmatrix} \mathbf{y}(0)$$

b) Do resultado da alínea anterior, escrevendo $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))^{\mathrm{T}}$, observa-se que

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} y_1(0) + y_2(0)\left(t + \frac{t^2}{2}\right) - y_3(0)\frac{t^2}{2} \\ y_2(0)(1+t) - y_3(0)t \\ y_2(0)t + y_3(0)(1-t) \end{bmatrix}.$$

Para que esta função seja limitada quando $t \in \mathbb{R}^-$ é necessário e suficiente que cada uma das suas funções coordenadas o seja. Atendendo a que para qualquer polinómio $p(t)$ a função $p(t)e^t$ tende para 0 quando $t \to -\infty$ e é contínua em $\mathbb{R}$, conclui-se que, qualquer que seja a condição inicial $(y_1(0), y_2(0), y_3(0))^{\mathrm{T}}$, a solução é limitada em $\mathbb{R}^-$.

c) Uma solução particular da equação não-homogénea pode ser determinada pela fórmula de variação das constantes:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{\text{part}}(t) &= e^{At}\int_0^t e^{-As}\mathbf{h}(s)ds = \\
&= e^t \begin{bmatrix} 1 & t+t^2/2 & -t^2/2 \\ 0 & 1+t & -t \\ 0 & t & 1-t \end{bmatrix} \int_0^t e^{-s} \begin{bmatrix} 1 & -s+s^2/2 & -s^2/2 \\ 0 & 1-s & s \\ 0 & -s & 1+s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^s \end{bmatrix} ds = \\
&= e^t \begin{bmatrix} 1 & t+t^2/2 & -t^2/2 \\ 0 & 1+t & -t \\ 0 & t & 1-t \end{bmatrix} \int_0^t e^{-s} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}s^2e^s \\ se^s \\ (1+s)e^s \end{bmatrix} ds = \\
&= e^t \begin{bmatrix} 1 & t+t^2/2 & -t^2/2 \\ 0 & 1+t & -t \\ 0 & t & 1-t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{6}t^3 \\ \frac{1}{2}t^2 \\ t+\frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix} = \\
&= e^t \begin{bmatrix} -\frac{1}{6}t^3 \\ -\frac{1}{2}t^2 \\ t-\frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

e, atendendo à expressão para a solução geral da equação homogénea dada na alínea anterior é à condição inicial imposta, conclui-se que

$$\mathbf{y}(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} -\frac{1}{6}t^3 \\ -\frac{1}{2}t^2 \\ t-\frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 1-\frac{1}{6}t^3 \\ -\frac{1}{2}t^2 \\ t-\frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix}.$$

II.

a) Uma solução particular da equação pode ser obtida, por exemplo, pelo método de "guessing" do seguinte modo: a equação homogénea pode ser escrita como $(D^3+8)x = 0$ pelo que os zeros do polinómio característico associado são as raízes cúbicas de -8, ou seja,

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 2e^{i\pi/3}, \quad \lambda_3 = 2e^{-i\pi/3}.$$

Atendendo a que as funções $h_1(t) = te^t$ e $h_2(t) = \cos t = \operatorname{Re}\left(e^{it}\right)$ são soluções das equações diferenciais $(D-1)^2h = 0$ e $(D^2+1)h = 0$, respectivamente, conclui-se que as soluções particulares (complexas) são do tipo

$$x_{\mathbb{C}}(t) = (\alpha_1 t + \alpha_2)e^t + \alpha_3 e^{it}$$

o que fornece

$$\begin{aligned}
x'_{\mathbb{C}}(t) &= (\alpha_1+\alpha_2)e^t + \alpha_1 te^t + i\alpha_3 e^{it} \\
x''_{\mathbb{C}}(t) &= (2\alpha_1+\alpha_2)e^t + \alpha_1 te^t - \alpha_3 e^{it} \\
x'''_{\mathbb{C}}(t) &= (3\alpha_1+\alpha_2)e^t + \alpha_1 te^t - i\alpha_3 e^{it}
\end{aligned}$$

donde se obtém

$$(3\alpha_1+\alpha_2)e^t+\alpha_1 te^t - i\alpha_3 e^{it} + 8(\alpha_1 t+\alpha_2)e^t + 8\alpha_3 = te^t + e^{it},$$

ou seja,

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + 9\alpha_2 = 0 \\ 9\alpha_1 = 1 \\ (8-i)\alpha_3 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{9} \\ \alpha_2 = -\frac{1}{27} \\ \alpha_3 = \frac{1}{8-i} = \frac{8+i}{65} \end{cases}$$

Conclui-se assim que uma solução particular complexa é

$$\begin{aligned} x_{\mathbb{C}}(t) &= \left(\frac{1}{9}t - \frac{1}{27}\right)e^t + \left(\frac{8}{65}+\frac{1}{65}i\right)(\cos t + i\sin t) = \\ &= \left(\frac{1}{9}t - \frac{1}{27}\right)e^t + \left(\frac{8}{65}\cos t - \frac{1}{65}\sin t\right) + i\left(\frac{1}{65}\cos t + \frac{8}{65}\sin t\right) \end{aligned}$$

pelo que uma solução particular real é

$$x_{\text{part}}(t) = \left(\frac{1}{9}t - \frac{1}{27}\right)e^t + \frac{8}{65}\cos t - \frac{1}{65}\sin t.$$

b) Atendendo a que a solução geral (real) da equação não-homogénea pode ser escrita como

$$x(t) = x_{\text{hom}}(t) + x_{\text{part}}(t)$$

onde $x_{\text{part}}(t)$ é uma solução particular da equação não-homogénea (por exemplo a calculada na alínea anterior) e $x_{\text{hom}}(t)$ é a solução geral da equação homogénea $(D^3+8)x = 0$, a qual é, atendendo aos resultados acima sobre os zeros do polinómio característico,

$$x_{\text{hom}}(t) = \alpha_1 e^{-2t} + \alpha_2 e^{2t}\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + \alpha_3 e^{2t}\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right),$$

o resultado pretendido é

$$x(t) = \alpha_1 e^{-2t} + \alpha_2 e^{2t}\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + \alpha_3 e^{2t}\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) + \left(\frac{1}{9}t - \frac{1}{27}\right)e^t + \frac{8}{65}\cos t - \frac{1}{65}\sin t.$$

III.

a) Observando que a equação é separável tem-se, após multiplicação de ambos os membros por $\frac{1}{x+x^2}$, supondo que $x+x^2 \neq 0$,

$$\frac{1}{x+x^2}\frac{dx}{dt} = \sin t.$$

Integrando ambos os membros entre $\pi/2$ e um valor arbitrário de t vem

$$\begin{array}{rcl}
& \int_{\pi/2}^{t} \frac{1}{x+x^2}\frac{dx}{ds}ds = \int_{\pi/2}^{t} \sin s ds & \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow & \int_{-2}^{x(t)} \frac{1}{x(1+x)}dx = -\cos t + \cos\frac{\pi}{2} & \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow & \log|x(t)| - \log 2 - \log|1+x(t)| + \log 1 = -\cos t & \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow & \log\left|\frac{x(t)}{1+x(t)}\right| = \log 2 - \cos t & \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow & \frac{x(t)}{1+x(t)} = 2e^{-\cos t} &
\end{array}$$

onde na última passagem o sinal foi escolhido atendendo a que em $t = \pi/2$ se tem

$$\frac{x(\pi/2)}{1+x(\pi/2)} = \frac{-2}{1-2} = 2 > 0.$$

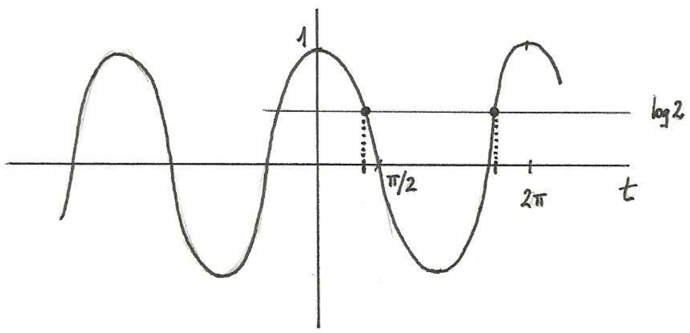
Pode-se então concluir que

$$x(t) = \frac{2e^{-\cos t}}{1-2e^{-\cos t}}.$$

b) Comecemos por determinar o domínio da função $x(t)$:

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{D}_{x(\cdot)} & = & \left\{t \in \mathbb{R} : 1 - 2e^{-\cos t} \neq 0\right\} = \\
& = & \left\{t \in \mathbb{R} : \cos t \neq \log 2\right\}.
\end{array}$$

O subintervalo do domínio que contém o ponto $t = \pi/2$ é $I =]\arccos\log 2, 2\pi - \arccos\log 2[$ (cf. Figura 8).



$I =]\arccos\log 2, 2\pi - \arccos\log 2[$.

Figura 8: Visualização do modo de determinação do intervalo I.

Atendendo a que $x(t)$ é de classe $\mathcal{C}^\infty$ no seu domínio (e portanto, em particular, é $\mathcal{C}^1$) conclui-se que o intervalo máximo de existência da solução é o intervalo I apresentado acima.

IV.

a) Observando que o sistema (17) implica que $x_1'' = x_2' = -g(x_1)$, ou seja $x_1'' + g(x_1) = 0$ conclui-se que uma mudança de variáveis que tenha transformado $x'' + G(x) = 0$ no sistema (17) pode ser $x_1 = x$ e $x_2\,(= x_1') = x'$, com $g = G$.

b) Os pontos de equilíbrio de (17) são as soluções de

$$\begin{cases} 0 = x_2 \\ 0 = -g(x_1) \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = 0 \\ 2x_1 - 3x_1^2 = 0 \end{cases}$$

ou seja $(x_1, x_2) = (0, 0)$ e $(x_1, x_2) = \left(\frac{2}{3}, 0\right)$. A matriz jacobiana do sistema é

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 - 6x & 0 \end{bmatrix}$$

pelo que se tem o seguinte:

- linearização em torno de $(0, 0)$:

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Valores próprios: $0 = \det\left(J(0, 0) - \lambda I_2\right) = \lambda^2 - 2 \iff \lambda_1 = \sqrt{2}, \lambda_2 = -\sqrt{2}$ e como $\mathrm{Re}\left(\lambda_1\right), \mathrm{Re}\left(\lambda_2\right) \neq 0$ podemos utilizar a linearizaçao em torno de $(0, 0)$ a fim de estudarmos o comportamento das órbitas do sistema não-linear (17) numa pequena vizinhança desse ponto de equilíbrio.

- linearização em torno de $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$:

$$J\left(\frac{2}{3}, 0\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Valores próprios: $0 = \det\left(J\left(\frac{2}{3}, 0\right) - \lambda I_2\right) = \lambda^2 + 2 \iff \lambda_1 = i\sqrt{2}, \lambda_2 = -i\sqrt{2}$ e como $\mathrm{Re}\left(\lambda_1\right) = \mathrm{Re}\left(\lambda_2\right) = 0$ o método de linearização não é aplicável.

c) Seja $E(x_1, x_2)$ uma função real definida em $\mathbb{R}^2$. Pretende-se ver se é possível encontrar uma função destas que seja constante ao longo de órbitas de (17), i.e., tal que

$$\frac{d}{dt} E\left(x_1(t), x_2(t)\right) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Se E fôr uma função satisfazendo esta condição, terá de se verificar

$$\frac{\partial E}{\partial x_1} x_1' + \frac{\partial E}{\partial x_2} x_2' = 0,$$

ou seja, como $x_1(t)$ e $x_2(t)$ satisfazem (17),

$$\frac{\partial E}{\partial x_1}x_2 - \frac{\partial E}{\partial x_2}g(x_1) = 0.$$

Para que esta última igualdade se verifique é suficiente que

$$\frac{\partial E}{\partial x_1} = g(x_1) \quad \text{e} \quad \frac{\partial E}{\partial x_2} = x_2.$$

Vejamos se estas duas equações podem ser simultaneamente satisfeitas: da primeira tem-se, primitivando ambos os membros em ordem a x_1,

$$E(x_1, x_2) = \int g(x_1)dx_1 + k_1(x_2)$$

onde $k_1(x_2)$ é uma constante para a primitivação em ordem a x_1 (a qual pode, obviamente, ser função de x_2.) Analogamente, primitivando a outra equação em ordem a x_2 tem-se

$$E(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + k_2(x_1)$$

onde $k_2(x_1)$ não depende de x_2. Comparando estas duas expressões para $E(x_1, x_2)$ conclui-se que se pode tomar

$$E(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int g(x_1)dx_1 = \frac{1}{2}x_2^2 - x_1^2 + x_1^3.$$

d) Comecemos por linearizar em torno do equilíbrio $(0, 0)$: Os valores e vectores próprios da matriz jacobiana $J(0, 0)$ são

- valor próprio $\lambda_1 = \sqrt{2}$, com vector próprio $\mathbf{v}^{(1)} = \left(v_1^{(1)}, v_2^{(1)}\right)^{\mathrm{T}}$, onde

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 1 \\ 2 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \iff v_2^{(1)} = \sqrt{2}v_1^{(1)}$$

  pelo que se pode escolher $\mathbf{v}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$.

- valor próprio $\lambda_1 = \sqrt{2}$: cálculos análogos aos anteriores permitem obter $\mathbf{v}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Numa vizinhança de $(0, 0)$ o retrato de fase é o esboçado na Figura 9.

O comportamento das órbitas de (17) no exterior de pequenas vizinhanças de $(0, 0)$ não pode ser estudado com recurso à linearização apresentada, mas pode usar-se o facto da função

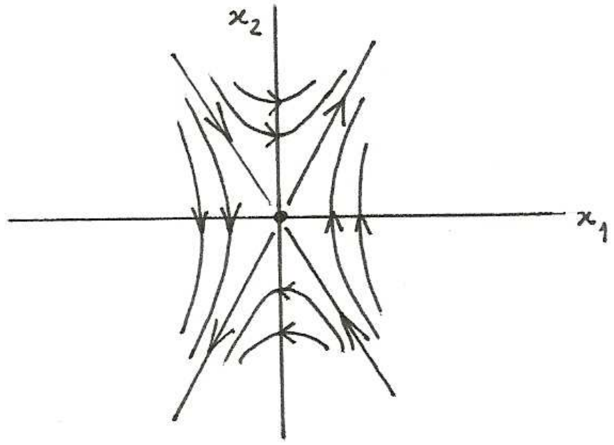


Figura 9: Retrato de fases de (17) numa vizinhança de $(0,0)$.

$E(x_1,x_2)$ determinada na alínea anterior ser uma constante do movimento para (17). Atendendo a que $x_2^2 \geq 0$ vem

$$E(x_1,x_2) = \underbrace{\frac{1}{2}x_2^2}_{=:E_c(x_2)} + \underbrace{\left(-x_1^2+x_1^3\right)}_{=:E_p(x_1)} \geq E_p(x_1)$$

e têm-se os esboços para o gráfico de E_p e para os conjuntos de nível de E apresentados nas Figuras 10 e 11.

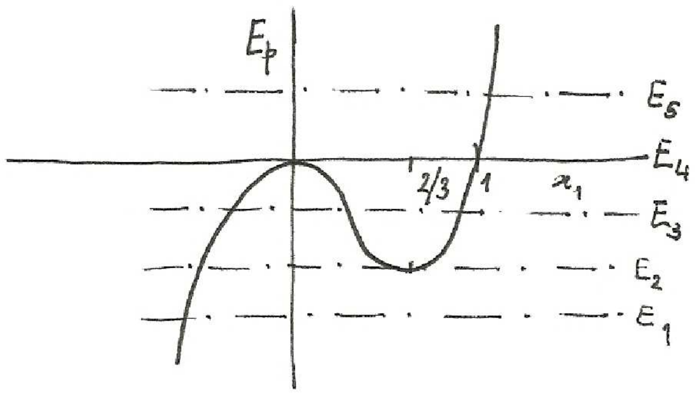


Figura 10: Gráfico de E_p.

onde $\mathcal{E}_j = \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : E(x_1,x_2) = E_j\right\}$. Atendendo à primeira equação do sistema (17)

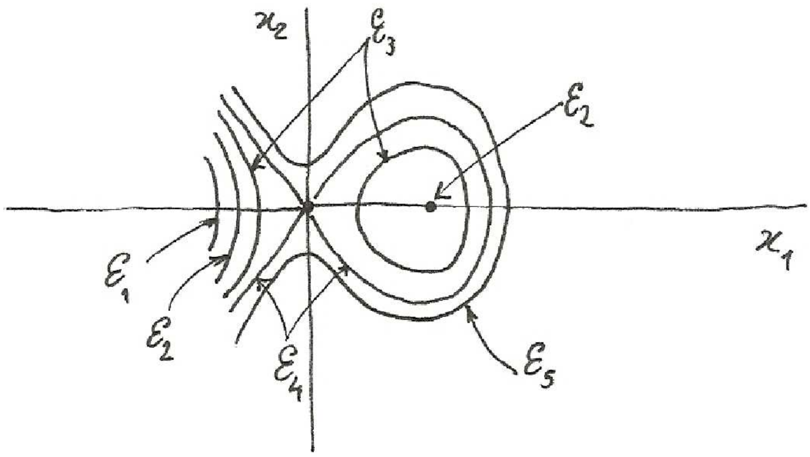


Figura 11: Conjuntos de nível de E.

tem-se que $x_1(t)$ é crescente em regiões do espaço de fases onde $x_2 > 0$ pelo que se pode esboçar o retrato de fases apresentado na Figura 12.

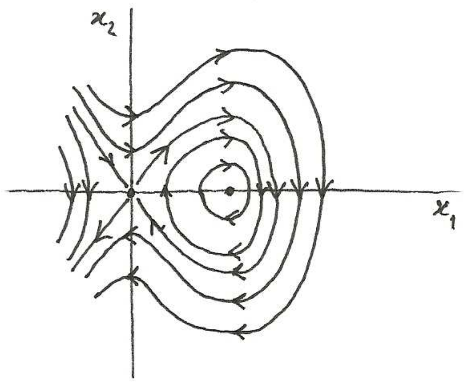


Figura 12: Esboço do retrato de fases do sistema (17).

e) Atendendo ao retrato de fase esboçado acima conclui-se o apresentado na Figura 13.

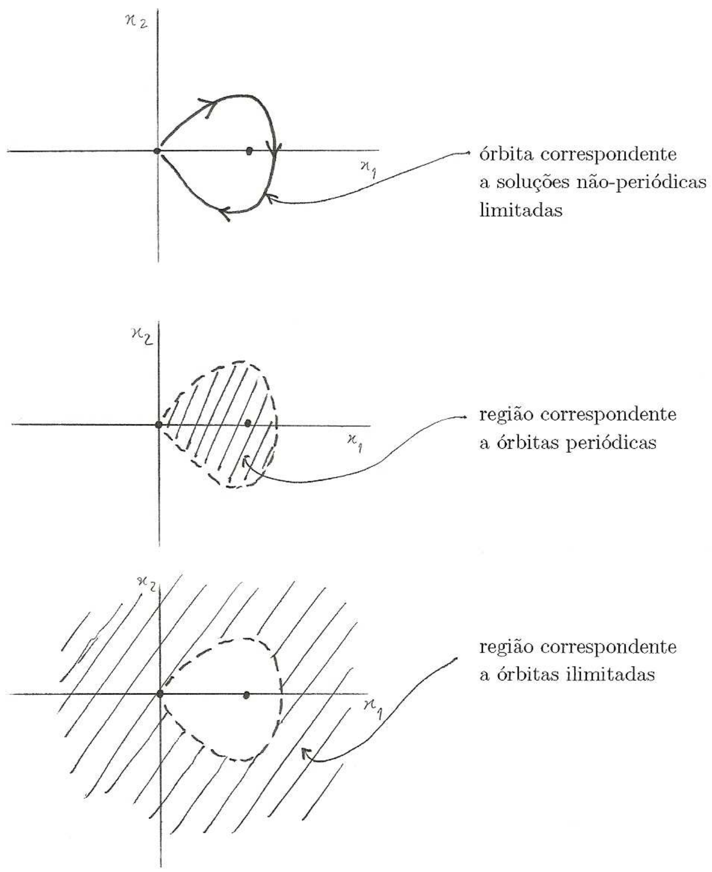


Figura 13: Resolução da alínea e).

V.

a) Recorrendo ao método de separação de variáveis pode-se procurar soluções do tipo $u(t,x) = T(t)X(x)$, caso em que a equação dada se escreve como

$$T'X = TX'' - TX.$$

Supondo que $T(t) \neq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$ e $X(x) \neq 0$, $\forall x \in]0,\pi[$ pode-se dividir esta equação por $T(t)X(x)$ vindo

$$\frac{T'}{T}(t) = \frac{X''}{X}(x) - 1.$$

Observando que o membro esquerdo desta equação só depende de t, o direito só depende de x e que a equação deverá ser satisfeita para todos os pontos (t,x) no aberto $\mathbb{R}^+ \times]0,\pi[$, conclui-se que terá de existir uma constante real σ independente de t e de x tal que

$$\frac{T'}{T}(t) = \sigma = \frac{X''}{X}(x) - 1,$$

ou seja,

$$\begin{cases} T' - \sigma T = 0 \\ X'' - (1+\sigma)X = 0, \end{cases}$$

com as condições na fronteira

$$\begin{cases} 0 = u(t,0) = T(t)X(0) \\ 0 = u(t,\pi) = T(t)X(\pi) \end{cases} \implies X(0) = X(\pi) = 0.$$

Comecemos por determinar as soluções não-triviais (não identicamente nulas) do problema de valores na fronteira para $X(x)$:

$$\begin{cases} X'' - (1+\sigma)X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0. \end{cases}$$

- Se $1+\sigma = 0$ a equação diferencial fica reduzida a $X'' = 0$ cujas soluções são $X(x) = ax+b$ e atendendo às condições na fronteira $0 = X(0) = b$ e $0 = X(\pi) = a\pi + b$ conclui-se imediatamente que $a = b = 0$ e portanto a única solução do problema é a solução trivial $X(x) \equiv 0$.
- Seja agora $1 + \sigma > 0$. A solução geral da equação é $X(x) = ae^{\sqrt{1+\sigma}x} + be^{-\sqrt{1+\sigma}x}$. Atendendo às condições na fronteira tem-se $0 = X(0) = a + b$ e $0 = X(\pi) = ae^{\sqrt{1+\sigma}\pi} + be^{-\sqrt{1+\sigma}\pi}$ cuja única solução é $a = b = 0$ fornecendo como única solução da equação a função identicamente nula $X(x) \equiv 0$.
- Finalmente tome-se $1 + \sigma < 0$. Por facilidade de notação é conveniente escrever $1 + \sigma = -\lambda^2$ com $\lambda > 0$. A solução geral real da equação diferencial é agora $X(x) = a\cos\lambda x + b\sin\lambda x$. E as condições na fronteira fornecem

  $$\begin{cases} 0 = X(0) = a \\ 0 = X(\pi) = a\cos\lambda\pi + b\sin\lambda\pi, \end{cases}$$

  ou seja

  $$\begin{cases} a = 0 \\ b\sin\lambda\pi = 0, \end{cases}$$

  pelo que $\lambda = \lambda_k = k$, com $k \in \mathbb{N}_1$ arbitrário (pois caso contrário teria de ser $b = 0$ e ter-se-ia $X(x) = 0$.) Obtêm-se assim infinitas soluções do problema de valores na fronteira, em particular as funções

  $$X_k(x) = \sin kx,$$

  e todas as combinações lineares de um número finito destas funções.

Tendo em atenção que $\sigma = -1 - \lambda^2 = -1 - k^2$ tem-se a equação para T escrita na forma

$$T' = -(1+k^2)T$$

cuja solução geral é $T_k(t) = \alpha_k e^{-(1+k^2)t}$ com $\alpha_k \in \mathbb{R}$ arbitrário. Atendendo ao que ficou escrito acima podemos concluir que a solução formal do problema apresentado é

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin(kx) e^{-(1+k^2)t}.$$

b) Para que a solução formal encontrada na alínea anterior satisfaça a condição inicial dada há que escolher as constantes α_k de modo a que

$$(\pi - x)x = u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin(kx),$$

ou seja, os α_k devem ser os coeficientes da série de Fourier de senos da função $2\pi-$periódica cuja restrição a $[0,\pi]$ é igual a $f(x) = (\pi - x)x$.

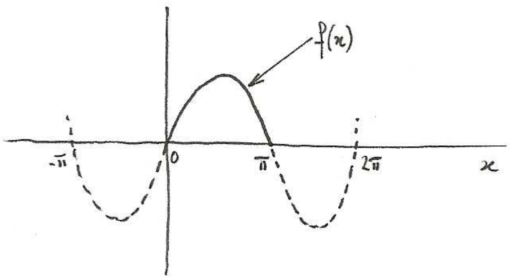


Figura 14: Gráfico da função f e do seu prolongamento.

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)x\sin(kx)dx = \\
&= 2\int_0^{\pi} x\sin(kx)dx - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\sin(kx)dx \\
&\quad \text{(primitivando por partes uma vez o primeiro integral e duas vezes o segundo)} \\
&= 2\left(-\frac{x}{k}\cos kx + \frac{1}{k^2}\sin kx\right)\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x^2}{k}\cos kx + \frac{2x}{k^2}\sin kx + \frac{2}{k^3}\cos kx\right)\Big|_0^{\pi} = \\
&= \frac{4}{k^3\pi}\left(1 + (-1)^k\right) = \\
&= \begin{cases} \frac{8}{k^3\pi} & \text{se } k \text{ é par} \\ 0 & \text{se } k \text{ é ímpar} \end{cases}
\end{aligned}$$

pelo que concluimos que

$$\alpha_{2n+1} = 0 \quad \text{e} \quad \alpha_{2n} = \frac{1}{n^3\pi}$$

e a solução formal pretendida é

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3\pi} \sin(2nx) e^{-(1+4n^2)t}.$$

Exame de 10.7.95 e resolução.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

(Ambiente, Mecânica)

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

Data: 10/7/1995 **Duração:** 3h00.

I.

Considere o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias lineares

$$\begin{cases} x_1' &= -x_1 \\ x_2' &= x_2 - x_3 \\ x_3' &= -x_3 + \beta(t) \end{cases} \tag{18}$$

onde $\beta(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

1. Escreva (18) na forma vectorial $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ indicando explicitamente qual é a matriz A e o vector $\mathbf{b}(t)$.

2. Seja $\beta(t) \equiv 0$.

   a) Determine a matriz fundamental e^{At} do sistema.

   b) Determine para que condições iniciais as soluções de (18) têm limite finito quando $t \to +\infty$ e calcule o valor desse limite.

3. Seja $\beta(t) \equiv t$.
   Determine uma solução particular de (18) e escreva uma expressão para a solução geral do sistema.

II.

Considere a equação diferencial linear

$$x'' + a(t)x' + x = b(t) \tag{19}$$

onde $a(\cdot)$ e $b(\cdot)$ são funções reais, contínuas, definidas em $\mathbb{R}$.

1. Faça $a(t) \equiv 0$ e $b(t) \equiv -t$.

   a) Determine uma base para o espaço das soluções do problema homogéneo associado.

   b) Determine a solução de (19) que satisfaz a condição inicial $x(0) = x'(0) = 0$.

2. Seja agora $a(t) \equiv -t$ e $b(t) \equiv 0$.
   Aplicando transformadas de Laplace a (19) obtenha a solução desta equação que satisfaz a condição inicial $x(0) = x'(0) - 2 = 0$.
   Sugestão: Poderá ser útil relembrar que, sendo $f(s) = L[F](s)$ a transformada de Laplace da função $F(t)$ então, com condições convenientes sobre F (quais?) tem-se

$$L[F^{(n)}](s) = s^n f(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0) - \cdots - F^{(n-1)}(0)$$
$$L[(-t)^n F(t)](s) = f^{(n)}(s).$$

III.

Considere a função ψ definida em $\mathbb{R}$, periódica de período 2, par, tal que a sua restrição ao intervalo $[0,1]$ é $\psi(x) = x$.

a) Escreva a expressão da série de Fourier de ψ.

b) Estude a série de Fourier que obteve na alínea anterior quanto às suas propriedades de convergência pontual e uniforme, e estabeleça, justificando devidamente, a relação entre a soma da série e o valor da função ψ para todos os pontos $x \in \mathbb{R}$.

IV.

Um modelo simplificado para a propagação de impulsos nervosos num axónio é constituido pelas equações de Fitzhugh-Nagumo que, numa versão simplificada, são

$$u_t = u_{xx} + f(u) \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \tag{20}$$

onde $u = u(x,t)$ e $f(u) = -u(u-1)(u-\frac{1}{4})$.
Um impulso nervoso é, tecnicamente, uma onda de despolarização elétrica que se propaga ao longo do axónio a uma velocidade constante V. Isto corresponde, matematicamente, à existência de soluções de (20) satisfazendo as condições

$$\begin{cases} u(x,t) \longrightarrow 0 & \text{quando} \quad x \to -\infty \\ u(x,t) \longrightarrow 1 & \text{quando} \quad x \to +\infty \end{cases} \tag{21}$$

e tal que a "transição" entre 0 e 1 propaga-se com velocidade constante V (x é a distância ao longo do axónio, que se supõe de comprimento infinito, $x \in \mathbb{R}$.) O objectivo deste exercício é, através de uma sucessão de passos simples, provar a existência de soluções de (20) com estas características.

1.a) Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x+Vt) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t)$. Considere a mudança de variáveis $s = x + Vt$. Verifique que se u é solução de (20)-(21) então φ satisfaz

$$\begin{cases} \varphi'' - V\varphi' + f(\varphi) = 0, & s \in \mathbb{R} \\ \varphi(s) \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad s \to -\infty & \\ \varphi(s) \longrightarrow 1 \quad \text{quando} \quad s \to +\infty & \end{cases} \tag{22}$$

onde $(\cdot)' = \frac{d}{ds}$.

b) Defina as variáveis dependentes $y_1(s) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(s)$ e $y_2(s) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi'(s)$. Mostre que nas novas variáveis (y_1, y_2) a equação diferencial (22) fica transformada no sistema

$$\begin{cases} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= Vy_2 - f(y_1) \end{cases} \tag{23}$$

2.a) Considere o caso $V = 0$ em (23). Mostre que a função

$$E(y_1, y_2) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}y_2^2 + \int_0^{y_1} f(z)dz$$

é uma constante do movimento para (23).

b) Utilizando a alínea anterior e relembrando que $f(u) = -u(u-1)(u-\frac{1}{4})$, esboce o retrato de fase de (23) (com $V = 0$.)

3.a) Considere agora $V > 0$. Prove que

$$\frac{d}{ds}E(y_1(s), y_2(s)) = V \cdot (y_2(s))^2.$$

b) Linearizando (23) em torno da origem, mostre que a solução nula ($y_1 = y_2 = 0$) é um ponto de equilíbrio instável (ponto de sela) para todos os $V > 0$. Verifique que o mesmo se passa para o ponto de equilíbrio $(y_1, y_2) = (1, 0)$.

4. Tendo presente os resultados de dependência contínua em relação às condições iniciais e parâmetros, utilize os resultados das alíneas anteriores e um argumento de continuidade para mostrar que existe pelo menos um valor de $V > 0$ para o qual (23) tem uma solução que verifica

$$\begin{cases} (y_1(s), y_2(s)) \longrightarrow (0,0) & \text{quando} \quad s \to -\infty \\ (y_1(s), y_2(s)) \longrightarrow (1,0) & \text{quando} \quad s \to +\infty \end{cases}$$

Observação final: Atendendo a que $u(x,t) = \varphi(s) = y_1(s)$, o resultado na alínea 4. prova a existência de soluções de (20) do tipo pretendido.

Resolução:

I.

1. Sendo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$ tem-se

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 - x_3 \\ -x_3 + \beta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta(t) \end{bmatrix}$$

pelo que $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta(t) \end{bmatrix}$.

2.a) A matriz A é uma matriz diagonal por blocos: $A = \operatorname{diag}(-1, A_1)$ onde $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Assim, tem-se $e^{At} = \operatorname{diag}\left(e^{-t}, e^{A_1 t}\right)$. O cálculo de $e^{A_1 t}$ pode ser efectuado por qualquer dos métodos estudados. Vejamos que de facto assim é[2]

- Pela definição:

  Por definição $e^{A_1 t} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{t^j}{j!} A_1^j$. Observando que

$$A_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

  conclui-se que $A_1^j = A_1$ se j é ímpar e $A_1^j = I_2$ se j é par, pelo que se tem

$$\begin{aligned} e^{A_1 t} &= I_2 + A_1 t + \frac{1}{2!} I_2 t^2 + \frac{1}{3!} A_1 t^3 + \frac{1}{4!} I_2 t^4 + \ldots = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t & -t \\ 0 & -t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t^2/2! & 0 \\ 0 & t^2/2! \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t^3/3! & -t^3/3! \\ 0 & -t^3/3! \end{bmatrix} + \ldots = \\ &= \begin{bmatrix} 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \ldots & -t - \frac{1}{3!}t^3 - \ldots \\ 0 & 1 - t + \frac{1}{2!}t^2 - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4 - \ldots \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} e^t & -\frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right) \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Pelo método de Putzer:

  Sendo A_1 uma matriz triangular os valores próprios são os elementos da diagonal principal: $\lambda_1 = 1$, e $\lambda_2 = -1$. Tem-se $P_0(A_1) = I_2$ e $P_1(A_1) = (A_1 - \lambda_1 I_2) P_0(A_1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$,

[2] Claro que no exame bastava utilizar *um* dos métodos!...

e ainda o sistema seguinte para as funções $r_j(t)$:

$$\begin{cases} r_1' = r_1, & r_1(0) = 1 \\ r_2' = -r_2 + r_1, & r_2(0) = 0 \end{cases}$$

donde $r_1(t) = e^t$ e a equação para r_2 pode ser resolvida do seguinte modo: multiplicando-a por uma função $\mu = \mu(t)$ vem $\mu r_2' + \mu r_2 = \mu e^t$; para que o membro esquerdo seja igual a $(\mu r_2)' = \mu r_2' + \mu' r_2$ é suficiente tomar μ satisfazendo $\mu' = \mu$, isto é, $\mu = e^t$. Então, multiplicando a equação por este factor integrante, integrando ambos os membros da equação resultante e atendendo à condição inicial para r_2 conclui-se que $r_2(t) = \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right)$. O resultado pretendido é

$$\begin{aligned} e^{A_1 t} &= r_1(t)P_0(A_1) + r_2(t)P_1(A_1) = \\ &= e^t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} e^t & -\frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right) \\ 0 & e^t - \left(e^t - e^{-t}\right) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} e^t & -\frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right) \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Pela redução a formas canónicas:

Os valores próprios de A_1 são distintos $(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1)$ pelo que a matriz é diagonalizável, i.e., existe uma matriz invertível M tal que $A = MDM^{-1}$ com D é uma matriz diagonal. Sabe-se que se pode tomar para matriz M uma matriz cujas colunas são vectores próprios de A. Estes são os seguintes: correspondendo a $\lambda_1 = 1$:

$$(A_1 - \lambda_1 I_2)\,\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{cases} -v_2^{(1)} = 0 \\ -2v_2^{(1)} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \mathbf{v}^{(1)} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é arbitrário. Cálculos análogos para o valor próprio $\lambda_2 = -1$ fornecem

$$\mathbf{v}^{(2)} = \begin{bmatrix} \beta \\ 2\beta \end{bmatrix}, \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Sem perda de generalidade pode tomar-se $\alpha = \beta = 1$. A matriz de mudança de base de $\mathbb{R}^2$, M, é então

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

e

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

pelo que $D = M^{-1}AM = \text{diag}(1,-1)$ e tem-se

$$\begin{aligned} e^{A_1 t} &= Me^{Dt}M^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} e^t & -\frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right) \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

▬ Pelo método dos valores e vectores próprios:
Já calculámos na resolução pelo método anterior os vectores próprios de A. Assim, uma matriz fundamental do sistema linear bidimensional com matriz A_1 será

$$\Phi(t) = \left[\ e^t\mathbf{v}^{(1)}\ \middle|\ e^{-t}\mathbf{v}^{(2)}\ \right] = \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} \\ 0 & 2e^{-t} \end{bmatrix}$$

e portanto

$$\begin{aligned} e^{A_1 t} &= \Phi(t)\cdot\Phi^{-1}(0) = \\ &= \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} \\ 0 & 2e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} \\ 0 & 2e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} e^t & -\frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right) \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Atendendo ao resultado fornecido por qualquer dos métodos apresentados para a matriz $e^{A_1 t}$ conclui-se que

$$\begin{aligned} e^{At} &= \text{diag}\left(e^{-t}, e^{A_1 t}\right) = \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & -\frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right) \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2.b) A solução geral de (18) é $\mathbf{x}(t) = e(At)\mathbf{x}(0)$ pelo que, atendendo ao resultado da alínea anterior,

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & -\frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right) \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}x_1(0) \\ e^t x_2(0) - \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right)x_3(0) \\ e^{-t}x_3(0) \end{bmatrix}.$$

Quando $t \to +\infty$ tem-se $e^{-t} \to 0$ e $e^t \to +\infty$ e portanto, para que $\mathbf{x}(t)$ tenha limite finito é necessário e suficiente que $e^t x_2(0) - \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right)x_3(0)$ seja limitado, ou seja, que $e^t\left(x_2(0) - \frac{1}{2}x_3(0)\right)$ seja limitado, o que requer que $x_2(0) = \frac{1}{2}x_3(0)$. Conclui-se então que as condições iniciais pretendidads são do tipo $(x_1(0), x_2(0), x_3(0))^{\mathrm{T}} = (\alpha, \beta, 2\beta)^{\mathrm{T}}$, $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Evidentemente que para condições iniciais deste tipo tem-se, utilizando a expressão da solução geral escrita acima,

$$\mathbf{x}(t) \longrightarrow (0,0,0)^{\mathrm{T}} \text{ quando } t \to +\infty.$$

3. Uma solução particular pode ser obtida pela fórmula de variação das constantes:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_{\text{part}}(t) &= \Phi(t)\int \Phi^{-1}(s)\mathbf{b}(s)ds = \\
&= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & -\frac{1}{2}\left(e^{t}-e^{-t}\right) \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} e^{-s} & 0 & 0 \\ 0 & e^{s} & -\frac{1}{2}\left(e^{s}-e^{-s}\right) \\ 0 & 0 & e^{-s} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{bmatrix} ds = \\
&= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & -\frac{1}{2}\left(e^{t}-e^{-t}\right) \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} e^{s} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-s} & -\frac{1}{2}\left(e^{-s}-e^{s}\right) \\ 0 & 0 & e^{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{bmatrix} ds = \\
&= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & -\frac{1}{2}\left(e^{t}-e^{-t}\right) \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}se^{-s}+\frac{1}{2}se^{s} \\ se^{s} \end{bmatrix} ds = \\
&= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & -\frac{1}{2}\left(e^{t}-e^{-t}\right) \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}te^{-t}+\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}te^{t}-\frac{1}{2}e^{t} \\ (t-1)e^{t} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ t-1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

e portanto a solução geral do sistema pode-se escrever como

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & -\frac{1}{2}\left(e^{t}-e^{-t}\right) \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ t-1 \end{bmatrix},$$

com $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^3$ arbitrário.

II

1.a) Sendo a equação homogénea associada $x'' + x = 0$ pode-se escrever esta equação na forma de um sistema de primeira ordem fazendo $x_1 = x$ e $x_2 = x'$, vindo então

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Uma base para o espaço das soluções deste sistema pode ser obtida das colunas de qualquer matriz fundamental $\Phi(t)$. Sendo os valores próprios de $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ as raízes de $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 + 1$, tem-se $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = -i$. Usando, por exemplo, o método dos valores e vectores próprios tem-se que um vector próprio associado a $\lambda_1 = i$ é

$$(A - iI_2)\,\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}.$$

Assim, uma base do espaço das soluções do sistema é constituida pelas funções $\mathbf{x}_1(t) = \operatorname{Re}(\mathbf{x}_{\mathbb{C}}(t))$ e $\mathbf{x}_2(t) = \operatorname{Im}(\mathbf{x}_{\mathbb{C}}(t))$, onde

$$\mathbf{x}_{\mathbb{C}}(t) = e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}^{(1)} = (\cos t + i\sin t)\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}.$$

Atendendo à relação entre o sistema de primeira ordem e a equação dada conclui-se que uma base da equação dada é

$$\{\cos t, \sin t\}.$$

1.b) Sabemos da alínea anterior que a solução geral do problema homogéneo é $x_{\text{hom}}(t) = \alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t,\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Uma solução particular pode ser calculada recorrendo ao método dos coeficientes indeterminados: A função $b(t) = -t$ é solução de $D^2 b(t) = 0$; pode-se escrever (19) na forma $\left(D^2 + 1\right)x = b(t)$; pelo que se conclui que $D^2\left(D^2+1\right)x = 0$. A solução geral desta equação homogénea é $x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 e^{it} + a_3 e^{-it}$. Daqui conclui-se que $x''(t) = -a_2 e^{it} - a_3 e^{-it}$ e como procuramos uma solução da equação não-homogénea ter-se-à de verificar

$$\begin{aligned}
&x''(t) + x(t) = -t \iff \\
&\quad \iff \quad -a_2 e^{it} - a_3 e^{-it} + a_0 + a_1 t + a_2 e^{it} + a_3 e^{-it} = -t \\
&\quad \iff \quad a_0 + a_1 t = -t \\
&\quad \iff \quad a_0 = 0 \ \wedge\ a_1 = -1
\end{aligned}$$

pelo que uma solução particular é $x_{\text{part}}(t) = -t$ e a solução geral da equação não-homogénea é $x(t) = \alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t - t$. Atendendo às condições iniciais dadas

$$\begin{cases} 0 = x(0) = \alpha_1 \\ 0 = x'(0) = \alpha_2 - 1 \end{cases}$$

pelo que a solução pedida é

$$x(t) = \sin t - t.$$

2. A equação que temos agora de considerar é

$$x'' - tx' + x = 0. \tag{24}$$

Como a transformada de Laplace é linear tem-se, aplicando a transformação de Laplace a ambos os membros de (24), $L[x''] + L[-tx'] + L[x] = 0$. Seja $X(s) = L[x(t)](s)$. Utilizando a sugestão tem-se $L[x''] = s^2X(s) - sx(0) - x'(0)$ e $L[-tx'] = \frac{d}{ds}L[x'] = \frac{d}{ds}\left(sX(s) - x(0)\right) = X(s) + sX'(s)$. Atendendo às condições iniciais vem $L[x''] = s^2X(s) - 2$. A equação transformada é, então, $s^2X - 2 + X + sX' + X = 0$, ou seja

$$X' = -\left(s + \frac{2}{s}\right)X + \frac{2}{s}. \tag{25}$$

Uma solução particular desta equação pode ser obtida multiplicando (25) por uma função $\mu = \mu(s)$; para que o membro esquerdo da equação resultante seja igual a $(\mu X)' = \mu X' + \mu' X$ é suficiente que se tome μ satisfazendo a equação $\mu' = \left(s + \frac{2}{s}\right)\mu$, ou seja, por exemplo, $\mu = s^{-2}e^{s^2/2}$. Utilizando este factor integrante, uma solução particular de (25) é $X_{\text{part}}(s) = \frac{2}{s^2}$. Finalmente, aplicando a transformada inversa, conclui-se que a solução de (19) pretendida é

$$x(t) = L^{-1}[X(s)](t) = 2t.$$

III.

a) Nas condições do enunciado a série de Fourier de ψ vai ser uma série de cosenos (porque ψ é par) do tipo

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\pi x)$$

onde os coeficientes de Fourier a_n são dados por

$$a_n = 2\int_0^1 \psi(x)\cos(n\pi x)dx.$$

Tem-se,

$$a_0 = 2\int_0^1 x dx = x^2\Big|_0^1 = 1.$$

e, para $n > 0$,

$$\begin{aligned} a_n &= 2\int_0^1 x\cos(n\pi x)dx = \\ &= 2\left(\frac{x}{n\pi}\sin(n\pi x) + \frac{1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)\right)\Bigg|_0^1 = \\ &= \frac{2}{n\pi}\sin(n\pi) + \frac{2}{n^2\pi^2}\cos(n\pi) - 0 - \frac{2}{n^2\pi^2} = \\ &= \frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right) = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ -\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi^2} & \text{se } n = 2k-1. \end{cases} \end{aligned}$$

e portanto

$$\psi(x) = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}\cos((2k-1)\pi x).$$

b) Atendendo a que

- ψ é $\mathcal{C}^0$ em $\mathbb{R}$.

- ψ é $\mathcal{C}^\infty$ em $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.
- $\lim\limits_{x\to p^-}\psi'(x) = 1$ e $\lim\limits_{x\to p^+}\psi'(x) = -1,\ \forall p\in\mathbb{Z}$,

conclui-se que ψ é seccionalmente de classe $\mathcal{C}^1$ e, pelo Teorema de Fourier da convergência pontual, a série de Fourier de ψ determinada na alínea anterior é pontualmente convergente em $\mathbb{R}$ e a soma da série é igual a $\psi(x)$ para todo o $x\in\mathbb{R}$.

Observando que ψ é contínua em $\mathbb{R}$ e que ψ' (definida em $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$) é integrável (pois é seccionalmente constante) em $[-1,1]$ e tem quadrado integrável no mesmo intervalo (pois $(\psi'(x))^2\equiv 1$ em $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$) pode-se concluir que a série de Fourier de ψ apresentada anteriormente converge uniformemente em $\mathbb{R}$. Um modo alternativo de investigar a convergência uniforme consiste em recorrer ao teste-M de Weierstrass: como

$$\left|\frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}\cos((2k-1)\pi x)\right| \le \frac{4}{(2k-1)^2\pi^2} \sim \frac{1}{k^2}$$

e a série $\sum_k 1/k^2$ é convergente, o teste-M de Weierstrass permite concluir que a série de Fourier de ψ é absoluta e uniformemente convergente em $\mathbb{R}$.

IV.

1.a) Atendendo a que $u(t,x)=\varphi(s)$ com $s=x+Vt$, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= \frac{\partial\varphi}{\partial t}(x+Vt) = \frac{d\varphi}{ds}\frac{\partial s}{\partial t} = V\varphi' \\
\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x+Vt) = \frac{d\varphi}{ds}\frac{\partial s}{\partial x} = \varphi' \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\varphi' = \frac{d\varphi'}{ds}\frac{\partial s}{\partial x} = \varphi''\frac{\partial s}{\partial x} = \varphi'' \\
f(u) &= f(u(t,x)) = f(\varphi(x+Vt)) = f(\varphi(s)) = f(\varphi),
\end{aligned}$$

e a equação (20) pode ser escrita como $V\varphi' = \varphi'' + f(\varphi)$, ou seja $\varphi'' - V\varphi' + f(\varphi) = 0,\ s\in\mathbb{R}$. Quanto às condições aos limites (21), como $s = x+Vt$ tem-se que, para cada $t\in\mathbb{R}$ fixo, $x\to\pm\infty$ se e só se $s\to\pm\infty$ (respectivamente) pelo que (21) pode ser escrito como

$$\begin{cases} \varphi(s)\longrightarrow 0 & \text{quando}\quad s\to-\infty \\ \varphi(s)\longrightarrow 1 & \text{quando}\quad s\to+\infty. \end{cases}$$

b) Usando a definição de y_1 e y_2 dada no enunciado tem-se

$$\begin{aligned} &y_1' = \varphi' = y_2 \\ &y_2' = \varphi'' = V\varphi' - f(\varphi) = Vy_2 - f(y_1) \end{aligned}$$

e a equação (22) fica transformada no sistema (23)

2.a) Considerando $V=0$ o sistema (23) escreve-se

$$\begin{cases} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -f(y_1) \end{cases}$$

e tem-se

$$\begin{aligned} \frac{dE}{ds}(y_1(s),y_2(s)) &= \frac{\partial E}{\partial y_1}y_1' + \frac{\partial E}{\partial y_2}y_2' = \\ &= f(y_1)y_1' + y_2 y_2' = \\ &= f(y_1)y_2 + y_2\cdot(-f(y_1)) = \\ &= 0, \quad \forall s\in\mathbb{R}, \end{aligned}$$

pelo que E é uma constante do movimento.

b) Sendo $f(u) = -u(u-1)(u-\frac{1}{4})$ conclui-se que uma constante do movimento é

$$E(y_1,y_2) = \underbrace{\frac{1}{2}y_2^2}_{=:E_c(y_2)} + \underbrace{\left(-\int_0^{y_1} u(u-1)\left(u-\tfrac{1}{4}\right)du\right)}_{=:E_p(y_1)}.$$

Atendendo a que $E_c(y_2)\geq 0$ e que as órbitas da equação (23) com $V=0$ estão contidas em conjuntos de nível de E, tem-se que para um dado nível E_j de E a região do espaço de fase para a qual poderá haver alguma órbita com esse valor da função $E(y_1,y_2)$ terá de estar contida no subconjunto de $\mathbb{R}^2$ para o qual $E_p(y_1)\leq E_j$. Assim, os conjuntos de nível de E são facilmente obtidos a partir do gráfico de E_p, como se indica seguidamente na Figura 15.

onde $\mathcal{E}_j = \left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : E(x_1,x_2)=E_j\right\}$. Observe-se que o sentido das órbitas é o indicado na figura uma vez que a primeira equação de (23) implica que $y_1(s)$ é crescente ($y_1'>0$) se e só se $y_2>0$.

3.a) Sendo agora $V>0$ tem-se, pelos mesmos cálculos de 2.a),

$$\begin{aligned} \frac{dE}{ds}(y_1(s),y_2(s)) &= \frac{\partial E}{\partial y_1}y_1' + \frac{\partial E}{\partial y_2}y_2' = \\ &= f(y_1)y_2 + y_2\cdot(Vy_2 - f(y_1)) = \\ &= Vy_2^2 \end{aligned}$$

como se pretendia. Consequentemente E é não-decrescente ao longo de órbitas de (23).

b) Obtém-se imediatamente de (23) que, para qualquer $V\geq 0$, os únicos pontos de equilíbrio do sistema são $(0,0), (\frac{1}{4},0)$ e $(1,0)$. A matriz jacobiana do sistema num ponto genérico é

$$J(y_1,y_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -f'(y_1) & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3y_1^2 - \frac{5}{2}y_1 + \frac{1}{4} & V \end{bmatrix}.$$

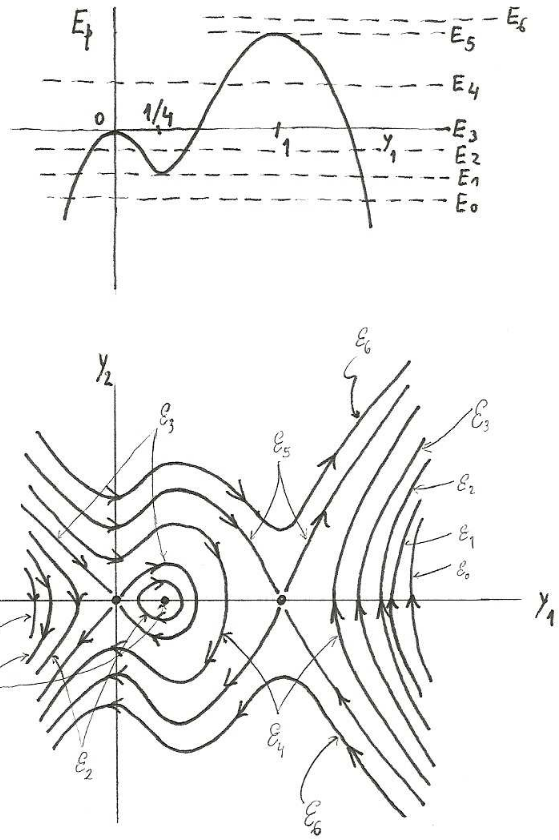


Figura 15: Gráfico de E_p e conjuntos de nível de E.

Para o ponto de equílibrio $(0, 0)$ tem-se

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & V \end{bmatrix}$$

cujos valores próprios são os zeros do polinómio característico $p(\lambda) = \lambda^2 - V\lambda - \frac{1}{4}$, ou seja, $\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(V + \sqrt{V^2+1}\right)$ e $\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(V - \sqrt{V^2+1}\right)$. Como $\mathrm{Re}(\lambda_1), \mathrm{Re}(\lambda_1) \neq 0$ a linearização em torno de $(0, 0)$ é aplicável ao estudo do comportamento do sistema não-linear (23) em pequenas vizinhanças da solução nula. Como $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ conclui-se que $(0, 0)$ é um ponto de sela e, portanto, é uma solução instável (já que existe um valor próprio, λ_1, com parte real positiva). Para o ponto de equilíbrio $(1, 0)$ tem-se

$$J(1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & V \end{bmatrix}$$

cujos valores próprios são os zeros de $q(\lambda) = \lambda^2 - V\lambda - \frac{3}{4}$, ou seja, $\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(V + \sqrt{V^2+3}\right)$ e $\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(V - \sqrt{V^2+3}\right)$. Novamente aqui, como $\mathrm{Re}(\lambda_1)$ e $\mathrm{Re}(\lambda_1) \neq 0$ e $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, conclui-se que o ponto $(1,0)$ é um ponto de sela (equilíbrio instável) do sistema não-linear (23).

4. Sabemos que se $V = 0$ a função E é uma constante do movimento para (23) e se $V > 0$, E é crescente ao longo de órbitas. Por outro lado, para qualquer $V \geq 0$ o retrato de fase de (23) numa vizinhança de $(0,0)$ é

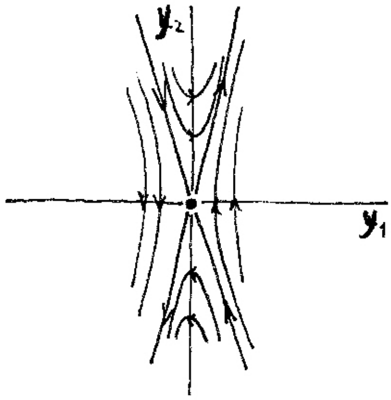


Figura 16: Retrato de fase de (23) numa vizinhança de $(0,0)$

onde as órbitas correspondentes a soluções que convergem para $(0,0)$ quando $t \to +\infty$ ou quando $t \to -\infty$ são tangentes aos espaços próprios do sistema linearizado:

- para o valor próprio λ_1:

$$(J(0,0) - \lambda_1 I_2)\begin{bmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\left(V + \sqrt{V^2+1}\right) & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\left(V - \sqrt{V^2+1}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \iff$$

$$\iff v_2^{(1)} = \frac{1}{2}\left(V + \sqrt{V^2+1}\right) v_1^{(2)}$$

- para o valor próprio λ_2:

$$(J(0,0)-\lambda_2 I_2)\begin{bmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\left(V-\sqrt{V^2+1}\right) & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\left(V+\sqrt{V^2+1}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad v_2^{(2)} = \frac{1}{2}\left(V-\sqrt{V^2+1}\right)v_1^{(2)}$$

Os espaços próprios são, então,

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \mathbf{v}^{(1)} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\left(V+\sqrt{V^2+1}\right) \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

e

$$E_{\lambda_2} = \left\{ \mathbf{v}^{(2)} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\left(V-\sqrt{V^2+1}\right) \end{bmatrix}, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

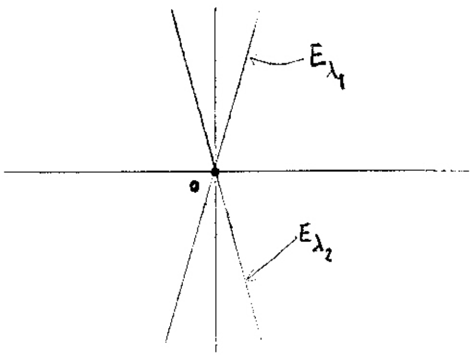


Figura 17: Espaços próprios E_{λ_1} e E_{λ_2}.

Observe-se que o declive da recta que coincide com E_{λ_1} é crescente com V e E_{λ_1} tende para uma recta vertical (com declive $+\infty$) quando $V \to +\infty$.

Suponha-se agora que se tem $V = V_1 > 0$ muito pequeno e considere-se um ponto $(y_1(0), y_2(0))$ no primeiro quadrante de $\mathbb{R}^2$, numa pequena vizinhança de $(0,0)$ e tal que $(y_1(s), y_2(s)) \to (0,0)$ quando $s \to -\infty$. Por continuidade das soluções relativamente às condições iniciais e parâmetros conclui-se que a órbita γ_1 correspondente à solução com a condição inicial indicada será algo como se esboça na Figura 18.

Observe-se que E é crescente ao longo de γ_1 e como γ_1 intersecta o eixo $y_2 = 0$ num ponto P com abcissa inferior a 1 tem-se (porque $y_1' < 0$ quando $y_2 < 0$) que pontos sobre a órbita γ_1 nunca poderão convergir para $(1,0)$ quando $s \to +\infty$ (ver figura acima).

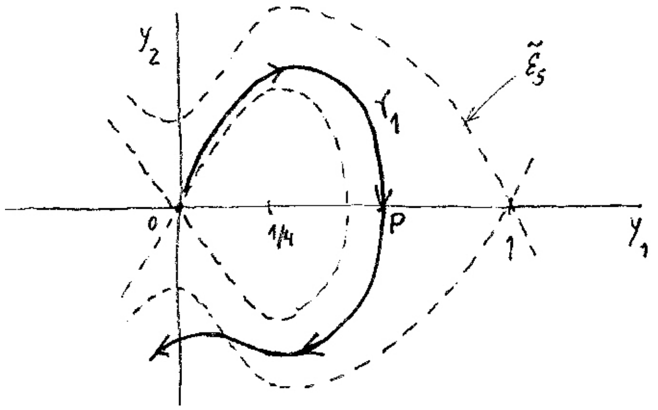


Figura 18: Orbita γ_1.

Considere-se agora $V = V_2 > 0$ suficientemente grande para que a órbita correspondente à que designámos acima por γ_1, designemo-la agora por γ_2, seja agora tal que cruze a curva de nível $\tilde{\mathcal{E}}_5$ (ver figura) num ponto Q de abcissa inferior a 1, como se esboça na Figura 19.

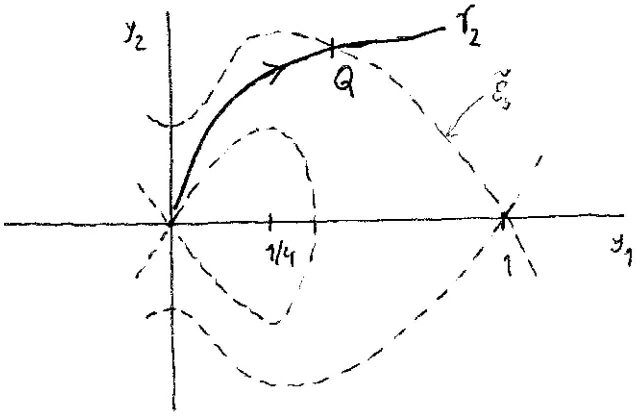


Figura 19: Orbita γ_2.

Considere-se agora a função $\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ definida do seguinte modo: para cada $V > 0, \Gamma(V)$ é o ponto de intersecção do fecho da órbita de (23) que satisfaz $(y_1(s), y_2(s)) \underset{s\to -\infty}{\longrightarrow} (0,0)^+$, com a linha $L = \{(y_1, y_2) : y_2 = 0 \wedge y_1 \in]0,1]\} \cup \left\{\tilde{\mathcal{E}}_5 \cap \{(y_1, y_2) : y_2 > 0 \wedge y_1 \in]0,1]\}\right\}$

Seja $g : L \to \mathbb{R}_0^+$ a função comprimento de arco, que a cada ponto X de L faz corresponder o comprimento do arco de L entre $(0,0)$ e X. Seja $\tilde{\ell}$ o comprimento total de L, i.e., $\tilde{\ell} = g(L)$. Como g é uma bijecção entre L e $]0, \tilde{\ell}[$ conclui-se, pela dependencia contínua de condições

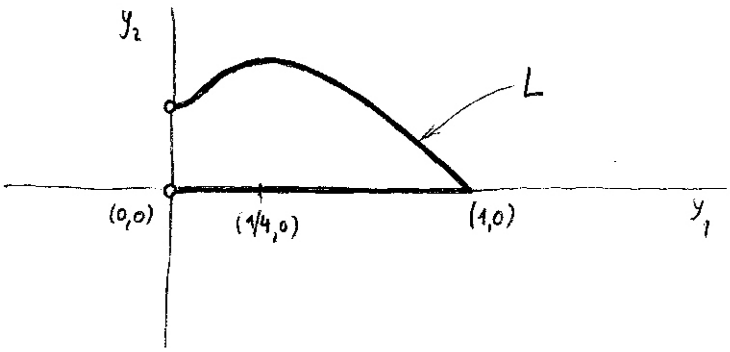


Figura 20: Curva L.

iniciais e parâmetros e pela unicidade de soluções dos problemas de Cauchy, que $g \circ \Gamma$ é uma função contínua e estritamente monótona de $]0, +\infty[$ em $]0, \tilde{\ell}[$. Seja $\ell_P = g(P) < 1$ e seja $\ell_Q = g(Q) > 1$ (onde P e Q são os pontos referidos anteriormente). Tem-se

$$g \circ \Gamma(V_1) = \ell_P < 1 < \ell_Q = g \circ \Gamma(V_2)$$

e pelo teorema do valor intermédio aplicado a $g \circ \Gamma$ em $[V_1, V_2]$ existirá um $V \in]V_1, V_2[$ tal que $g \circ \Gamma(V) = 1$ pelo que a órbita correspondente a este valor V será como se indica no esboço da Figura 21, tal como se pretendia.

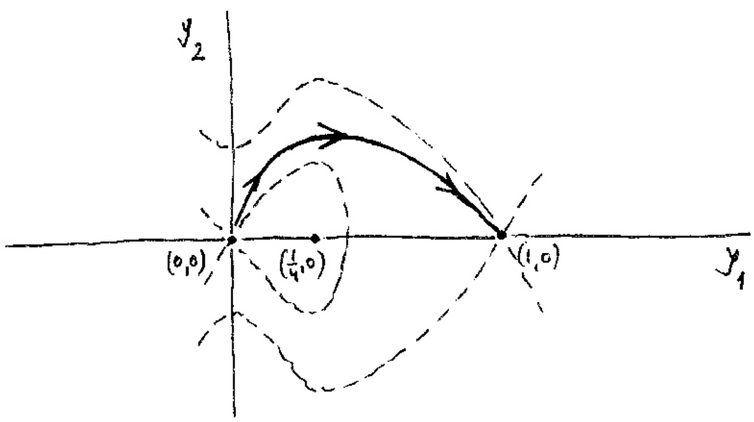


Figura 21: Orbita pedida no enunciado.

Exame de 20.9.95 e resolução.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

(Ambiente, Mecânica)

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

Data: 20/9/1995 **Duração:** 3h00.

I.

Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias lineares

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}. \tag{26}$$

1.a) Determine a solução geral de (26).

b) Determine a solução de (26) que satisfaz a condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

2.a) Seja $\mathbf{y}' = B\mathbf{y}$ o sistema bidimensional obtido por restrição de (26) ao subespaço de $\mathbb{R}^4$ definido por $x_1 = x_2 = 0$. Indique explicitamente qual é a matriz B.

b) Esboce o retrato de fases do sistema da alínea anterior.

II.

Considere a equação diferential

$$x''' - x'' + x' - x = b(t) \tag{27}$$

1. Seja $b(t) \equiv 0$.

   a) Determine a solução geral de (27).

   b) Determine a solução de (27) que satisfaz a condição inicial $x(0) = x'(0) = x''(0) - 1 = 0$.

2. Considere agora $b(t) = t^2$. Determine uma solução particular de (27) e escreva uma expressão para a solução geral da equação.

III.

Considere a equação diferencial

$$\frac{y}{x} + \left(y^3 - \log x\right) \frac{dy}{dx} = 0. \tag{28}$$

a) Verifique que (28) tem um factor integrante da forma $\mu = \mu(y)$ e determine-o.

b) Prove que as soluções de (28) são dadas implicitamente por $\Phi(x, y) = C$, onde C é uma constante arbitrária e $\Phi(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{y}\log x$.

c) Determine o intervalo máximo de existência da solução de (28) que satisfaz a condição inicial $y(1) = \sqrt{2}$. *Sugestão: Talvez seja útil tentar explicitar $x = x(y)$.*

IV.

1. As vibrações de uma dada placa $\mathcal{P}$, circular, de raio 1, são descritas pela equação das ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u, \quad (x,y,t) \in \big\{(x,y) : x^2+y^2<1\big\} \times \mathbb{R}$$

com condições de fronteira $u(x,y,t) = xy$ em $\big\{(x,y) : x^2+y^2=1\big\} \times \mathbb{R}$ e com condições iniciais $u(x,y,0) = f_0(x,y)$ e $u_t(x,y,0) = f_1(x,y)$ dadas. Na equação acima $c>0$ é uma constante real e $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ é o laplaciano da função u.
As soluções estacionárias (= independentes do tempo t) desta equação fornecem as posições de equilibrio da placa $\mathcal{P}$.

a) Verifique que as posições de equilíbrio da placa $\mathcal{P}$ satisfazem a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{em} \quad \big\{(x,y) : x^2+y^2<1\big\} \tag{29}$$

com a condição na fronteira

$$u(x,y) = xy \quad \text{em} \quad \big\{(x,y) : x^2+y^2=1\big\} \tag{30}$$

2. Utilizando as coordenadas polares (r,θ) dadas por $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$ e definindo $v(r,\theta) = u(x(r,\theta), y(r,\theta))$ a equação (29) é transformada em

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0, \quad (r,\theta) \in]0,1[\times]0,2\pi[\tag{31}$$

e o problema (29)-(30) fica reduzido à determinação de uma solução de (31) que satisfaça as condições

(i) v é contínua em $[0,1]\times[0,2\pi]$ e $v(r,0) = v(r,2\pi)$,

(ii) $v(1,\theta) = \cos\theta\sin\theta$ para $\theta \in [0,2\pi]$.

As alíneas seguintes têm por objectivo a obtenção duma solução deste problema utilizando o método de Fourier (separação de variáveis).

a) Escreva $v(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$. Verifique que as equações para R e Θ são, respectivamente,

$$r^2 R'' + rR' - \sigma R = 0 \tag{32}$$

$$\Theta'' + \sigma\Theta = 0 \tag{33}$$

onde σ é um parâmetro real independente de r e θ.

b) Usando (33) determine os valores possíveis de σ. Escreva uma expressão para a solução geral de (33).

c) Verifique que para cada $\sigma = n^2 \in \mathbb{N}$ a equação (32) tem um par de soluções *linearmente independentes,* a saber, 1 e $\log r$ se $n=0$ e r^n e r^{-n} se $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

d) Justifique que para que $v(r,\theta)$ seja solução do problema dado as únicas soluções de (32) que podem ser usadas são $R_n(r) = r^n$ com $n \geq 0$.

e) Escreva a série de Fourier para $v(r,\theta)$ e determine os coeficientes de modo que v satisfaça a condição na fronteira. Justifique que a solução formal assim obtida é, de facto, uma solução do problema dado.

3. Obtenha a solução $u(x,y)$ do problema original (29)-(30).

Resolução:

I.

1.a) A solução geral de (26) pode ser dada por $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0)$ onde A é a matriz do sistema e $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}$. Observando que a matriz do sistema é uma matriz diagonal por blocos, $A = \operatorname{diag}(1, -1, A_1)$ com $A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, conclui-se que $e^{At} = \operatorname{diag}\left(e^t, e^{-t}, e^{A_1 t}\right)$. Como $A_1 = -2I_2 + N_2$, onde I_2 é a matriz identidade de dimensão 2 e N_2 é a matriz nilpotente $N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, conclui-se que

$$e^{A_1 t} = e^{-2I_2 t} e^{N_2 t} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + O \right) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Consequentemente tem-se a seguinte expressão para a solução geral de (26):

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0)e^t \\ x_2(0)e^{-t} \\ x_3(0)e^{-2t} + x_4(0)te^{-2t} \\ x_4(0)e^{-2t} \end{bmatrix},$$

onde $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0))^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4$ é arbitrário.

b) Atendendo ao resultado da alínea anterior tem-se

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ e^{-2t} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2.a) Se $x_1 = x_2 = 0$ então, por (26), $x_1' = x_2' = 0$ o que implica que o subespaço $x_1 = x_2 = 0$ de $\mathbb{R}^4$ é invariante para (26). Observando que

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

conclui-se que a restrição de (26) ao subespaço em causa é $\mathbf{y}' = B\mathbf{y}$ com $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^{\mathrm{T}} = (x_3, x_4)^{\mathrm{T}}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

b) Sendo B uma matriz triangular (superior) os seus valores próprios são os elementos da diagonal principal, i.e., $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. Os vectores próprios de B são os vectores $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^{\mathrm{T}}$ satisfazendo

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \iff \begin{cases} v_1 \in \mathbb{R} \text{ arbitrário} \\ v_2 = 0 \end{cases},$$

pelo que o espaço próprio é unidimensional. A solução geral do subsistema é

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(0)e^{-2t} + y_2(0)te^{-2t} \\ y_2(0)te^{-2t} \end{bmatrix}$$

e podemos concluir que y_2 é decrescente se e só se $y_2 > 0$. Estas informações permitem-nos esboçar o retrato de fase na Figura 22.

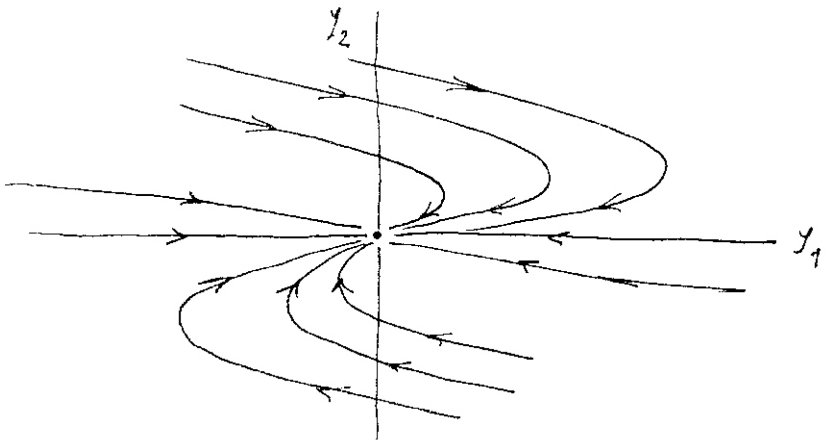


Figura 22: Esboço do retrato de fase de $\mathbf{y}' = B\mathbf{y}$.

II.

1.a) Sendo $D = \frac{d}{dt}$ a equação (27) com $b(t) \equiv 0$ pode ser escrita como $(D^3 - D^2 + D - 1)x = 0$. O polinómio característico associado é $p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1$, que tem como zeros $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$ e $\lambda_3 = -i$. Consequentemente o polinómio p pode ser factorizado na forma $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - i)(\lambda + i)$ e a equação diferencial pode ser escrita como $(D - 1)(D^2 + 1)x = 0$. As soluções reais de cada uma das equações monomiais $(D - 1)x = 0$ e $(D^2 + 1)x = 0$ são: múltiplos de e^t para a primeira equação e combinações lineares de $\cos t$ e $\sin t$ para segunda, pelo que se conclui que a solução geral da equação homogénea (27) é

$$x(t) = \alpha e^t + \beta \cos t + \gamma \sin t.$$

b) Derivando a expressão da solução geral da equação obtida na alínea anterior tem-se

$$\begin{aligned} x'(t) &= \alpha e^t - \beta \sin t + \gamma \cos t \\ x''(t) &= \alpha e^t - \beta \cos t - \gamma \sin t \end{aligned}$$

e portanto, das condições iniciais obtém-se

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \\ x''(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1/2 \\ \beta = -1/2 \\ \gamma = -1/2 \end{cases}$$

pelo que a solução pretendida é

$$x(t) = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t.$$

2. Atendendo a que $b(t) = t^2$ é solução da equação diferencial $D^3 b = 0$ (qualquer polinómio de segundo grau tem a terceira derivada identicamente nula...) ou seja, de uma equação do tipo $(D - \lambda)^m b = 0$, com $\lambda = 0$; e como este valor de λ não é zero do polinómio característico p associado à equação homogénea (ver alínea 1.a)) concluimos que uma solução particular da equação não-homogénea poderá ser da forma $x_{\text{part}}(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$. Calculando as derivadas desta função até à ordem 3 tem-se $x'_{\text{part}}(t) = 2\alpha t + \beta$, $x''_{\text{part}}(t) = 2\alpha$ e $x'''_{\text{part}}(t) = 0$ e para que $x_{\text{part}}(t)$ seja solução da equação não-homogénea ter-se-à de verificar $(0) - (2\alpha) + (2\alpha t + \beta) - (\alpha t^2 + \beta t + \gamma) = t^2$, ou seja

$$\begin{cases} -\alpha = 1 \\ 2\alpha - \beta = 0 \\ \beta - \gamma - 2\alpha = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -2 \\ \gamma = 0. \end{cases}$$

A solução particular procurada é

$$x_{\text{part}}(t) = -t^2 - 2t$$

e a solução geral da equação não-homogénea (27) é dada por

$$x(t) = a_1 e^t + a_2 \cos t + a_3 \sin t - t^2 - 2t,$$

onde a_1, a_2 e a_3 são constantes reais arbitrárias.

III.

a) A equação (28) tem um factor integrante do tipo $\mu = \mu(y)$ se a equação resultante da multiplicação de (28) por μ fôr uma equação exacta. Vejamos se assim é: multiplicando a equação dada por uma função $\mu(y)$ tem-se

$$\mu(y)\frac{y}{x} + \mu(y)\left(y^3 - \log x\right)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Observando agora que
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(y)\frac{y}{x}\right) = \mu'\frac{y}{x} + \frac{\mu}{x}$$
e que
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(y)(y^3 - \log x)\right) = -\frac{\mu}{x},$$
conclui-se que para que $\mu(y)$ seja um factor integrante para a equação é necessário (embora não seja suficiente) que se tenha
$$\mu'\frac{y}{x} + \frac{\mu}{x} = -\frac{\mu}{x},$$
ou seja
$$\mu' = -\frac{2}{y}\mu.$$
Como esta última equação não depende da variável x, as suas soluções também não irão depender da variável x. De facto, integrando esta equação tem-se:
$$\begin{aligned}\mu' = -\frac{2}{y}\mu \quad &\Longleftrightarrow \quad \int \frac{d\mu}{\mu} = -2\int \frac{dy}{y}\\ &\Longleftrightarrow \quad \log|\mu| = -2\log|y| + C\\ &\Longleftrightarrow \quad \log|\mu| = \log\left(e^C|y|^{-2}\right)\end{aligned}$$
Estando só interessados em *um* factor integrante pode-se tomar $C = 0$ e considerar um factor integrante estritamente positivo definido em $\mathbb{R}^+$, vindo então
$$\mu(y) = \frac{1}{y^2}.$$
Como se referiu acima, a condição apontada anteriormente para que a equação fosse exacta é necessária mas não, em geral, suficiente. Será no entanto suficiente se a região do domínio das funções que estivermos a considerar fôr um rectângulo de $\mathbb{R}^2$ (ou, mais geralmente, fôr uma região simplesmente conexa). Atendendo a que o domínio de y/x é $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$ e o de $y^3 - \log x$ é $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, concluimos que a equação está definida no rectângulo de $\mathbb{R}^2$ dado por $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ o que, atendendo ao que ficou escrito acima, permite concluir que a equação é, de facto, redutível a uma equação exacta por multiplicação pelo factor integrante $\mu(y) = y^{-2}$.

b) Na alínea anterior já concluimos que a equação quando multiplicada por $\mu(y) = y^{-2}$ se torna numa equação exacta e portanto existe uma função $\Phi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que
$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{1}{y^2}\frac{y}{x} = \frac{1}{yx}$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{1}{y^2}\left(y^3 - \log x\right) = y - \frac{1}{y^2}\log x$$

donde se conclui que

$$\Phi(x,y) = \int \frac{1}{xy} dx + h_1(y) = \frac{\log x}{y} + h_1(y)$$

$$\Phi(x,y) = \int \frac{1}{y^2} \left(y^3 - \log x\right) dy + h_2(x) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{\log x}{y} + h_2(x)$$

e portanto $h_1(y) = \frac{1}{2}y^2 + K$ e $h_2(x) = 0 + K$, onde K é uma constante real arbitrária a qual, sem perda de generalidade, pode ser tomada igual a zero, vindo então

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{y}\log x.$$

A equação (28) pode-se então escrever como

$$\frac{d}{dx}\Phi(x, y(x)) = 0,$$

e portanto as soluções de (28) são dadas implicitamente por $\Phi(x, y(x)) = C$, onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

c) Tendo em atenção a condição inicial dada, tem-se $\Phi(1, \sqrt{2}) = C$, ou seja

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\log 1 = C \implies C = 1.$$

A expressão (implicita) para as soluções de (28) com a condição inicial dada é

$$\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{y}\log x = 1.$$

Esta expressão pode ser facilmente explicitada em ordem a x obtendo-se

$$x = x(y) = \exp\left(y - \frac{1}{2}y^3\right).$$

Se esta função fôr invertível então o seu contradomínio será o domínio de $y(x)$; mesmo que $x(y)$ não seja invertível poderá ser localmente invertível numa vizinhança de $(x,y) = (1, \sqrt{2})$ e novamente o contradomínio de uma conveniente restrição de $x(y)$ será o domínio da sua inversa local $y(x)$. Estudemos então a função $x(y)$. O seu domínio é $\mathbb{R}$ e é evidente que $x(y) > 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Também é fácil de concluir que $x(y) \to 0$ quando $y \to +\infty$ e que $x(y) \to +\infty$ quando $y \to -\infty$. Por outro lado, derivando $x(y)$ tem-se

$$x'(y) = \left(1 - \frac{3}{2}y^2\right) e^{y - \frac{1}{2}y^3}.$$

Assim, os pontos de inflexão de $x(y)$ são $y_- = -\sqrt{2/3}$ e $y_+ = \sqrt{2/3}$, os quais, atendendo ao sinal de $x'(y)$, são pontos de mínimo e de máximo locais, respectivamente. Estas informações permitem-nos já esboçar o gráfico de $x(y)$ (Figura 23).

Observando que a restrição de $x(y)$ ao intervalo $]\sqrt{2/3}, +\infty[$

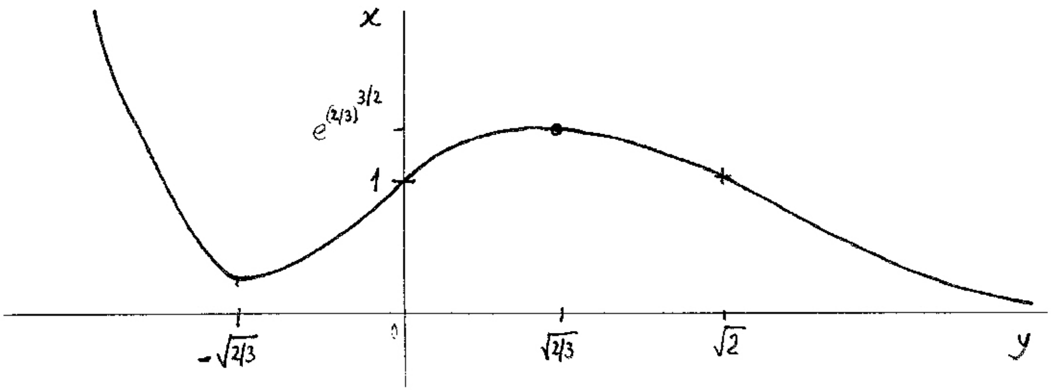


Figura 23: Gráfico de $x(y)$.

- é estritamente monótona e portanto tem inversa,
- é de classe $\mathcal{C}^1$ com derivada diferente de 0, pelo que a inversa é também de classe $\mathcal{C}^1$.
- que $\sqrt{2} \in]\sqrt{2/3}, +\infty[$, e que
- o intervalo $]\sqrt{2/3}, +\infty[$ é o maior intervalo I para o qual $x(y)$ restringido a I satisfaz as condições dos três pontos anteriores,

pode-se concluir que a solução que procuramos é a inversa da restrição de $x(y)$ ao intervalo referido e que portanto o seu intervalo máximo é o contradomínio desta restrição, o qual é

$$\Big]0, e^{(2/3)^{3/2}}\Big[,$$

e a solução não pode ser prolongada como função de classe $\mathcal{C}^1$ para além deste intervalo uma vez que

$$\lim_{x \downarrow 0} y(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x \uparrow e^{(2/3)^{3/2}}} y'(x) = -\infty.$$

IV.

1.a) Sendo $u = u(t, x, y)$ uma solução estacionária da equação tem-se que é independente de t podendo escrever-se $u = u(x, y)$ e obtendo-se imediatamente $\partial u/\partial t = \partial^2 u/\partial t^2 = 0$ e portanto, como $c \neq 0$, a equação vem $\Delta u = 0$ na região $\big\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\big\}$. Como as condições de fronteira já não dependiam de t permanecem independentes de t e não são alteradas.

2.a) Sendo $v(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ tem-se $v_r = R'\Theta$, $v_{rr} = R''\Theta$ e $v_{\theta\theta} = R\Theta''$ e portanto a equação (31) vem $R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' = 0$. Supondo que R e Θ são diferentes de 0 em $]0,1[$ e em $]0,2\pi[$, respectivamente, pode-se dividir a equação obtida por $R(r)\Theta(\theta)$ obtendo-se

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R}(r) = -\frac{\Theta''}{\Theta}(\theta), \quad (r,\theta) \in]0,1[\times]0,2\pi[.$$

Como o membro esquerdo desta igualdade é função só de r, o membro direito só depende de θ e a igualdade tem de ser válida em todos os pontos de um aberto de $\mathbb{R}^2$, conclui-se que terá se existir uma constante real σ independente de r e de θ tal que

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R}(r) = \sigma = -\frac{\Theta''}{\Theta}(\theta), \quad (r,\theta) \in]0,1[\times]0,2\pi[,$$

e portanto obtêm-se as equações (32) e (33) pretendidas:

$$r^2R'' + rR' - \sigma R = 0,$$

$$\Theta'' + \sigma\Theta = 0.$$

b) A determinação dos valores possíveis de σ utilizando a equação para Θ envolve a identificação de alguma condição adicional que terá de ser satisfeita pelas soluções $\Theta(\theta)$. No presente caso observe-se que a condição *(i)* do enunciado implica que Θ tenha de satisfazer $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$. Vejamos então quais os possíveis valores de σ para os quais o problema de valores na fronteira

$$\begin{cases} \Theta'' + \sigma\Theta = 0 \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi) \end{cases}$$

tem soluções não identicamente nulas.

- Se $\sigma < 0$ a equação pode ser escrita como $(D^2 - |\sigma|)\Theta = 0$, cuja solução geral é $\Theta(\theta) = \alpha_1 e^{\sqrt{|\sigma|}\theta} + \alpha_2 e^{-\sqrt{|\sigma|}\theta}$. Tendo esta solução de ser $2\pi-$periódica conclui-se que se tem de ter $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, o que fornece a solução identicamente nula.
- Se $\sigma = 0$ a equação fica $\Theta'' = 0$ cuja solução geral é $\Theta(\theta) = \alpha\theta + \beta$. Atendendo às condições de fronteira conclui-se que $\alpha = 0$ e β pode ser um real arbitrário.
- Finalmente, considere-se $\sigma > 0$ e para facilidade de notação faça-se $\sigma = \lambda^2$. A solução geral da equação é agora $\Theta(\theta) = \alpha_1 \cos\lambda\theta + \alpha_2 \sin\lambda\theta$. A condição na fronteira resulta em

  $$\alpha_1 = \Theta(0) = \Theta(2\pi) = \alpha_1 \cos 2\pi\lambda + \alpha_2 \sin 2\pi\lambda,$$

  a qual é satisfeita para quaisquer α_1 e α_2 se e só se $\lambda = n \in \mathbb{Z}$, concluindo-se que se tem de ter $\sigma = n^2$ e vindo como soluções de (33) com a condição de fronteira periódica as funções $\Theta_n(\theta) = \alpha_1 \cos n\theta + \alpha_2 \sin n\theta$.

c) Considere-se primeiro $n = 0$. Verifiquemos que $R(r) = 1$ e $R(r) = \log r$ são soluções de (32):

- $R(r) = 1 \Rightarrow R' = R'' = 0 \Rightarrow r^2R'' + rR' = 0$
- $R(r) = \log r \Rightarrow R' = \frac{1}{r},\ R'' = -\frac{1}{r^2} \Rightarrow r^2R'' + rR' = r^2 \cdot \left(-\frac{1}{r^2}\right) + r\frac{1}{r} = -1 + 1 = 0.$

Para ver que estas funções são linearmente independentes basta verificar que o seu wronskiano é diferente de zero:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & \log r \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix} = \frac{1}{r} - 0 = \frac{1}{r} \neq 0.$$

Considerando agora $n \neq 0$ tem-se o seguinte: para $R(r) = r^n$ as suas derivadas são $R' = nr^{n-1}$ e $R'' = n(n-1)e^{n-2}$ e tem-se facilmente que $r^2R'' + rR' - n^2R = 0$. Resultados inteiramente análogos ocorrem no caso $R(r) = r^{-n}$. Tendo deste modo concluindo que estas funções são soluções da equação (32) resta verificar que são linearmente independentes, para o que basta verificar que o wronskiano é diferente de zero:

$$\det \begin{bmatrix} r^n & r^{-n} \\ nr^{n-1} & -nr^{-n-1} \end{bmatrix} = -\frac{2n}{r} \neq 0.$$

d) As soluções $R(r) = \log r$ e $R(r) = r^{-n}$ fariam com que $v(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ fosse descontínuo em $r = 0$, uma vez que segundo algumas direcções $\theta = K$ a função tenderia em valor absoluto para $+\infty$ quando $r \downarrow 0$, o que contradiz a imposição *(i)* do enunciado.

e) Pelo que ficou visto acima tem-se como solução geral formal de (31)

$$v(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left(\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta\right).$$

A condição na fronteira *(ii)* exige que

$$\cos\theta \sin\theta = v(1,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta\right).$$

Observando que para todo o θ se tem $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$ tem-se imediatamente da igualdade anterior que

$$\begin{cases} \alpha_n = 0, & \forall n \\ \beta_2 = \frac{1}{2}, & \beta_n = 0, \quad \forall n \neq 2 \end{cases},$$

e portanto a solução formal do problema é

$$v(r,\theta) = \frac{1}{2}r^2 \sin 2\theta.$$

Como esta função é de classe $\mathcal{C}^\infty$ e satisfaz as condições *(i)* e *(ii)* do enunciado conclui-se que é efectivamente a solução do problema dado.

3. Usando $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$ vem imediatamente que

$$\frac{1}{2}r^2 \sin 2\theta = r^2 \sin\theta\cos\theta = (r\sin\theta)(r\cos\theta) = xy,$$

concluindo-se a solução de (29)-(30) é $u(x,y) = xy$.

Exame de 4.10.95 e resolução.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

(Ambiente, Mecânica)

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

Data: 4/10/1995 **Duração:** 3h00.

I.

Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias lineares

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{34}$$

1.a) Determine todas as soluções estacionárias de (34).

b) Classifique as soluções estacionárias de (34) quanto a serem estáveis/assimptoticamente estáveis/instáveis.

c) Determine um subespaço bidimensional de $\mathbb{R}^3$ que seja invariante para a equação (34).

d) Esboce o retrato de fase da restrição de (34) ao subespaço que determinou na alínea anterior.

2. Determine uma solução particular do sistema não-homogéneo $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}$, onde A é a matriz de (34) e $\mathbf{b} = (0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.

II.

Considere a equação diferencial

$$x''' + x' = \cos t \tag{35}$$

a) Determine uma solução particular de (35).

b) Determine a solução de (35) que satisfaz as condições $x(0) = x(\pi/2) = 0$ e $\int_0^{\pi/2} x(t)dt = -1/2$.

III.

Seja $H(x,t) = \frac{t-x}{t+x}$. Considere a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = H(x,t) \tag{36}$$

a) Mostre que H é uma função homogénea de grau zero.

b) Utilizando uma mudança de variáveis conveniente transforme (36) numa equação separável.

c) Determine a solução de (36) que satisfaz $x(1) = 2$.

d) Determine o intervalo máximo de existência da solução que obteve na alínea anterior.

IV.

Considere o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & (x,t) \in]0,L[\times\mathbb{R} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), & x \in [0,L] \end{cases} \tag{37}$$

onde as funções f e g são suficientemente regulares (digamos, de classe $\mathcal{C}^2$) e $L > 0$ é uma constante.

a) Utilizando técnica de separação de variáveis, escreva uma expressão para a série de Fourier que é solução formal de (37) e indique como calcularia os coeficientes da série.

b) Mostre que se $u(x,t)$ é uma solução de $u_{tt} = u_{xx}$ então existem funções F, $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$u(x,t) = F(x+t) + G(x-t). \tag{38}$$

c) Tendo em atenção os resultados das alíneas anteriores determine as expressões das séries de Fourier de F e G.

d) Considere agora $g(x) = 0$ e suponha que o suporte de f é o intervalo $[m,M]$, com $0 < m < M < L$. Usando um argumento geométrico, determine para que suportes $[m,M]$ é que a perturbação inicial f atinge todos os pontos da fronteira do domínio $[0,L]$ no mesmo instante de tempo.
Observação: Sendo $f : A \to \mathbb{R}$, o suporte de f é o conjunto definido por

$$\mathit{supp} f := \overline{\{x \in A : f(x) \neq 0\}}\,,$$

onde $\bar{B}$ designa o fecho do conjunto B.

Resolução:

I.

1.a) As soluções estacionárias de (34) são as soluções constantes, i.e., os pontos $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} \in \mathcal{N}(A)$ onde A é a matriz de (34):

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

pelo que os pontos de equilíbrio são os pontos do conjunto

$$E_0 = \{(\alpha, \alpha, 0)^{\mathrm{T}} : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

b) Os valores próprios de A são os zeros do polinómio característico

$$p_A(\lambda) = (-2-\lambda)\left((-1-\lambda)^2 - 1\right) = -\lambda(\lambda+2)^2,$$

ou seja, $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2$ e $\lambda_3 = -2$. Como $\mathrm{Re}(\lambda_2) = \mathrm{Re}(\lambda_3) = -2 < 0$ e o valor próprio nulo é simples (e portanto tem que ter multiplicidade algébrica ($= 1$) igual à multiplicidade geométrica, uma vez que esta é > 0 e $\leq$ que a multiplicidade algébrica) conclui-se, pelo teorema que classifica a estabilidade dos equilíbrios dos sistemas lineares com base nos valores próprios da matriz do sistema, que todos os pontos de equilíbrio são estáveis, mas não são assimptoticamene estáveis.

c) É óbvio que um subespaço unidimensional invariante é o espaço nulo de A, constituido pelos equilíbrios, E_0. Por outro lado o espaço próprio correspondente ao valor próprio $\lambda = -2$ é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \iff \begin{cases} v_2 = -v_1 \\ v_3 = 0 \end{cases} \iff \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \beta,$$

onde $\beta \in \mathbb{R}$ é arbitrário. Consequentemente o espaço $E_1 = \{(\beta, -\beta, 0)^{\mathrm{T}} : \beta \in \mathbb{R}\}$ é invariante. Observe-se que E_0 é ortogonal a E_1: $\alpha(1,1,0)^{\mathrm{T}} \cdot \beta(1,-1,0)^{\mathrm{T}} = \alpha\beta(1-1+0) = 0$. Isto permite concluir que o espaço bidimensional pedido no enunciado pode ser dado por

$$L_2 = E_0 \oplus E_1.$$

d) Atendendo ao que foi visto nas alíneas anteriores conclui-se que o sistema (34) restringido a L_2 tem o retrato de fase da Figura 24.

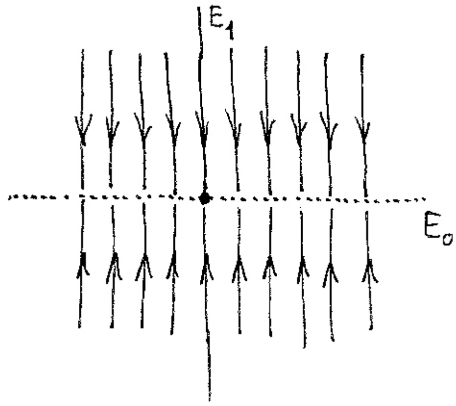


Figura 24: Retrato de fases do sistema (34) restringido a L_2.

2. O vector $\mathbf{b} = (0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$ é do tipo $\mathbf{p}(t)e^{\mu t}$ com $\mathbf{p}$ um polinómio de grau 0 e $\mu = 0$. Como $\mu = 0$ é valor próprio da matriz do sistema, com multiplicidade (algébrica) igual a 1 pode-se tentar uma solução particular de (34) do tipo

$$\mathbf{x}_{\text{part}}(t) = \begin{bmatrix} a_1 t + a_2 \\ b_1 t + b_2 \\ c_1 t + c_2 \end{bmatrix}.$$

Tem-se, neste caso

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_{\text{part}} - A\mathbf{x}_{\text{part}} &= \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 t + a_2 \\ b_1 t + b_2 \\ c_1 t + c_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (a_1 + a_2 + b_2) + (a_1 - b_1)t \\ (b_1 - a_2 + b_2 - c_2) + (b_1 - a_1 - c_1)t \\ (c_1 + 2c_2) + 2c_1 t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e, como $\mathbf{x}_{\text{part}}$ tem de ser uma solução do sistema não-homogéneo, o último vector acima tem de ser igual a $\mathbf{b}$, ou seja, tem de se ter

$$\begin{cases} a_1 + a_2 - b_2 = 0 \\ a_1 - b_1 = 0 \\ b_1 - a_2 + b_2 - c_2 = 0 \\ b_1 - a_1 - c_1 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = 1 \\ 2c_1 = 0 \end{cases}$$

pelo que se tem $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{1}{2}$, $a_1 = b_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = b_2 - \frac{1}{4}$ e b_2 arbitrário. Uma solução particular será (fazendo $b_2 = \frac{1}{4}$)

$$\mathbf{x}_{\text{part}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}t \\ \frac{1}{4}t + \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

II.

a) Atendendo a que $\cos t = \operatorname{Re}\left(e^{it}\right)$ iremos primeiro obter uma expressão para uma solução particular complexa da equação complexa associada a (35). Escrevendo a equação dada como $(D^3 + D)x = \cos t$ e factorizando o polinómio diferencial do membro esquerdo obtem-se $D(D+i)(D-i)x = \cos t$. A equação complexa correspondente é $D(D+i)(D-i)x = e^{it}$. Como $\lambda = i$ é um zero simples do polinómio caracteristico associado podemos tentar uma solução particular do tipo

$$\tilde{x}_{\text{part}}(t) = (\alpha t + \beta)e^{it} \qquad (\text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{C}).$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} D\tilde{x}_{\text{part}} &= \alpha e^{it} + (\alpha t + \beta)ie^{it} \\ D^2\tilde{x}_{\text{part}} &= 2\alpha i e^{it} - (\alpha t + \beta)e^{it} \\ D^3\tilde{x}_{\text{part}} &= -3\alpha e^{it} - (\alpha t + \beta)ie^{it} \end{aligned}$$

e a equação não-homogénea resulta em

$$-3\alpha e^{it} - (\alpha t + \beta)ie^{it} + \alpha e^{it} + (\alpha t + \beta)ie^{it} = e^{it},$$

ou seja, $\alpha = -1/2$ e $\beta \in \mathbb{C}$ arbitrário. Escolhendo $\beta = 0$ tem-se a solução particular complexa $\tilde{x}_{\text{part}}(t) = -\frac{1}{2}te^{it}$, cuja parte real fornece uma solução particular real da equação (35):

$$x_{\text{part}}(t) = -\frac{1}{2}t\cos t.$$

b) Pelo que vimos na alínea anterior a solução geral real de (35) é

$$x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t - \frac{1}{2}t\cos t.$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x(t)dt &= \int_0^{\pi/2} (\alpha_0 + \alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t - \frac{1}{2}t\cos t)dt = \\ &= \alpha_0 t\Big|_0^{\pi/2} + \alpha_1 \sin t\Big|_0^{\pi/2} - \alpha_2 \cos t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}t\sin t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\cos t\Big|_0^{\pi/2} = \\ &= \alpha_0\frac{\pi}{2} + \alpha_1 + \alpha_2 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

e as condicões sobre a solução resultam no sistema seguinte

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 = 0 \\ \alpha_0 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_0 \frac{\pi}{2} + \alpha_1 + \alpha_2 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

que tem como solução $\alpha_0 = 1/2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = -1/2$ pelo que a solução é

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \sin t - (t+1)\cos t\right).$$

III.

a) $H(\lambda x, \lambda t) = \frac{\lambda t - \lambda x}{\lambda t + \lambda x} = \frac{\lambda(t-x)}{\lambda(t+x)} = \frac{t-x}{t+x} = H(x,t)$, $\forall t, x$, o que prova o pretendido.

b) Definindo $u(t) \overset{\text{def}}{=} x(t)/t$ tem-se $x = tu$ e $x' = tu' + u$. Como $H(x,t) = H\left(t\frac{x}{t}, t\right) = H\left(\frac{x}{t}, t\right) = H(u,1)$ a equação diferencial (36) pode-se escrever do seguinte modo:

$$\begin{aligned} & tu' + u = H(u,1) \iff \\ \iff\ & u' = \left(\tfrac{1-u}{1+u} - u\right)\tfrac{1}{t} \iff \\ \iff\ & \tfrac{1+u}{u^2+2u-1} u' = -\tfrac{1}{t} \end{aligned}$$

que é uma equação separável, como se pretendia.

c) Integrando a última equação da alínea anterior entre $t = 1$ e um valor de t arbitrário e tendo em conta que $u(1) = \frac{x(1)}{1} = 2$ tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_2^{u(t)} \frac{2(u+1)}{u^2+2u-1} du = -\int_1^t \frac{1}{s} ds \iff\ & \frac{1}{2}\log\left|u^2 + 2u - 1\right| - \frac{1}{2}\log 7 = -\log|t| + 0 \iff \\ \iff\ & \log\left|u^2+2u-1\right| = \log\frac{7}{t^2} \iff \\ \iff\ & \left|u^2+2u-1\right| = \frac{7}{t^2} \iff \\ \iff\ & u(t) = -1 + \frac{\sqrt{2t^2+7}}{t} \iff \\ \iff\ & x(t) = -t + \sqrt{2t^2+7}, \end{aligned}$$

onde o sinal + da raiz da última expressão foi escolhido atendendo a que $u(1) = 2$.

d) O domínio da função $x(t)$ obtida na alínea anterior é $\mathbb{R}$ uma vez que $2t^2 + 7 \geq 7 > 0$. Como a função radicanda é positiva ela é diferenciável no seu domínio, e portanto $x(t)$ é diferenciável em $\mathbb{R}$, com função derivada dada por

$$x'(t) = -1 - \frac{1}{2}\frac{4t}{\sqrt{2t^2+7}},$$

a qual é uma função contínua. Isto permite concluir que $x(t)$ é de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}$, pelo que o intervalo máximo de definição da solução é $\mathbb{R}$.

IV.

a) A técnica de separação de variáveis consiste em assumir que a solução $u(x,t)$ da equação diferencial parcial pode ser escrita na forma $u(x,t) = X(x)T(t)$, vindo então a equação das ondas em (37) na forma

$$XT'' = X''T \quad \text{em }]0,L[\times\mathbb{R}.$$

Assumindo que $X(x)$ e $T(t)$ são diferentes de zero em $(x,t) \in]0,L[\times\mathbb{R}$ pode-se dividir esta equação por $X(x)T(t)$ obtendo-se $\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X}$. Como a função do membro esquerdo só depende de t, a do membro direito só depende de x e a igualdade tem de se verificar para todos os pontos (x,t) do conjunto aberto $]0,L[\times\mathbb{R}$, conclui-se que tem de existir uma constante real σ, independente de t e de x, tal que

$$\frac{T''}{T}(t) = \sigma = \frac{X''}{X}(x) \quad (x,t) \in]0,L[\times\mathbb{R}.$$

A condição de fronteira vem

$$\begin{array}{rcl} 0 = u(0,t) = X(0)T(t) & \Longrightarrow & X(0) = 0 \\ 0 = u(L,t) = X(L)T(t) & \Longrightarrow & X(L) = 0 \end{array}$$

e obtemos o seguinte problema de valores na fronteira para $X9x)$:

$$\begin{cases} X'' - \sigma X = 0 & \text{em }]0,L[\\ X(0) = 0 = X(L). \end{cases}$$

Vejamos para que valores de σ existem soluções não identicamente nulas deste problema:

- Se $\sigma = 0$ tem-se $X'' = 0$ cujas soluções são $X(x) = ax + b$ e para a qual as condições na fronteira resultam em $a = b = 0$ e portanto a única solução do problema é a solução trivial $X(x) \equiv 0$.
- Se $\sigma > 0$ a solução geral da equação é $X(x) = ae^{\sqrt{\sigma}x} + be^{-\sqrt{\sigma}x}$. Atendendo às condições na fronteira tem-se o seguinte sistema para a e b :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\sigma}L} & e^{-\sqrt{\sigma}L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  e como o determinante desta matriz é $e^{-\sqrt{\sigma}L} - e^{\sqrt{\sigma}L} < 0$ $(\neq 0)$ conclui-se que a única solução do sistema é $a = b = 0$ do que resulta a solução trivial $X(x) \equiv 0$.
- Finalmente tome-se $\sigma < 0$. Por facilidade de notação é conveniente escrever $\sigma = -\lambda^2$ com $\lambda > 0$. A solução geral real da equação diferencial é agora $X(x) = a\cos\lambda x + b\sin\lambda x$. Atendendo às condições na fronteira tem-se $0 = X(0) = a\cos 0 + b\sin 0 = a$ e portanto $0 = X(L) = 0\cos\lambda L + b\sin\lambda L = b\sin\lambda L$ concluindo-se que, ou $b = 0$ e obtemos a solução $X(x) \equiv 0$, ou $\sin\lambda L = 0$, isto é, $\lambda = \lambda_k = \frac{k\pi}{L}, k \in \mathbb{N}_1$, obtendo-se assim infinitas soluções do problema de valores na fronteira, em particular as funções

$$X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \quad \forall k \in \mathbb{N}_1,$$

  e todas as combinações lineares de um número finito destas funções.

A equação para $T(t)$ vem agora, relembrando que $\sigma = -\frac{k^2\pi^2}{L^2}$,

$$T'' + \frac{k^2\pi^2}{L^2}T = 0$$

cuja solução geral é

$$T_k(t) = \alpha_k^{(1)} \cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right) + \alpha_k^{(2)} \sin\left(\frac{k\pi t}{L}\right)$$

e a solução geral formal da equação parcial com as condições de fronteira é

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k^{(1)} \cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right) + \alpha_k^{(2)} \sin\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right).$$

Atendendo às condições iniciais tem-se

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(1)} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

e

$$g(x) = u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(2)} \frac{k\pi}{L} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

donde se conclui que os $\alpha_k^{(1)}$ são os coeficientes de Fourier da série de senos de $f(x)$, onde esta função é prolongada a $\mathbb{R}$ com período $2L$ e como função ímpar. Assim tem-se

$$\alpha_k^{(1)} = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx.$$

Analogamente, os termos $\alpha_k^{(2)} \frac{k\pi}{L}$ são os coeficientes de Fourier de identica série para a função g, vindo assim

$$\alpha_k^{(2)} = \frac{2}{k\pi} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx.$$

b) Seja $\xi = x + t$ e $\eta = x - t$. Então $x = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$ e $t = \frac{1}{2}(\xi - \eta)$. Seja $v(\xi(x,t), \eta(x,t)) = u(x,t)$. Então

$$\begin{array}{l}
u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = v_\xi + v_\eta \\
u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(v_\xi + v_\eta) = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \\
u_t = v_\xi \xi_t + v_\eta \eta_t = v_\xi - v_\eta \\
u_{tt} = \frac{\partial}{\partial t}(v_\xi - v_\eta) = v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}
\end{array}$$

e se $u(x,t)$ fôr solução de $u_{tt} = u_{xx}$ tem-se

$$0 = u_{xx} - u_{tt} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} - v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} - v_{\eta\eta} = 4v_{\xi\eta},$$

ou seja

$$v_{\xi\eta} = 0.$$

Integrando sucessivamente, primeiro em relação a η e depois em relação a ξ, tem-se

$$v(\xi,\eta)=\int \varphi_1(\xi)d\xi+\varphi_2(\eta),$$

pelo que designando φ_2 por G e $\int \varphi_1$ por F e tendo em conta as relações entre ξ, η e v com x,t e u, vem $u(x,t)=F(x+t)+G(x-t)$ como se pretendia.

c) Tendo em atenção que $u(x,t)=F(x+t)+G(x-t)$ e que

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k^{(1)}\cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right)+\alpha_k^{(2)}\sin\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

pode-se, utilizando as expressões para o seno e o coseno da soma escrever as séries de Fourier de F e G. Relembrando que

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$$

e

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$

tem-se $\alpha\cos t\sin x+\beta\sin t\sin x=\alpha\cos t\sin x+\alpha\sin t\cos x-\alpha\sin t\cos x+\beta\cos t\cos x-\beta\cos t\cos x+\beta\sin t\sin x=\alpha\sin(x+t)+\beta\cos(x-t)-\alpha\sin t\sin x-\beta\cos t\cos x=\alpha\sin(x+t)+\beta\cos(x-t)-\alpha\sin t\sin x+\alpha\cos t\sin x-\beta\cos t\cos x+\beta\sin t\sin x-\alpha\cos t\sin x-\beta\sin t\sin x=\alpha\sin(x+t)+\beta\cos(x-t)+\alpha\sin(x-t)-\beta\cos(x+t)-\alpha\cos t\sin x-\beta\sin t\sin x$. Utilizando a igualdade entre o primeiro e o último membro, tem-se

$$\begin{aligned}\alpha\cos t\sin x+\beta\sin t\sin x &= \frac{1}{2}\left(\alpha\sin(x+t)-\beta\cos(x+t)\right)+\\ &\quad+\frac{1}{2}\left(\alpha\sin(x-t)+\cos(x-t)\right).\end{aligned}$$

Aplicando este resultado ao nosso caso tem-se

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k^{(1)}\cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right)+\alpha_k^{(2)}\sin\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)=\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k^{(1)}\sin\left(\frac{k\pi}{L}(x+t)\right)-\alpha_k^{(2)}\cos\left(\frac{k\pi}{L}(x+t)\right)\right)+\\ &\quad+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k^{(1)}\sin\left(\frac{k\pi}{L}(x-t)\right)+\alpha_k^{(2)}\cos\left(\frac{k\pi}{L}(x-t)\right)\right)\end{aligned}$$

vindo então

$$F(z)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k^{(1)}\sin\left(\frac{k\pi}{L}z\right)-\alpha_k^{(2)}\cos\left(\frac{k\pi}{L}z\right)\right)$$

e

$$G(z)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k^{(1)}\sin\left(\frac{k\pi}{L}z\right)+\alpha_k^{(2)}\cos\left(\frac{k\pi}{L}z\right)\right).$$

d) Sendo $g(x) \equiv 0$ vem $\alpha_k^{(2)} = 0$, $\forall k$ e tem-se, atendendo ao que ficou escrito nas alíneas a) e c),

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k^{(1)} \sin\left(\frac{k\pi}{L}(x+t)\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{L}(x-t)\right)\right) = \frac{1}{2}f(x+t) + \frac{1}{2}f(x-t)$$

onde f é a condição inicial para u. Assim, a solução consiste na sobreposição (soma) de duas "ondas", uma deslocando-se no sentido positivo do eixo dos x (com velocidade $V = 1$) e outra no sentido negativo (com velocidade $V = -1$). Considerando que f é tal que supp$f = [m, M]$ tem-se, esquematicamente, o comportamento apresentado na Figura 25.

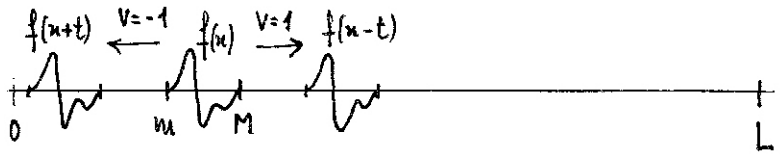


Figura 25: Representação esquemática da solução, quando supp$f = [m, M]$.

Como a velocidade de propagação da condição inicial é constante tem-se que o primeiro instante t_0 para o qual supp$\,(f(\cdot + t)) \cap \{0\}$ é não-vazio é igual a $t_0 = m/1$ enquanto que o correspondente instante t_1 para o qual supp$\,(f(\cdot - t)) \cap \{L\} \neq \phi$ é igual a $t_1 = (L - M)/1$. Pretendendo que $t_0 = t_1$ há que ter $L - M = m$, ou seja $M + m = L$, o que significa geometricamente que o ponto médio do suporte de f coincide com o ponto médio do intervalo $[0, L]$, i.e., $\frac{M+m}{2} = \frac{L-0}{2}$,

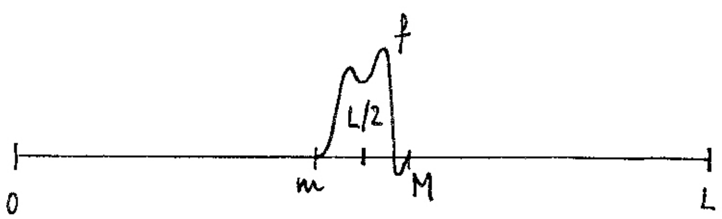


Figura 26: Tipo de condição inicial pedido no enunciado.

Exame de 25.1.96 e resolução.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

(Aeroespacial, Ambiente, Mecânica)

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

Data: 25/1/1996
Duração: 3h00.

I.

Considere o sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{b}(t). \tag{39}$$

1. Seja $\mathbf{b}(t) \equiv 0$.
   a) Determine a solução geral de (39).
   b) Identifique um subespaço tridimensional de $\mathbb{R}^4$, L_3, que seja invariante para (39) (i.e., tal que $\mathbf{x}(0) \in L_3 \Longrightarrow \mathbf{x}(t) \in L_3,\ \forall t$).
   c) Esboce o retrato de fase da restrição de (39) a L_3.
2. Com $\mathbf{b}(t) = (\cos 2t, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. Determine a solução de (39) que satisfaz a condição inicial $\mathbf{x}(0) = (1, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$.

II.

1. Considere a equação diferencial de Bernoulli
$$\frac{dx}{dt} = \alpha(t)x + \beta(t)x^n \tag{40}$$
onde $\alpha(\cdot)$ e $\beta(\cdot)$ são funções reais definidas e contínuas em $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$. Mostre que a mudança de variáveis $y(t) := x(t)^{1-n}$ transforma a equação (40) numa equação linear.
2. Considere a equação de Riccati escalar
$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} - x - x^2 \tag{41}$$
   a) Mostre que a função $\varphi(t)$ definida por $\varphi(t) := t^{-1} + \psi(t)$ é solução de (41) se e só se $\psi(t)$ é solução duma equação de Bernoulli apropriada. Determine a equação de Bernoulli em causa.
   b) Calcule a solução $\varphi(t)$ definida na alínea anterior.

III.

Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ e considere o sistema

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1' & = & x_2 \\ x_2' & = & -g(x_1) \end{array} \right. \tag{42}$$

1. Verifique que $V(x_1, x_2) := x_2^2 + 2\int_0^{x_1} g(u)du$ é uma constante de movimento para (42).

2. Considere a função $G(x_1) := \displaystyle\int_0^{x_1} g(u)du$.

   a) Qual a relação entre os pontos de estacionaridade de G e os pontos de equilibrio de (42)?

   b) Argumentando geometricamente estabeleça uma relação entre a estabilidade dos pontos de equilibrio de (42) e o sinal da segunda derivada de G.

   c) Prove que se $G(x_1) \to +\infty$ quando $|x_1| \to \infty$ então todas as órbitas de (42) são limitadas.

3. Esboce o retrato de fase de (42) quando $g(u) = u(u-1)^2$.

IV.

a) Utilize o método de separação de variáveis para obter a solução formal geral da equação das ondas amortecidas

$$u_{tt} + 2u_t - u_{xx} = 0 \qquad \text{em} \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times]0,1[,$$

com condições de Dirichlet homogéneas na fronteira.

b) Determine a solução formal do problema da alínea anterior que satisfaz a condição inicial $u(0,x) = 0$ e $u_t(0,x) = \frac{1}{2} - \left|x - \frac{1}{2}\right|$ no intervalo $[0,1]$.

c) O que pode concluir quanto à continuidade em $\mathbb{R}_0^+ \times [0,1]$ da solução formal obtida em b) ? E quanto à sua diferenciabilidade?

Resolução:

I.

1.a) A matriz A do sistema (39) é diagonal por blocos: $A = \mathrm{diag}(A_1, A_2)$ com

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

pelo que $e^{At} = \mathrm{diag}\left(e^{A_1 t}, e^{A_2 t}\right)$. Observando que $A_2 = -I_2 + 2N_2$ com

$$N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e atendendo a que $I_2 N_2 = N_2 I_2$ (já que a identidade comuta com qualquer matriz) tem-se

$$\begin{aligned} e^{A_2 t} &= e^{-I_2 t} \cdot e^{2N_2 t} = \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t + O \right) = \\ &= e^{-t} \begin{bmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} & 2te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para o cálculo de $e^{A_1 t}$ iremos utilizar o método de Putzer:

Os valores próprios de A_1 são os zeros de $p_{A_1}(\lambda) = \det(A_1 - \lambda I_2) = \lambda^2 + 4$ pelo que se tem $\lambda_1 = 2i$ e $\lambda_2 = -2i$. Consequentemente, tem-se

$$P_0(A) = I_2, \quad P_1(A_1) = A_1 - \lambda_1 I_2 = \begin{bmatrix} -2i & -4 \\ 1 & -2i \end{bmatrix}$$

e o sistema para as funções $r_k(t)$ é

$$\begin{cases} r_1' = 2ir_1, & r_1(0) = 1 \\ r_2' = -2ir_2 + r_1, & r_2(0) = 0 \end{cases}$$

A solução da primeira equação é $r_1(t) = e^{2it} = \cos 2t + i \sin 2t$. Quanto à segunda, multiplicando por uma função $\mu = \mu(t)$, tem-se $\mu r_2' + 2i\mu r_2 = \mu e^{2it}$. Para que o membro esquerdo seja igual a $(\mu r_2)' = \mu r_2' + \mu' r_2$ é necessário e suficiente que se tome μ igual a uma solução de $\mu' = 2i\mu$, por exemplo, $\mu = e^{2it}$, podendo-se então, neste caso, escrever a equação para r_2 na forma $\left(e^{2it} r_2\right)' = e^{4it}$. Integrando esta equação entre 0 e um valor de t arbitrário e usando a condição inicial $r_2(0) = 0$ tem-se $r_2(t) = \left(e^{2it} - e^{-2it}\right)/4i = \frac{1}{2} \sin 2t$.

Com isto tem-se

$$\begin{aligned}
e^{A_1 t} &= r_1(t)P_0(A_1) + r_2(t)P_1(A_1) = \\
&= (\cos 2t + i\sin 2t)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\sin 2t \begin{bmatrix} -2i & -4 \\ 1 & -2i \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \cos 2t & -2\sin 2t \\ \frac{1}{2}\sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Consequentemente, a solução geral de (39) é dada por

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos 2t & -2\sin 2t & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sin 2t & \cos 2t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 2te^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0)$$

onde $\mathbf{x}(0)$ é um vector abitrário de $\mathbb{R}^4$.

1.b) Sabendo que os espaços próprios correspondentes a valores próprios reais são subespaços reais invariantes para a equação, pode-se começar por determinar quais são estes espaços próprios. Os valores próprios reais de A são $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$ e, atendendo à estrutura da matriz A, os vectores próprios $\mathbf{v}$ correspondentes podem ser determinados do seguinte modo:

$$(A_2 - \lambda_3 I_2)\begin{bmatrix} v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2v_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Temos assim um subespaço de $\mathbb{R}^4$ invariante para a equação:

$$E_1 = \{(0,0,\alpha,0)^{\mathrm{T}}, \forall \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Pelo resultado da alínea anterior tem-se imediatamente que se $x_3(0) = x_4(0) = 0$ então $x_3(t) = x_4(t) = 0, \forall t$, pelo que o subespaço de $\mathbb{R}^4$ dado por

$$E_2 = \{(\beta,\gamma,0,0)^{\mathrm{T}},\ \forall \beta,\gamma \in \mathbb{R}\}$$

é invariante para (39). Consequentemente pode-se tomar $L_3 = E_2 \oplus E_1$.

1.c) Do que foi visto na alínea anterior, o retrato de fase de (39) restringido a L_3 pode ser esboçado tendo em conta a invariância de E_1 e de E_2 e o facto de L_3 ser a soma directa destes dois subespaços. Assim, a restrição do sistema a E_1 tem o retrato de fase representado na Figura 27.

Atendendo a que a restrição de (39) a E_2 é

$$\begin{cases} x_1' = -4x_2 \\ x_2' = x_1 \end{cases},$$

Figura 27: Retrato de fases da restrição do sistema (39) a E_1.

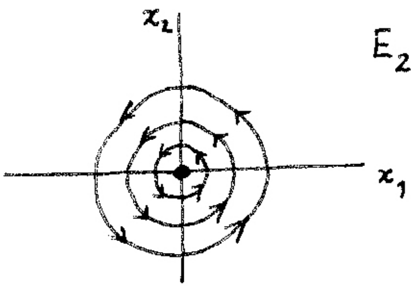


Figura 28: Retrato de fases da restrição do sistema (39) a E_2.

tem-se que $x_2(t)$ é crescente quando $x_1 > 0$ e é decrescente quando $x_1 < 0$. Isto permite traçar esboço para o retrato de fase da restrição de (39) a E_2 que se apresenta na Figura 28.

Atendendo ao que ficou visto acima, e ao facto de, por definição de L_3,

$$L_3 \ni \mathbf{x} = (\mathbf{y}, z) \in E_2 \oplus E_1$$

obtem-se o esboço do retrato de fase na Figura 29.

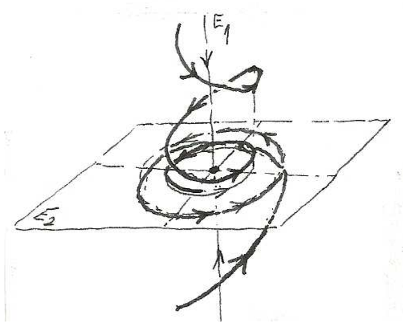


Figura 29: Retrato de fases da restrição do sistema (39) a L_3.

2. Pela fórmula de variação das constantes tem-se

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)\mathbf{b}(s)ds,$$

onde $\Phi(t) = e^{At}$, $\mathbf{x}(0) = (1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$ e $\mathbf{b}(t) = (\cos 2t, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. Como $\left(e^{At}\right)^{-1} = e^{-At} = e^{A(-t)}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} \cos 2t & -2\sin 2t & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sin 2t & \cos 2t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 2te^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} \cos 2t & -2\sin 2t & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sin 2t & \cos 2t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 2te^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} \cos 2s & 2\sin 2s & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sin 2s & \cos 2s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{s} & -2se^{s} \\ 0 & 0 & 0 & e^{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ds \\
&= \begin{bmatrix} \cos 2t \\ \frac{1}{2}\sin 2t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos 2t & -2\sin 2t & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sin 2t & \cos 2t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 2te^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} \cos^2 2s \\ -\frac{1}{2}\sin 2s\cos 2s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ds
\end{aligned}$$

Atendendo a que

$$\int_0^t \sin 2s \cos 2s ds = \frac{1}{4}\sin^2 2s \Big|_0^t = \frac{1}{4}\sin^2 2t$$

$$\int_0^t \cos^2 2s ds = \int_0^t \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 4s\right) ds = \frac{1}{2}t + \frac{1}{8}\sin 4t$$

obtem-se o resultado seguinte:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos 2t + \frac{1}{4}\cos 2t - \frac{1}{4}\cos^3 2t - t\sin 2t - \frac{1}{4}\sin 4t \sin 2t \\ \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{8}\sin^3 2t + \frac{1}{2}t\cos 2t + \frac{1}{8}\sin 4t\cos 2t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

II.

1. Suporemos $x(t) \neq 0$, $\forall t$. Atendendo à mudança de variáveis dada tem-se

$$\begin{aligned}
y' &= (1-n)x^{-n}x' \;=\; (1-n)x^{-n}\left(\alpha x + \beta x^n\right) \;= \\
&= (1-n)\alpha x^{1-n} + (1-n)\beta \;= \\
&= (1-n)\alpha y + (1-n)\beta,
\end{aligned}$$

onde $\alpha = \alpha(t)$ e $\beta = \beta(t)$. A equação obtida para y é linear, como se pretendia.

2.a) Atendendo a que $\varphi(t) = t^{-1} + \psi(t)$, tem-se

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{t^2} + \psi' &\overset{(a)}{=} \varphi' \overset{(b)}{=} \frac{1}{t} - \varphi - \varphi^2 \overset{(a)}{=} \frac{1}{t} - \left(\frac{1}{t} + \psi\right) - \left(\frac{1}{t} + \psi\right)^2 = \\
&= -\psi - \frac{1}{t^2} - \psi^2 - \frac{2}{t}\psi = \\
&= -\frac{1}{t^2} - \left(1 + \frac{2}{t}\right)\psi - \psi^2
\end{aligned}$$

onde as igualdades `(a)` vêm da relação entre φ e ψ e a igualdade `(b)` vem da hipótese de φ ser solução de (42). Obtém-se assim $\psi' = -\left(1 + \frac{2}{t}\right)\psi - \psi^2$ e portanto ψ tem de ser solução de uma equação de Bernoulli com $\alpha(t) = -\left(1 + \frac{2}{t}\right)$, $\beta(t) = -1$ e $n = 2$. A recíproca é também evidentemente verdadeira.

2.b) Pela alínea 1. conclui-se que se pode transformar a equação

$$\psi' = -\left(1 + \frac{2}{t}\right)\psi - \psi^2$$

em

$$y' = \left(1 + \frac{2}{t}\right)y + 1 \tag{43}$$

utilizando a mudança de variáveis $y = \psi^{-1}$. A equação (43) é linear não-homogénea. Procuremos um factor integrante: multiplicando (43) por $\mu = \mu(t)$ vem

$$\mu y' - \left(1 + \frac{2}{t}\right)\mu y = \mu$$

e o membro esquerdo desta equação será igual a $(\mu y)' = \mu y' + \mu' y$ se e só se $\mu' = -\left(1 + \frac{2}{t}\right)\mu$, ou seja

$$\mu(t) = e^{-\int (1 + \frac{2}{t})dt} = e^{-t - 2\log|t|} = e^{-t + \log t^{-2}} = e^{-t}t^{-2} = \frac{1}{t^2 e^t}.$$

Com este factor integrante a equação pode-se escrever como

$$\left(\frac{1}{t^2 e^t}y(t)\right)' = \frac{1}{t^2 e^t}$$

pelo que primitivando ambos os membros e explicitando $y(x)$ tem-se

$$y(t) = t^2 e^t \int \frac{1}{t^2 e^t}dt + Ct^2 e^t$$

obtendo-se por fim a seguinte expressão para $\varphi(t) = t^{-1} + \frac{1}{y(t)}$:

$$\varphi(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{Ct^2 e^t + t^2 e^t \int \frac{1}{t^2 e^t}dt},$$

onde C é uma constante real.

III.

1.

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt}\left(x_1(t), x_2(t)\right) &= \frac{\partial V}{\partial x_1}x_1' + \frac{\partial V}{\partial x_2}x_2' = \\
&= 2g(x_1)x_1' + 2x_2x_2' = \\
&= 2g(x_1)x_2 + 2x_2\left(-g(x_1)\right) = \\
&= 0, \quad \forall t,
\end{aligned}$$

pelo que V é constante sobre órbitas do sistema, i.e., é uma constante do movimento para (42).

2.a) Os pontos de equilíbrio de (42) são as soluções (x_1, x_2) do sistema

$$\begin{cases} x_1' = 0 \\ x_2' = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ -g(x_1) = 0. \end{cases}$$

Consequentemente os pontos de equilíbrio de (42) são os pontos $(\alpha, 0)$ onde α é uma solução da equação $g(x) = 0$. (Caso g não tenha zeros, o sistema não tem pontos de equilíbrio).

Os pontos de estacionaridade de G são os zeros de G' e como

$$G'(x_1) = 0 \Longleftrightarrow \frac{d}{dx}\int_0^{x_1} g(u)du = 0 \Longleftrightarrow g(x_1) = 0,$$

conclui-se, então, que os pontos de equilibrio de (42) são os pontos $(\alpha, 0)$ onde α é um ponto de estacionaridade de G.

2.b) Observe-se primeiro que

$$G''(x_1) = \frac{d^2}{dx_1^2}\int_0^{x_1} g(u)du = \frac{d}{dx_1}g(x_1) = g'(x_1).$$

Seja $(\alpha, 0)$ um ponto de equilíbrio de (42). A matriz Jacobiana do sistema neste ponto é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g'(\alpha) & 0 \end{bmatrix}$$

cujos valores próprios são $\lambda_\pm = \pm\sqrt{-g'(\alpha)}$. Conclui-se daqui que se $g'(\alpha) < 0$ os valores próprios são reais e $\lambda_- < 0 < \lambda_+$ pelo que o ponto de equilíbrio é um ponto de sela de (42) e, portanto, é instável. Se $g'(\alpha) > 0$ o método de linearização não é aplicável ao estudo de (42) numa vizinhança do ponto de equilíbrio, uma vez que $\mathrm{Re}\,(\lambda_\pm) = 0$. Podemos neste caso completar o estudo usando um argumento geométrico. Relembrando que $V(x_1, x_2) = x_2^2 + 2G(x_1)$ é uma constante do movimento, considere-se o que se passa numa pequena vizinhança do ponto de equilíbrio $(\alpha, 0)$ onde, por hipótese, $G''(\alpha) > 0$.

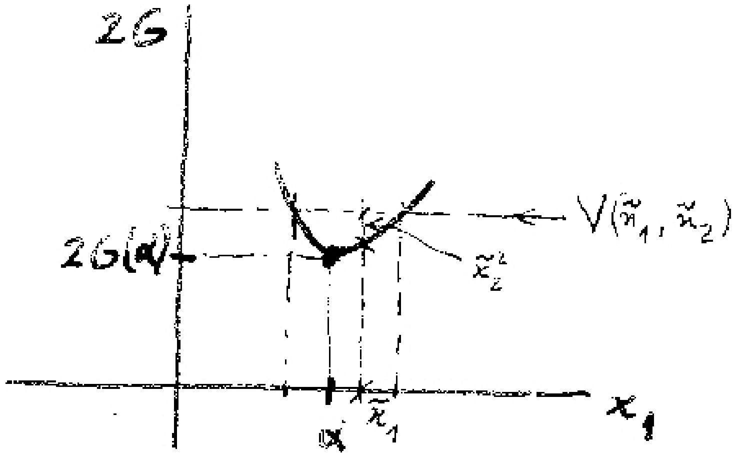


Figura 30: Gráfico de $2G$ numa pequena vizinhança do ponto de $x_1 = \alpha$.

Sendo $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ um ponto arbitrário numa vizinhança suficientemente pequena de $(\alpha, 0)$ e designando por $(x_1(t), x_2(t))$ a solução com condição inicial $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ conclui-se [ver figura] que a órbita $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} \{(x_1(t), x_2(t))\}$ permanece numa vizinhança de $(\alpha, 0)$. Isto permite afirmar que o ponto de equilíbrio $(\alpha, 0)$ é, neste caso, estável. Tem-se, então, o seguinte: sendo $(\alpha, 0)$ um ponto de estacionaridade de (42):

$$\begin{array}{lll} G''(\alpha) < 0 & \Longrightarrow & (\alpha,0) \text{ é instável} \\ G''(\alpha) > 0 & \Longrightarrow & (\alpha,0) \text{ é estável.} \end{array}$$

2.c) Seja $(x_1(t), x_2(t))$ uma solução de (42) correspondente a uma condição inicial $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \mathbb{R}^2$. Sendo V uma constante do movimento vem

$$\mathbb{R} \ni \tilde{V} \stackrel{\text{def}}{=} V(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = V(x_1(t), x_2(t)) = x_2^2(t) + 2G(x_1(t)).$$

Suponhamos que a órbita correspondente a esta solução não é limitada. Então, quando $|t| \to +\infty$, ou $|x_1(t)| \to +\infty$ ou $|x_2(t)| \to +\infty$. Em qualquer dos casos ter-se-ia

$$\mathbb{R} \ni \tilde{V} = \lim_{|t|\to+\infty} \tilde{V} = \lim_{|t|\to+\infty} \left(x_2^2(t) + 2G(x_1(t))\right) = +\infty,$$

o que é absurdo. Conclui-se, então, que todas as órbitas do sistema são limitadas.

3. Os pontos de equilíbrio de

$$\left\{ \begin{array}{lll} x_1' & = & x_2 \\ x_2' & = & -x_1(x_1-1)^2 \end{array} \right.$$

são $(0,0)$ e $(1,0)$.

Linearizações em torno dos pontos de equilíbrio:

- Em torno do ponto $(0,0)$:

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

Valores próprios de matriz: $\lambda_{\pm} = \pm i$. Atendendo a que $\mathrm{Re}\lambda_{\pm} = 0$, o método de linearização não é aplicável, pelo que não adianta prosseguir com o estudo do sistema linearizado em torno de $(0,0)$.

- Em torno do ponto $(1,0)$:

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

Valores próprios de matriz: $\lambda_{\pm} = 0$. Tal como anteriormente, o método de linearização não é aplicável.

Utilizando os resultados da alínea 2.b):

$$G''(\alpha) = g'(\alpha) = 1 - 4\alpha + 3\alpha^2 = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

pelo que $(0,0)$ é um ponto de equilíbrio estável e para $(1,0)$ o critério obtido em 2.b) não é aplicável. Como $V(x_1, x_2) = x_2^2 + 2\int_0^{x_1} u(u-1)^2 du$ é uma constante do movimento, sabe-se que as órbitas do sistema estão contidas nos conjuntos de nível de V e, atendendo à estrutura de V, isto é, ao facto de V ser a soma de uma função quadrática (e portanto não-negativa) de x_2 com uma função só de x_1, conclui-se o apresentado na Figura 31. O sentido das órbitas é facilmente determinado a partir, por exemplo, da primeira equação do sistema: de $x_1' = x_2$ conclui-se que $x_1(t)$ é crescente quando $x_2 > 0$ e decrescente quando $x_2 < 0$ pelo que se tem o esboço de retrato de fase da Figura 32

IV.

a) Considere-se o problema

$$\begin{cases} u_{tt} + 2u_t - u_{xx} = 0 & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times]0,1[\\ u(t,0) = u(t,1) = 0 \end{cases}$$

e faça-se $u(t,x) = T(t)X(x)$, supondo que $T(t) \neq 0$, em $\mathbb{R}^+$ e $X(x) \neq 0$ em $]0,1[$. Tem-se $u_t = T'X$, $u_{tt} = T''X$ e $u_{xx} = TX''$, pelo que a equação diferencial fica $T''X + 2T'X - TX'' = 0$, ou seja

$$\frac{T'' + 2T'}{T}(t) = \frac{X''}{X}(x) \quad \text{em } (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times]0,1[.$$

Consequentemente tem de existir uma constante real σ, independente de t e de x, tal que

$$\frac{T'' + 2T'}{T} = \sigma = \frac{X''}{X} \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times]0,1[,$$

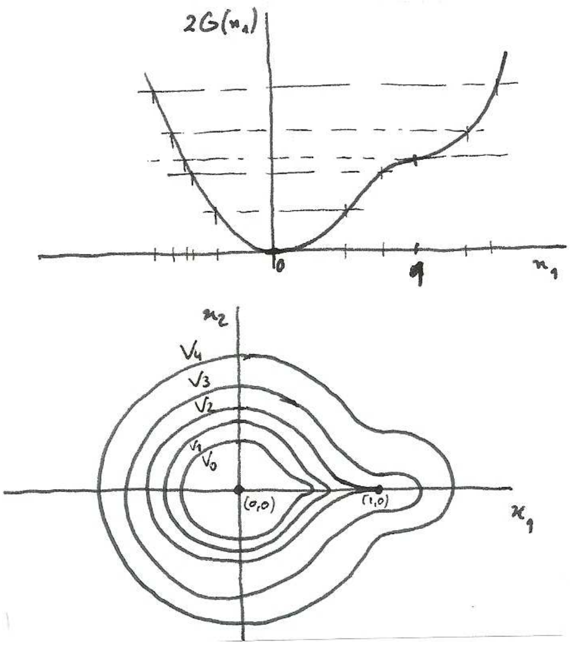


Gráfico de $2G(x_1)$

Conjuntos de nível $V_i \geq 0$:
$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : V(x_1, x_2) = V_i\}$
com $V_0 < V_1 < V_2 < V_3 < V_4$.

Figura 31: Gráfico de $2G$ e conjuntos de nível de V.

o que resulta no seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{array}{l} X'' - \sigma X = 0 \\ T'' + 2T' - \sigma T = 0. \end{array}$$

Quanto às condições de fronteira:

$$\begin{array}{rcccccl} u(t,0) & = & T(t)X(0) & = & 0 & \Longrightarrow & X(0) = 0 \\ u(t,1) & = & T(t)X(1) & = & 0 & \Longrightarrow & X(1) = 0, \end{array}$$

uma vez que $T(t) \neq 0$ em $\mathbb{R}^+$. Obtém-se assim o seguinte problema de valores na fronteira para X :

$$\left\{ \begin{array}{l} X'' - \sigma X = 0 \\ X(0) = X(1) = 0 \end{array} \right.$$

Estudaremos de seguida a possibilidade de obtenção de soluções *não-triviais* (que não são identicamente nulas) deste problema:

- Considere-se $\sigma = 0$. A equação diferencial fica reduzida a $X'' = 0$ cujas soluções são $X(x) = ax + b$ e atendendo às condições na fronteira $0 = X(0) = b$ e $0 = X(1) = a + b$ conclui-se imediatamente que $a = b = 0$ e portanto a única solução do problema é a solução trivial $X(x) \equiv 0$.

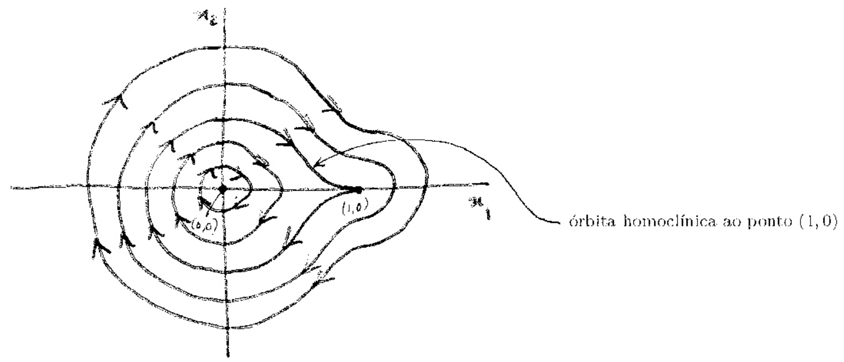


Figura 32: Esboço de retrato de fase.

- Seja agora $\sigma > 0$. A solução geral da equação é $X(x) = ae^{\sqrt{\sigma}x} + be^{-\sqrt{\sigma}x}$. Atendendo às condições na fronteira tem-se $0 = X(0) = a + b$ e $0 = X(1) = ae^{\sqrt{\sigma}} + be^{-\sqrt{\sigma}}$ cuja única solução é $a = b = 0$ fornecendo como única solução da equação a função identicamente nula $X(x) \equiv 0$.
- Finalmente tome-se $\sigma < 0$. Por facilidade de notação é conveniente escrever $\sigma = -\lambda^2$ com $\lambda > 0$. A solução geral real da equação diferencial é agora $X(x) = a\cos\lambda x + b\sin\lambda x$. Atendendo às condições na fronteira tem-se $0 = X(0) = a\cos 0 + b\sin 0 = a$ e portanto $0 = X(1) = 0\cos\lambda + b\sin\lambda = b\sin\lambda$ concluindo-se que, ou $b = 0$ e obtemos a solução $X(x) \equiv 0$, ou $\sin\lambda = 0$, isto é, $\lambda = \lambda_k = k\pi, k \in \mathbb{N}_1$, obtendo-se assim infinitas soluções do problema de valores na fronteira, em particular as funções $X_k(x) = \sin(k\pi x), \ \ \forall k \in \mathbb{N}_1$, e todas as combinações lineares de um número finito destas funções.

Atendendo a que $\sigma = -\lambda_k^2 = -k^2\pi^2$ a equação para T pode-se escrever como $T'' + 2T' + (k\pi)^2 T = 0$, ou seja

$$\underbrace{\left[D^2 + 2D + (k\pi)^2\right]}_{P(D)} T = 0.$$

Os zeros de $P(\lambda)$ são

$$\lambda_{\pm} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4k^2\pi^2}}{2} = -1 \pm \sqrt{1 - k^2\pi^2} = -1 \pm i\sqrt{k^2\pi^2 - 1}.$$

Conclui-se assim que a solução geral da equação para T é

$$T_k(t) = \left(a_k \cos\left(\sqrt{k^2\pi^2 - 1}\, t\right) + b_k \sin\left(\sqrt{k^2\pi^2 - 1}\, t\right)\right) e^{-t}, \quad k \in \mathbb{N}_1$$

e portanto a solução formal geral do problema de Dirichlet é

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos\left(\sqrt{k^2\pi^2 - 1}\, t\right) + b_k \sin\left(\sqrt{k^2\pi^2 - 1}\, t\right)\right) e^{-t} \sin(k\pi x).$$

b) Sendo $u(0,x) = 0$ conclui-se que

$$0 = u(0,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k + 0)e^{-0} \sin(k\pi x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin(k\pi x) \Longrightarrow a_k = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}_1,$$

e portanto

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\left(\sqrt{k^2\pi^2 - 1}\ t\right) \sin(k\pi x) e^{-t}.$$

Supondo que $u(t,x)$ é diferenciável termo-a-termo em relação a t tem-se

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\pi x) \left[\sqrt{k^2\pi^2 - 1}\ \cos\left(\sqrt{k^2\pi^2 - 1}\ t\right) e^{-t} - \sin\left(\sqrt{k^2\pi^2 - 1}\ t\right) e^{-t}\right]$$

e, portanto, em $(0,x)$ vem

$$\frac{1}{2} - \left|x - \frac{1}{2}\right| = u_t(0,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sqrt{k^2\pi^2 - 1}\ \sin(k\pi x),$$

concluindo-se que $b_k\sqrt{k^2\pi^2 - 1}$ são os coeficientes da expansão em senos da função $f(x) = \frac{1}{2} - \left|x - \frac{1}{2}\right|$ no intervalo $[0,1]$. Para obter uma expansão em senos há que prolongar esta função a $[-1,1]$ como uma função ímpar e depois prolongá-la periodicamente a $\mathbb{R}$ (com período $2L = 2$).

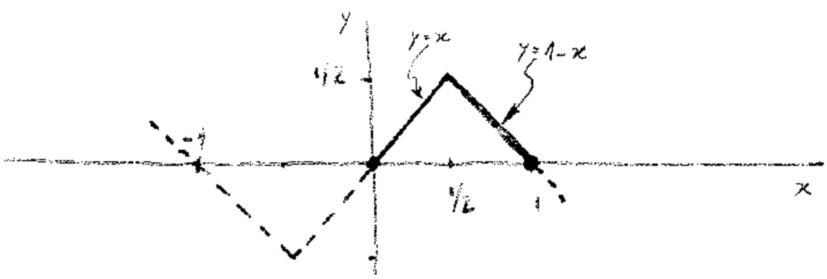


Figura 33: Função f e o seu prolongamento par com período 1.

Deste modo, os coeficientes de Fourier são dados por:

$$\begin{aligned}
\beta_k &= \frac{2}{1}\int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \left|x - \frac{1}{2}\right|\right)\sin(k\pi x)dx = \\
&= 2\int_0^{1/2} x\sin(k\pi x)dx + 2\int_{1/2}^1 (1-x)\sin(k\pi x)dx = \\
&= 2\int_0^{1/2} x\sin(k\pi x)dx - 2\int_{1/2}^1 x\sin(k\pi x)dx + \frac{2}{k\pi}\left(-\cos k\pi x\right)\Big|_{1/2}^1 = \\
&= \frac{2}{k\pi}\left(\cos k\frac{\pi}{2} - \cos k\pi\right) - \frac{1}{k\pi}\cos k\frac{\pi}{2} + 2\frac{1}{k^2\pi^2}\left(\sin k\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) + \\
&\quad + \frac{2}{k\pi}\cos k\pi - \frac{1}{k\pi}\cos k\frac{\pi}{2} - 2\frac{1}{k^2\pi^2}\left(\sin k\pi - \sin k\frac{\pi}{2}\right) = \\
&= \frac{4}{k^2\pi^2}\sin k\frac{\pi}{2} - \frac{2}{k^2\pi^2}\sin k\frac{\pi}{2} = \\
&= \begin{cases} 0, & \text{se } k \text{ é par} \\ \dfrac{4(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2\pi^2}, & \text{se } k = 2n-1 \ (k \text{ é ímpar}). \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclui-se então que

$$b_{2n-1} = \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi^2(2n-1)^2\sqrt{(2n-1)^2\pi^2 - 1}}$$

e portanto a solução formal é

$$u(t,x) = e^{-t}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi^2(2n-1)^2\sqrt{(2n-1)^2\pi^2-1}}\sin\left(\sqrt{(2n-1)^2\pi^2-1}\ t\right)\sin\left((2n-1)\pi x\right).$$

c) Para abreviar a escrita, seja $u(t,x) = e^{-t}\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t,x)$. Tem-se

$$|u_n(t,x)| \leq \frac{4}{\pi^2(2n-1)^2\sqrt{(2n-1)^2\pi^2-1}} \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad \text{quando} \quad n \to \infty$$

e portanto, pelo teste-M de Weierstrass, a série cuja soma é $u(t,x)$ é uniformemente convergente em $\mathbb{R}^2$. Como somas de séries uniformemente convergentes de funções contínuas são funções contínuas conclui-se que $u(t,x)$ é contínua em $\mathbb{R}^2$ e portanto também em $\mathbb{R}^+ \times [0,1]$.

Atendendo a que

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi^2(2n-1)^2}\cos\left(\sqrt{(2n-1)^2\pi^2-1}\ t\right)\sin\left((2n-1)\pi x\right)$$

tem-se

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| \leq \frac{4}{\pi^2(2n-1)^2} \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{quando} \quad n \to \infty$$

e o teste-M de Weierstrass permite concluir que a séries $\sum_n |\partial u_n/\partial t|$ é uniformemente convergente. Aplicando o teorema sobre a diferenciabilidade termo-a-termo de séries de funções conclui-se que u é diferenciável em ordem a t e que $\partial u/\partial t$ pode ser calculado derivando termo-a-termo a série. Analogamente, tem-se

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right| \leq \frac{4}{\pi(2n-1)\sqrt{(2n-1)^2\pi^2-1}} \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{quando} \quad n \to \infty$$

e portanto as conclusões anteriores são válidas também para $\partial u/\partial x$. Para as segundas derivadas parciais presentes na equação tem-se

$$\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}\right| \; , \; \left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right| \; \leq \; M_n \; \sim \; \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{quando} \quad n \to \infty$$

e o teste-M de Weierstrass não é aplicável. Consequentemente não podemos, por este método, concluir nada sobre se a solução formal apresentada é, ou não, duas vezes diferenciável em ordem a t e em ordem a x. Em particular, nada podemos concluir sobre se a solução formal é, ou não, uma solução (clássica) do problema posto.

Exame de 27.2.96 e resolução.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

(Aeroespacial, Ambiente, Mecânica)

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

Data: 27/2/1996
Duração: 3h00.

I.

Considere o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u'' + w' + u - w & = & b(t) \\ u' + w' + u - w & = & 0. \end{array} \right. \tag{44}$$

1. Considere $b(t) \equiv 0$.
   a) Verifique que o sistema (44) é linear.
   b) Utilize uma mudança de variáveis apropriada para transformar o sistema (44) num sistema de equações lineares de *primeira ordem.*
   c) Determine a solução geral do sistema que obteve na alínea anterior[3].
   d) Determine o(s) ponto(s) de equilíbrio de (44) e estude-o(s) quanto à estabilidade[4].
2. Suponha que $b(t) = e^{-t}$. Determine uma solução particular de (44).

II.

Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{4y^2 + 2x} \tag{45}$$

a) Mostre que esta equação tem um factor integrante $\mu = \mu(y)$.

b) Determine a solução de (45) que satisfaz $y(1) = 1$.

c) Determine o intervalo máximo de existência da solução que calculou na alínea anterior.

---

[3] Se *não* resolveu a alínea 1.b) considere o sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

[4] Veja nota anterior

III.

Seja $V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$. Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem

$$\begin{cases} x' &= -\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) \\ \\ y' &= -\frac{\partial V}{\partial y}(x,y). \end{cases} \tag{46}$$

1. Mostre que $V(x,y)$ é uma função de Liapunov para (46).
2. Considere a função $V(x,y) = y^2 + (x^2-1)^2$.
   a) Determine o(s) ponto(s) de equilíbrio de (46).
   b) Linearize (46) em torno do(s) ponto(s) de equilíbrio. Esboce o(s) retrato(s) de fase do(s) sistema(s) linearizado(s) que obteve.
   c) Utilizando a função de Liapunov V e (quando possível) os resultados da alínea anterior, esboce o retrato de fase do sistema.

IV.

Em dinâmica de fluidos uma simplificação das equações de Navier-Stokes resulta nas equações de Boussinesq, as quais, numa versão linear, se podem escrever como

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} - \beta^2 u_{xxtt} = 0 \tag{47}$$

onde α e β são parâmetros não nulos.

a) Utilizando o método de separação de variáveis, determine a solução formal geral da equação (47) na região $t > 0,\ 0 < x < 1$, com condições de Dirichlet homogéneas $u(t,0) = u(t,1) = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}_0^+$.

b) Determine a solução formal do problema da alínea anterior que satisfaz a condição inicial $u(0,x) = 0,\ u_t(0,x) = 1 - |2x-1|$ em $[0,1]$.

c) Poderá utilizar o teste-M de Weierstrass para estudar a solução formal obtida em b) quanto à continuidade e à diferenciabilidade? Justifique detalhadamente.

Resolução:

I.

1.a) Sejam (u_1, w_1) e (u_2, w_2) duas soluções de (44). Então, sendo α e β constantes reais arbitrárias, considere-se a função $\alpha(u_1, w_1) + \beta(u_2, w_2) = (\alpha u_1 + \beta u_2, \alpha w_1 + \beta w_2)$. Tem-se $(\alpha u_1 + \beta u_2)'' + (\alpha w_1 + \beta w_2)' + (\alpha u_1 + \beta u_2) + (\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha u_1'' + \beta u_2'' + \alpha w_1' + \beta w_2' + \alpha u_1 + \beta u_2 - \alpha w_1 - \beta w_2 = \alpha(u_1'' + w_1' + u_1 - w_1) + \beta(u_2'' + w_2' + u_2 - w_2) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$ e $(\alpha u_1 + \beta u_2)' + (\alpha w_1 + \beta w_2)' + (\alpha u_1 + \beta u_2) - (\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha u_1' + \beta u_2' + \alpha w_1' + \beta w_2' + \alpha u_1 + \beta u_2 - \alpha w_1 - \beta w_2 = \alpha(u_1' + w_1' + u_1 - w_1) + \beta(u_2' + w_2' + u_2 - w_2) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$, concluindo-se, portanto, que $(\alpha u_1 + \beta u_2, \alpha w_1 + \beta w_2)$ é também solução, pelo que a equação é linear.

1.b) Com a mudança de variáveis $x_1 \stackrel{\text{def}}{=} u$, $x_2 \stackrel{\text{def}}{=} u'$ e $x_3 \stackrel{\text{def}}{=} w$ tem-se

$$\begin{cases} x_1' &= u' = x_2 \\ x_2' &= u'' = w - u - w' = u' = x_2 \\ x_3' &= w' = w - u - u' = x_3 - x_1 - x_2 \end{cases}$$

pelo que vem

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

1.c) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Os valores próprios de A são os zeros do polinómio característico

$$p_A(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)\det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2,$$

ou seja, $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Iremos utilizar o método de Putzer:

▬ Cálculo de $r_1(t)$:

$$r_1' = 0r_1, \;\; r_1(0) = 1 \implies r_1(t) = 1.$$

▬ Cálculo de $r_2(t)$:

$r_2' = r_2 + 1, \;\; r_2(0) = 0.$
Reescrevendo a equação como
$r_2' - r_2 = 1$
e multiplicando por um factor integrante μ tem-se
$\mu r_2' - \mu r_2 = \mu.$
Para que o membro esquerdo seja igual a $(\mu r_2)' = \mu r_2' + \mu' r_2$ tem de se tomar
$\mu' = \, - \, \mu$
pelo que uma possibilidade é $\mu(t) = e^{-t}$, vindo então
$(e^{-t} r_2)' = e^{-t}$
e integrando entre 0 e um t arbitrário, fazendo uso da condição inicial, obtém-se
$e^{-t} r_2(t) = 1 - e^{-t},$
ou seja
$r_2(t) = e^t - 1.$

▬ Cálculo de $r_3(t)$:

$r_3' = r_3 + (e^{-t} - 1), \;\; r_3(0) = 0.$
Procedendo como anteriormente tem-se um factor integrante $\mu(t) = e^{-t}$, pelo que se tem
$(e^{-t} r_3)' = 1 - e^{-t}$
e integrando entre 0 e um t arbitrário, fazendo uso da condição inicial, obtém-se
$e^{-t} r_3(t) = t + e^{-t} - 1,$
ou seja,
$r_3(t) = (t-1)e^t + 1.$

▬ Determinação das matrizes $P_0(A), P_1(A)$ e $P_2(A)$:

$$P_0(A) = I_3, \;\; P_1(A) = A - \lambda_1 I_3 = A,$$

$$P_2(A) = (A - \lambda_1 I_3)(A - \lambda_2 I_3) = A(A - I_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Conclui-se que

$$\begin{aligned} e^{At} &= 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (e^t - 1) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} + [(t-1)e^t + 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & e^t - 1 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 1 - e^t & (1-2t)e^t - 1 & e^t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e portanto a solução geral é

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & e^t - 1 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 1 - e^t & (1-2t)e^t - 1 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}.$$

onde $(x_1(0), x_2(0), x_3(0))^T \in \mathbb{R}^3$ é arbitrário.

1.d) Os pontos de equilibrio do sistema são as soluções de $x_1' = x_2' = x_3' = 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = x_1. \end{cases} .$$

Os pontos de equilíbrio são, portanto, todos os pontos de $\mathbb{R}^3$ da forma $(\alpha, 0, \alpha)^T$ com $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrário.

Para a estabilidade dos pontos de equilíbrio basta estudar os valores próprios da matriz do sistema, A. Como existe pelo menos um valor próprio (de facto existem dois) com parte real positiva conclui-se que os pontos de equílibrio são *instáveis.*

2. Um modo possível de resolver esta questão é o seguinte:

Da segunda equação de (44) tem-se $-u' = w' + u - w$, a qual, substituindo na primeira equação resulta em

$$u'' - u' = e^{-t} \Longleftrightarrow D^2 u - Du = e^{-t} \Longleftrightarrow D(D-1)u = e^{-t}$$

cuja solução pode ser obtida pelo método dos coeficientes indeterminados, com se segue:

Como $(D+1)e^{-t} = 0$ tem-se $(D+1)D(D-1)u = 0$, cuja solução geral é $u(t) = \alpha + \beta e^t + \gamma e^{-t}$. Daqui obtém-se $u'(t) = \beta e^t - \gamma e^{-t}$ e $u''(t) = \beta e^t + \gamma e^{-t}$, e substituindo na equação para u tem-se $\beta e^t + \gamma e^{-t} - \left(\beta e^t - \gamma e^{-t}\right) = e^{-t}$ pelo que $\gamma = \frac{1}{2}$. Conclui-se que uma solução particular tem componente u dada por $u_{\text{part}}(t) = \frac{1}{2}e^{-t}$. A componente w_{part} da solução particular pode ser calculada a partir da segunda equação de (44):

$$\begin{array}{rcl} w'_{\text{part}} - w_{\text{part}} & = & u'_{\text{part}} + u_{\text{part}} \\ & = & -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-t} \\ & = & 0 \\ & \Downarrow & \\ w_{\text{part}}(t) & = & \rho e^t \end{array} .$$

Uma solução particular é

$$(u_{\text{part}}(t), w_{\text{part}}(t)) = \left(\frac{1}{2}e^{-t}, e^t\right).$$

II.

a) Escreva-se a equação na forma

$$y + \left(4y^2 + 2x\right)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Vejamos que tem um factor integrante $\mu = \mu(y)$:

$$\underbrace{\mu(y)y}_{=\frac{\partial \Phi}{\partial x}} + \underbrace{\mu(y)\left(4y^2 + 2x\right)}_{=\frac{\partial \Phi}{\partial y}}\frac{dy}{dx} = 0$$

pelo que

$$\left.\begin{array}{lclcl} \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} & = & \dfrac{d}{dy}(\mu(y)y) & = & \mu' y + \mu \\ \\ \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} & = & \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\mu(y)\left(4y^2 + 2x\right)\right) & = & 2\mu \end{array}\right\} \Longrightarrow \mu' y + \mu = 2\mu$$

pelo que se tem $\mu' = \frac{\mu}{y}$ e portanto

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \frac{dy}{y} \Longleftrightarrow \log|\mu(y)| = \log|y| + C,$$

onde C é uma constante real arbitrária. Um factor integrante é então $\mu(y) = y$ (fazendo $C = 0$.)

b) Usando o factor integrante determinado na alínea anterior pode-se escrever a equação dada na forma

$$\frac{d}{dx}\Phi(x, y(x)) = 0$$

cuja solução geral é obtida de imediato por integração de ambos os membros da equação, vindo dada na forma implícita por

$$\Phi(x, y(x)) = \mathcal{C}$$

onde $\mathcal{C}$ é uma constante real arbitrária. Atendendo ao que escrevemos acima, a função Φ é tal que

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = y^2 & \Longrightarrow & \Phi(x, y) = y^2 x + h_1(y) \\ \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = 4y^3 + 2xy & \Longrightarrow & \Phi(x, y) = y^4 + xy^2 + h_2(x) \end{array}\right.$$

pelo que se pode tomar $h_1(y) = y^4$ e $h_2(x) = 0$ vindo $\Phi(x, y) = y^4 + y^2 x$.

Pretendendo determinar a solução que satisfaz a condição inicial $y(1) = 1$ determina-se a constante $\mathcal{C}$ conveniente atendendo a que

$$\mathcal{C} = \Phi(1, y(1)) = \Phi(1, 1) = 1^4 + 1^2 1 = 2$$

vindo a seguinte expressão implicita para solução $y = y(x)$ do problema:

$$y^4 + y^2 x - 2 = 0.$$

Atendendo a que esta expressão é uma equação biquadrada em y (ou, o que é o mesmo, uma equação quadrada em y^2) tem-se

$$y^2(x) = \frac{-x + \sqrt{x^2 + 8}}{2}$$

(o sinal "$-$" que vem da aplicação da fórmula resolvente de equações de segundo grau à equação biquadrada fornece soluções complexas que não irão satisfazer a condição inicial dada, uma vez que se terá $y^2(x) < 0$)

$$y(x) = +\sqrt{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 8}}$$

onde o sinal "$+$" no exterior da raiz quadrada foi escolhido atendendo a que $y(1) = 1 > 0$.

c) Atendendo aos resultados sobre a continuidade da soma, produto e composição de funções contínuas, a solução obtida na alínea anterior é contínua no seu domínio, o qual é $\mathbb{R}$ uma vez que $x^2 + 8 \geq 8 > 0$ e também $-x + \sqrt{x^2 + 8} > -x + \sqrt{x^2} = -x + |x| \geq -x + x = 0$. Por outro lado, estas desigualdades permitem também concluir que as funções radicandas são sempre estritamente positivas e, consequentemente, $y(x)$ é derivável e a derivada é finita em todos os pontos de $\mathbb{R}$. Atendendo a que a derivada de $y(x)$ é o quociente de funções contínuas (pelas razões invocadas no início da alínea) conclui-se que $y'(x)$ é uma função contínua, para qualquer x real. Isto permite concluir que $y(\cdot) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e portanto o intervalo máximo de existência da solução determinada na alínea anterior é $\mathbb{R}$.

III.

1.

$$\frac{dV}{dt}(x(t), y(t)) = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \left(-\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \left(-\frac{\partial V}{\partial y}\right) = -\left(\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\right) \leq 0$$

pelo que V é uma função de Liapunov para (47).

2.a) Sendo $V(x, y) = y^2 + \left(x^2 - 1\right)^2$ o sistema fica

$$\begin{cases} x' &= -4x(x^2 - 1) \\ y' &= -2y \end{cases} \tag{48}$$

e os pontos de equilíbrio são as soluções de

$$\begin{cases} 0 & = & -4x(x^2-1) \\ 0 & = & -2y \end{cases}$$

ou seja, $(x,y) = (0,0)$ ou $(1,0)$ ou $(-1,0)$.

2.b) A matriz Jacobiana do sistema em (x,y) é

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} -12x^2+4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

pelo que se tem o seguinte

- Ponto de equilíbrio $(0,0)$:

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

A matriz é diagonal, pelo que os valores próprios são os elementos da diagonal principal, $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -2$, e os vectores próprios são colineares com os vectores coluna correspondentes:$\mathbf{v}^{(1)} = (1,0)^T$ e $\mathbf{v}^{(2)} = (0,1)^T$. Assim, o sistema linearizado em torno do ponto de equilíbrio $(0,0)$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = J(0,0) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

(onde $x_1 = x - 0$ e $x_2 = y - 0$) tem o seguinte retrato de fase da Figura 34.

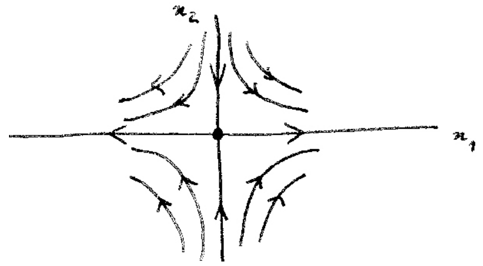


Figura 34: Retrato de fases da linearização de (46) em torno de $(0,0)$.

- Pontos de equilíbrio $(1,0)$ e $(-1,0)$:

$$J(1,0) = J(-1,0) = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Novamente neste caso a matriz é diagonal e portanto têm-se os pares próprios $(\lambda, \mathbf{v}) = (-8, (1,0)^T)$ e $(-2, (0,1)^T)$. O retrato de fase é o apresentadosna Figura 35 (Obs.: a curvatura das órbitas é tal como se apresenta porque a componente da solução segundo $(1,0)^T$ tende mais rapidamente para zero que a componente segundo $(0,1)^T$ devido a $-8 < -2 < 0$.)

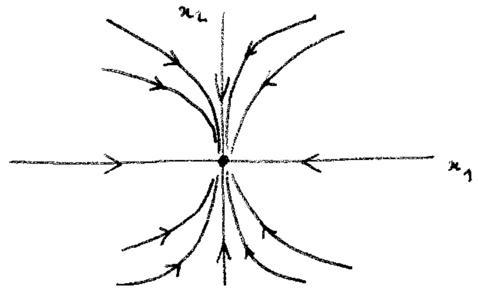


Figura 35: Retrato de fases da linearização de (46) em torno de $(1,0)$ e de $(-1,0)$.

2.c) Sabe-se de 1. que V é uma função de Liapunov e que $\frac{dV}{dt} < 0$ excepto quando $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0$ onde se tem $\frac{dV}{dt} = 0$. Sendo $V(x,y) = y^2 + \left(x^2 - 1\right)^2 \geq 0$ tem-se que o conjunto de nível V_i da função de Liapunov V é não vazio de e só se $V_i \geq 0$. Atendendo à possibilidade de decompor V em duas parcelas aditivas $E_c(y) \stackrel{\text{def}}{=} y^2 \geq 0$ e $E_p(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left(x^2 - 1\right)^2$ tem-se os esboços do gráfico de $E_p(x)$ e das curvas de nível apresentados nas Figuras 36 e 37, respectivamente. Sabe-se

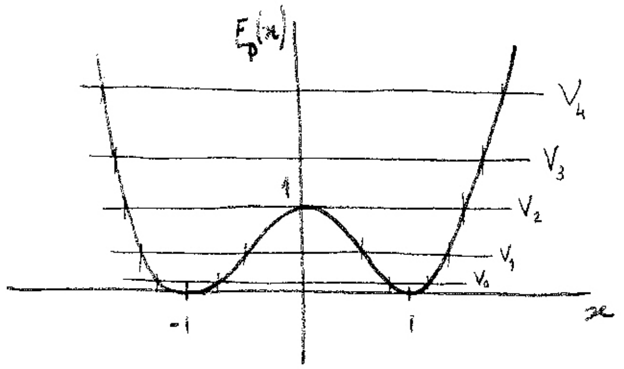


Gráfico de $E_p(x)$

Figura 36: Gráfico de $E_p(x)$

que as órbitas atravessam as curvas de nível de V no sentido de níveis decrescentes $\left(\frac{dV}{dt} < 0\right)$, excepto possivelmente nas regiões onde $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0$. Mas estas regiões consistem apenas nos três pontos de equílibrio do sistema (atendendo ao resultado da alínea 2.a)), pelo que aqui as órbitas são estacionárias. A fim de traçar com mais precisão o retrato de fase é útil conhecer a orientação geral das órbitas, o que é muito fácil de obter neste caso: atendendo a

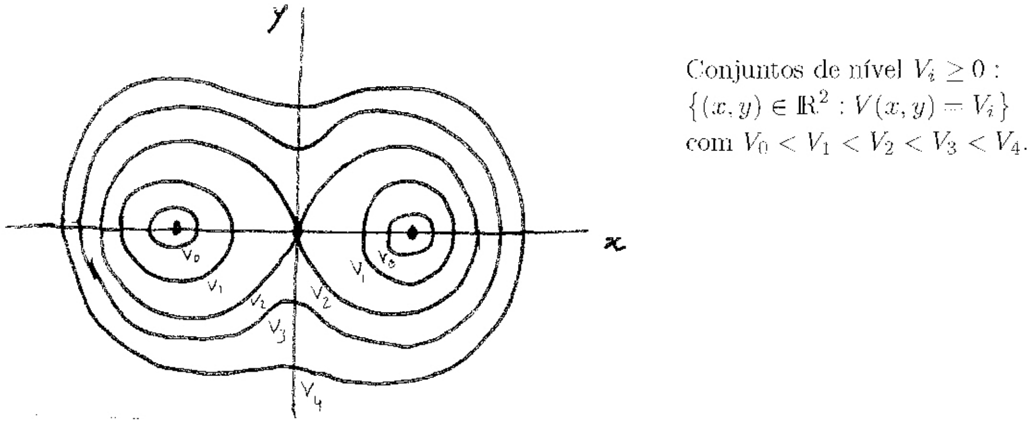


Figura 37: Esboço dos conjuntos de nível $V_i \geq 0$.

(48) tem-se o seguinte:

y	<0	0	>0
y'	>0	0	<0

x	<-1	-1	$\in]-1,0[$	0	$\in]0,1[$	1	>1
x'	>0	0	<0	0	>0	0	<0

O que corresponde às orientações apresentadas no esquema da Figura 38, ao qual foram sobrepostos os resultados das linearizações obtidas na alínea anterior.

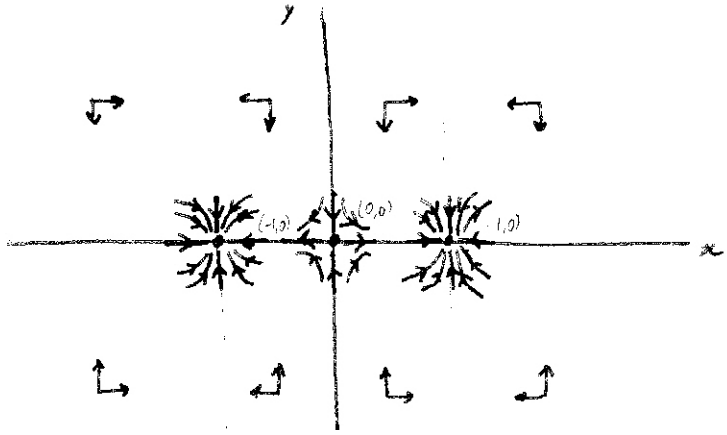


Figura 38: Retratos de fases nas vizinhanças dos pontos de equilíbrio e orientações gerais das órbitas.

Conjugando todas estas informações tem-se o esboço da Figura 39.

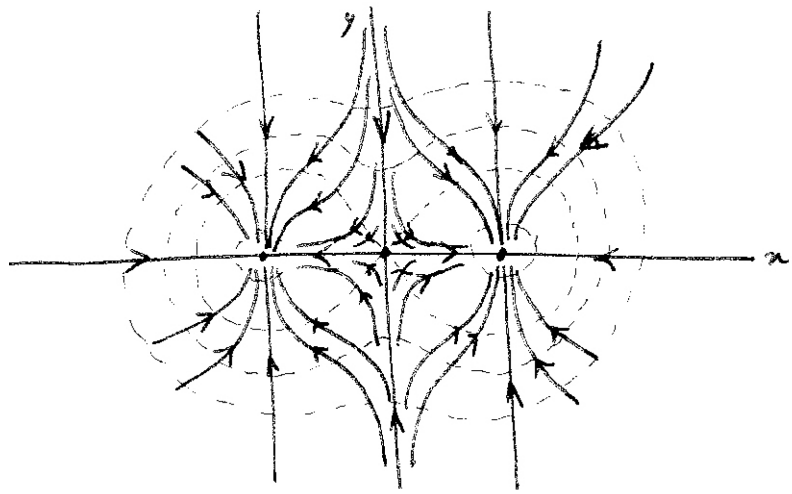


Figura 39: Retrato de fases do sistema.

IV.

a) Faça-se $u(t,x) = T(t)X(x)$. Então $u_{tt} = T''X$, $u_{xx} = TX''$, $u_{xxtt} = X''T''$ e a equação (47) toma a forma $T''X - \alpha^2 TX'' - \beta^2 T''X'' = 0$, ou seja $T''X - \left(\alpha^2 T + \beta^2 T''\right) X'' = 0$. Supondo que $X(x) \neq 0$ e $\alpha^2 T(t) + \beta^2 T''(t) \neq 0$ a equação anterior pode-se escrever na forma

$$\frac{T''}{\alpha^2 T + \beta^2 T''}(t) = \frac{X''}{X}(x)$$

e, para que esta igualdade seja satisfeita para todos os pontos do aberto $\{(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times]0,1[\}$ onde a equação é colocada, tem de existir uma constante $\sigma \in \mathbb{R}$, independente de t e de x, tal que

$$\frac{T''}{\alpha^2 T + \beta^2 T''}(t) = \sigma = \frac{X''}{X}(x)$$

o que resulta nas duas equações diferenciais ordinárias seguintes:

$$\begin{array}{l} X'' - \sigma X = 0 \\ (1 - \beta^2 \sigma) T'' - \alpha^2 \sigma T = 0. \end{array}$$

Quanto às condições de fronteira tem-se que $u(t,x) = T(t)X(x) = 0$ em $x = 0$ e $x = 1$, $(\forall t > 0)$, pelo que vem $X(0) = X(1) = 0$ e obtemos o seguinte problema de valores na fronteira para $X(x)$:

$$\begin{cases} X'' - \sigma X = 0 \\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases}$$

Estudaremos de seguida a possibilidade de obtenção de soluções *não-triviais* (que não são identicamente nulas) deste problema:

- Considere-se $\sigma = 0$. A equação diferencial fica reduzida a $X'' = 0$ cujas soluções são $X(x) = ax + b$ e atendendo às condições na fronteira $0 = X(0) = b$ e $0 = X(1) = a + b$ conclui-se imediatamente que $a = b = 0$ e portanto a única solução do problema é a solução trivial $X(x) \equiv 0$.
- Seja agora $\sigma > 0$. A solução geral da equação é $X(x) = ae^{\sqrt{\sigma}x} + be^{-\sqrt{\sigma}x}$. Atendendo às condições na fronteira tem-se $0 = X(0) = a + b$ e $0 = X(1) = ae^{\sqrt{\sigma}} + be^{-\sqrt{\sigma}}$ cuja única solução é $a = b = 0$ fornecendo como única solução da equação a função identicamente nula $X(x) \equiv 0$.
- Finalmente tome-se $\sigma < 0$. Por facilidade de notação é conveniente escrever $\sigma = -\lambda^2$ com $\lambda > 0$. A solução geral real da equação diferencial é agora $X(x) = a\cos\lambda x + b\sin\lambda x$. Atendendo às condições na fronteira tem-se $0 = X(0) = a\cos 0 + b\sin 0 = a$ e portanto $0 = X(1) = 0\cos\lambda + b\sin\lambda = b\sin\lambda$ concluindo-se que, ou $b = 0$ e obtemos a solução $X(x) \equiv 0$, ou $\sin\lambda = 0$, isto é, $\lambda = \lambda_k = k\pi, k \in \mathbb{N}_1$, obtendo-se assim infinitas soluções do problema de valores na fronteira, em particular as funções $X_k(x) = \sin(k\pi x), \ \ \forall k \in \mathbb{N}_1$, e todas as combinações lineares de um número finito destas funções

Atendendo a que $\sigma = -\lambda_k^2 = -k^2\pi^2$ tem-se $1 - \beta^2\sigma = 1 + \beta^2k^2\pi^2 > 0$ pelo que a equação para $T(t)$ pode ser escrita na forma

$$T'' + \underbrace{\frac{\alpha^2k^2\pi^2}{1+\beta^2k^2\pi^2}}_{=\mu_k^2 \ (\mu_k>0)} T = 0$$

cuja solução geral é $T_k(t) = c_k\cos\mu_k t + d_k\sin\mu_k t$.

Atendendo a isto a solução geral formal da equação dada é

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left[c_k\sin(k\pi x)\cos\left(\sqrt{\frac{\alpha^2k^2\pi^2}{1+\beta^2k^2\pi^2}}\, t\right) + d_k\sin(k\pi x)\sin\left(\sqrt{\frac{\alpha^2k^2\pi^2}{1+\beta^2k^2\pi^2}}\, t\right)\right]$$

onde c_k e d_k são constantes reais.

b) Comecemos por observar que, para todo o x em $[0,1]$,

$$0 = u(0,x) = \sum_{k=1}^{+\infty}[c_k\sin(k\pi x)\cdot 1 + d_k\sin(k\pi x)\cdot 0] = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k\sin(k\pi x)$$

o que implica que $c_k = 0$ para todo o $k \in \mathbb{N}_1$. Então vem

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k\sin(k\pi x)\sin\left(\sqrt{\frac{\alpha^2k^2\pi^2}{1+\beta^2k^2\pi^2}}\, t\right)$$

e, pelo menos formalmente, tem-se

$$u_t(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k\sqrt{\frac{\alpha^2k^2\pi^2}{1+\beta^2k^2\pi^2}}\sin(k\pi x)\cos\left(\sqrt{\frac{\alpha^2k^2\pi^2}{1+\beta^2k^2\pi^2}}\, t\right)$$

pelo que

$$1 - |2x-1| = u_t(0,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k \sqrt{\frac{\alpha^2 k^2 \pi^2}{1+\beta^2 k^2 \pi^2}} \sin(k\pi x)$$

e portanto $d_k \sqrt{\dfrac{\alpha^2 k^2 \pi^2}{1+\beta^2 k^2 \pi^2}}$ são os coeficientes da série de Fourier de senos da função ímpar, periódica de período 2, cuja restrição ao intervalo $[0,1]$ é igual a $1-|2x-1|$. Calculemos então o valor destes coeficientes:

Prolongamento ímpar, 2-periódico a $\mathbb{R}$ da condição inicial é apresentado na Figura 40.

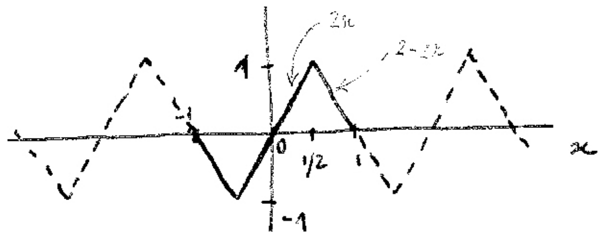


Figura 40: Prolongamento ímpar, 2-periódico a $\mathbb{R}$ da condição inicial.

Com as notações usuais tem-se $a_n = 0$, $\forall n$, e

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{1}\int_0^1 (1-|2x-1|)\sin(n\pi x)dx = \\
&= 2\int_0^{1/2} 2x\sin(n\pi x)dx + 2\int_{1/2}^1 (2-2x)\sin(n\pi x)dx = \\
&= 4\int_{1/2}^1 \sin(n\pi x)dx + 4\int_0^{1/2} x\sin(n\pi x)dx - 4\int_{1/2}^1 x\sin(n\pi x)dx = \\
&= -\frac{4}{n\pi}\left(\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{4}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} + \\
&\quad + \frac{4}{n\pi}\cos n\pi - \frac{4}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2}\sin n\pi + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} = \\
&= \frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} = \\
&= \begin{cases} \dfrac{8(-1)^{\ell+1}}{(2\ell-1)^2\pi^2}, & \text{se } n = 2\ell-1, \\ 0, & \text{se } n = 2\ell. \end{cases}
\end{aligned}$$

Como $d_k\sqrt{\dfrac{\alpha^2k^2\pi^2}{1+\beta^2k^2\pi^2}} = b_k$ conclui-se que, para todos os $\ell \in \mathbb{N}_1$,

$$\begin{aligned} b_{2\ell-1} &= \frac{8(-1)^{\ell+1}}{(2\ell-1)^2\pi^2}\sqrt{\frac{1+\beta^2(2\ell-1)^2\pi^2}{\alpha^2(2\ell-1)^2\pi^2}} \\ b_{2\ell} &= 0 \end{aligned}$$

e a solução formal do problema é

$$u(t,x) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{8(-1)^{\ell+1}}{(2\ell-1)^2\pi^2}\sqrt{\frac{1+\beta^2(2\ell-1)^2\pi^2}{\alpha^2(2\ell-1)^2\pi^2}}\,\sin\left(\sqrt{\frac{\alpha^2(2\ell-1)^2\pi^2}{1+\beta^2(2\ell-1)^2\pi^2}}\;t\right)\sin\left((2\ell-1)\pi x\right).$$

c) Escrevendo

$$u(t,x) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} u_\ell(t,x),$$

onde $u_\ell(t,x)$ é dado pelo membro direito da última expressão da alínea anterior, tem-se que $u_\ell(t,x)$ é de classe $\mathcal{C}^\infty$ (são produtos de senos por constantes ...). Se a série fôr absolutamente e uniformemente convergente pode concluir-se que $u(t,x)$, dado pela soma da série, é uma função contínua. Vejamos se o teste-M de Weierstrass é aplicável a este caso:

$$|u_\ell(t,x)| \le \frac{8}{(2\ell-1)^2\pi^2}\underbrace{\sqrt{\frac{1+\beta^2(2\ell-1)^2\pi^2}{\alpha^2(2\ell-1)^2\pi^2}}}_{\text{sucessão convergente}} \le \frac{M}{(2\ell-1)^2} \tag{49}$$

onde $M = \dfrac{8}{\pi^2}\sup_\ell \sqrt{\dfrac{1+\beta^2(2\ell-1)^2\pi^2}{\alpha^2(2\ell-1)^2\pi^2}}$. Como a sucessão do membro direito de (49) é tal que a série correspondente é absolutamente convergente conclui-se, pelo teste-M de Weierstrass, que a série $\sum_\ell u_\ell$ é absolutamente e uniformemente convergente e, portanto, $u(t,x)$ é uma função contínua.

Analogamente, vejamos as séries das derivadas termo-a-termo:

$$\sum_\ell \frac{\partial u_\ell}{\partial t},\quad \sum_\ell \frac{\partial u_\ell}{\partial x},\quad \sum_\ell \frac{\partial^2 u_\ell}{\partial x^2}\quad \sum_\ell \frac{\partial^2 u_\ell}{\partial t^2},\quad \sum_\ell \frac{\partial^4 u_\ell}{\partial x^2\partial t^2}.$$

As majorações que se conseguem obter para os dois primeiros casos são

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial u_\ell}{\partial t}\right| &\le \frac{N}{(2\ell-1)^2} \\ \left|\frac{\partial u_\ell}{\partial x}\right| &\le \frac{M\pi}{(2\ell-1)} \end{aligned} \tag{50}$$

onde M foi definido acima e $N = 8/\pi^2$. Conclui-se, então, que o teste-M de Weierstrass permite concluir que a séries $\displaystyle\sum_\ell \frac{\partial u_\ell}{\partial t}$ é absoluta e uniformemente convergente. O teorema sobre a diferenciabilidade termo-a-termo de séries de funções pode agora ser aplicado para obter o resultado sobre a diferenciabilidade de $u(t,x)$ em relação a t. Já no caso da diferenciabilidade de $u(t,x)$ em ordem a x o mesmo argumento não pode ser usado visto que o teste-M de Weierstrass não é aplicável à melhor majoração que conseguimos obter, (50). Consequentemente o teste não é aplicável para o estudo da diferenciabilidade de $u(t,x)$ em ordem a x, ou seja, dos termos u_{xx} e u_{xxtt} da equação.

Quanto a $\dfrac{\partial^2 u_\ell}{\partial t^2}$ observe-se que

$$\left|\frac{\partial^2 u_\ell}{\partial t^2}\right| \leq \frac{8}{(2\ell-1)^2\pi^2}\sqrt{\frac{\alpha^2(2\ell-1)^2\pi^2}{1+\beta^2(2\ell-1)^2\pi^2}} \leq \frac{\tilde{M}}{(2\ell-1)^2} \tag{51}$$

com $\tilde{M} = \dfrac{8}{\pi^2}\sup\limits_\ell \sqrt{\dfrac{\alpha^2(2\ell-1)^2\pi^2}{1+\beta^2(2\ell-1)^2\pi^2}}$. Tal como com (49), o teste-M de Weierstrass é aplicável e a série $\sum_\ell \frac{\partial^2 u_\ell}{\partial t^2}$ é uniformemente convergente.

Concluindo: utilizando o teste-M de Weierstrass podemos obter resultados quanto à continuidade da solução formal e quanto à sua diferenciabilidade em ordem a t (a saber, u_t e u_{tt}) mas *não* em ordem a x (nomeadamente u_{xx} e u_{xxtt}).

Teste de 4.5.96 e resolução.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

(Mecânica)

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

Data: 4/5/1996
Duração: 1h30.

Considere a equação diferencial ordinária

$$x^{iv} - 2x''' + x' = b(t). \tag{52}$$

1. Seja $b(t) = 1,\ \forall t$.

   a) Mostre que nas variáveis $y_i,\ i \in \{1,2,3,4\}$, definidas por $y_i = x^{(i-1)}$, a equação (52) toma a forma de um sistema de primeira ordem

   $$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{h}(t), \tag{53}$$

   onde $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^{\mathrm{T}}$. Indique explicitamente qual é a matriz A e o vector $\mathbf{h}(t)$.

   b) Determine uma solução particular de (53).

   c) Determine a solução de (53) que satisfaz $\mathbf{y}(0) = \mathbf{e}_1$.

   d) Qual é o problema de Cauchy para a equação (52) que corresponde ao problema dado na alínea anterior para (53)? Qual é a sua solução?

2. Seja agora[5] $b(t) \equiv 0$.

   a) Determine os pontos de equilíbrio do sistema (53) e estude-os quanto à sua estabilidade.

   b) Determine um subespaço bidimensional de $\mathbb{R}^4$, L_2, que seja invariante para (53) e tal que o(s) ponto(s) de equilíbrio da restrição de (53) a L_2 seja(m) estável(eis).

   c) Esboce o retrato de fase da restrição de (53) a um subespaço tridimensional invariante que contenha o subespaço L_2 da alínea anterior.

[5] Se não resolveu a alínea 1.a) considere $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ em todas as alíneas que se seguem.

Resolução:

1.a) Atendendo à definição das variáveis y_i tem-se $y_1' = (x)' = x' = y_2$, $y_2' = (x')' = x'' = y_3$, $y_3' = (x'')' = x''' = y_4$ e por último $y_4' = (x''')' = x^{iv} = 2x''' - x' + 1 = 2y_4 - y_2 + 1$. Tem-se, então, o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias lineares:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}' = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{=:A} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{h}(t)}$$

o que responde à questão colocada.

b) Como o termo não homogéneo $\mathbf{h}(t)$ é do tipo $\mathbf{p}_k(t)e^{\lambda t}$, onde $\mathbf{p}_k(t)$ é um polinómio de grau zero e $\lambda = 0$, sabe-se que uma solução particular é uma função também do mesmo tipo onde o grau do polinómio está dependente de $\lambda = 0$ ser, ou não, valor próprio de A e, caso seja, da respectiva multiplicidade algébrica. Vejamos então quais os valores próprios de A. Os valores próprios da matriz A são os zeros do seu polinómio característico, o qual é igual (neste caso que o sistema é de dimensão par) ao polinómio característico da equação de ordem superior (52), a saber, $p(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda$.

Como $p(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda = \lambda(\lambda^3 - 2\lambda^2 + 1)$ conclui-se que $\lambda_1 = 0$ é um valor próprio de A com multiplicidade 1 (já que 0 não é uma raíz de $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 1 = 0$). Os restantes valores próprios são os zeros de $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 1$. Um deles descobre-se facilmente por inspecção directa: $\lambda_2 = 1$. Dividindo $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 1$ por $\lambda - 1$ obtém-se $\lambda^2 - \lambda - 1$, cujos zeros são $\lambda_3 = (1 + \sqrt{5})/2$ e $\lambda_4 = (1 - \sqrt{5})/2$.

Do facto de 0 ser um valor próprio de A com multiplicidade 1 conclui-se que uma solução particular de (53) é da forma

$$\mathbf{y}_{\text{part}}(t) = \begin{bmatrix} a_1 t + a_2 \\ b_1 t + b_2 \\ c_1 t + c_2 \\ d_1 t + d_2 \end{bmatrix}.$$

Atendendo a isto conclui-se que para que $\mathbf{y}_{\text{part}}(t)$ seja solução de (53) é necessário e suficiente que

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 t + a_2 \\ b_1 t + b_2 \\ c_1 t + c_2 \\ d_1 t + d_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

ou seja

$$\begin{cases} a_1 - b_2 = 0 \\ -b_1 = 0 \\ b_1 - c_2 = 0 \\ -c_1 = 0 \\ c_1 - d_2 = 0 \\ -d_1 = 0 \\ d_1 + b_2 - 2d_2 - 1 = 0 \\ b_1 - 2d_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = 0 \\ b_2 = 1 \\ c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ d_1 = 0 \\ d_2 = 0 \end{cases}$$

e a_2 é arbitrário, pelo que se pode tomar como sendo igual a 0 vindo a seguinte solução particular:

$$\mathbf{y}_{\text{part}}(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

c) Atendendo ao que foi feito na alínea anterior a solução procurada pode ser escrita na forma $\mathbf{y}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{\alpha} + (t, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ com $\boldsymbol{\alpha}$ tal que $(1, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}} = \Phi(0)\boldsymbol{\alpha} + (0, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, ou seja, $\Phi(0)\boldsymbol{\alpha} = (1, -1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, onde $\Phi(\cdot)$ é uma matriz fundamental de (53). Atendendo a que já temos a factorização do polinómio característico de A e tendo em conta que A é a matriz companheira de (52) pode-se tomar para $\Phi(\cdot)$ a matriz wronskiana de (52): da factorização do polinómio característico conclui-se que uma base para o espaço das soluções de (52) é constituida pelas funções $u_1(t) = 1$, $u_2(t) = e^t$, $u_3(t) = e^{(1+\sqrt{5})t/2}$, e $u_4(t) = e^{(1-\sqrt{5})t/2}$, pelo que se tem

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_1' & u_2' & u_3' & u_4' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' & u_4'' \\ u_1''' & u_2''' & u_3''' & u_4''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & e^t & e^{(1+\sqrt{5})t/2} & e^{(1-\sqrt{5})t/2} \\ 0 & e^t & \frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{(1+\sqrt{5})t/2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2}e^{(1-\sqrt{5})t/2} \\ 0 & e^t & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 e^{(1+\sqrt{5})t/2} & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 e^{(1-\sqrt{5})t/2} \\ 0 & e^t & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 e^{(1+\sqrt{5})t/2} & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 e^{(1-\sqrt{5})t/2} \end{bmatrix}.$$

Daqui conclui-se que

$$\Phi(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 1 & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\ 0 & 1 & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 \end{bmatrix}$$

e portanto

$$\boldsymbol{\alpha} = \Phi(0)^{-1}(1, -1, 0, 0)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 1 & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\ 0 & 1 & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Utilizando, por exemplo, o método de eliminação de Gauss-Jordan[6], tem-se

$$\Phi(0)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}+3}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

pelo que vem

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}+3}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

e a solução pretendida é

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & e^t & e^{(1+\sqrt{5})t/2} & e^{(1-\sqrt{5})t/2} \\ 0 & e^t & \frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{(1+\sqrt{5})t/2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2}e^{(1-\sqrt{5})t/2} \\ 0 & e^t & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 e^{(1+\sqrt{5})t/2} & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 e^{(1-\sqrt{5})t/2} \\ 0 & e^t & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 e^{(1+\sqrt{5})t/2} & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 e^{(1-\sqrt{5})t/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

d) Atendendo à relação entre (52) e (53) conclui-se imediatamente que a condição inicial para (52) correspondente à condição $\mathbf{y}(0) = \mathbf{e}_1$ para (53) é $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 0$ e $x'''(0) = 0$, pelo que o problema de Cauchy para a equação (52) é

$$\begin{cases} x^{iv} - 2x''' + x' = 1 \\ x(0) - 1 = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0, \end{cases}$$

cuja solução é

$$x(t) = y_1(t) = 1 - e^t + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} e^{(1+\sqrt{5})t/2} + \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} e^{(1-\sqrt{5})t/2} + t.$$

2.a) Os pontos de equilíbrio são os pontos do núcleo de A, isto é, são os pontos $\mathbf{y}$ tais que $A\mathbf{y} = \mathbf{0}$:

$$A\mathbf{y} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{cases} y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \\ y_4 = 0 \\ -y_2 + 2y_4 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y_1 \text{ arbitrário} \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \\ y_4 = 0 \end{cases}$$

pelo que o conjunto dos pontos de equilíbrio de (53) é

$$E_1 = \left\{\mathbf{y} = (\alpha, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}, \forall \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

Dos resultados obtidos na alínea 1.b) sabe-se que A tem dois valores próprios positivos pelo que todos os pontos de equilíbrio do sistema linear (53) são instáveis.

[6] Ou qualquer outro método para calcular inversas de matrizes...

b) Designemos por E_j o espaço próprio de A correspondente ao valor próprio λ_j. Como se sabe da alínea 1.b) que todos os valores próprios de A são reais e simples (i.e., têm multiplicidade algébrica $= 1$) e como a dimensão do espaço próprio E_j ($=$ multiplicidade geométrica de λ_j) é maior ou igual a 1 e menor ou igual à multiplicidade algébrica de λ_j, conclui-se, neste caso, que todos os espaços próprios de A são unidimensionais, reais e, obviamente, invariantes. Assim, para se obter um subespaço de $\mathbb{R}^4$ bidimensional e invariante para a equação (53) basta considerar os espaços $L_2 = E_j + E_k$ com $j \neq k$. Exigindo que os pontos de equilibrio da restrição de (53) a L_2 sejam estáveis teremos de escolher espaços E_j e E_k que correspondam a valores próprios da matriz A com partes reais não-positivas, i.e., E_1, espaço próprio correspondente ao valor próprio $\lambda_1 = 0$ e E_4, espaço próprio correspondente ao valor próprio $\lambda_4 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Vejamos que espaços são estes: o espaço E_1 já foi determinado na alínea anterior: $E_1 = \left\{ \mathbf{y} = (\alpha, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}, \forall \alpha \in \mathbb{R} \right\}$, quanto ao espaço E_4 tem-se

$$
(A - \lambda_4 I_4)\,\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 \text{ arbitrário} \\ v_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} v_1 \\ v_3 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 v_1 \\ v_4 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 v_1, \end{cases}
$$

pelo que

$$
E_4 = \left\{ \mathbf{y} = \beta \left(1, \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2, \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3\right)^{\mathrm{T}}, \forall \beta \in \mathbb{R} \right\}
$$

e o espaço pretendido é

$$
L_2 = E_1 + E_4 = \left\{ \mathbf{y} = \alpha\,(1,0,0,0)^{\mathrm{T}} + \beta \left(1, \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2, \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3\right)^{\mathrm{T}}, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}.
$$

c) Atendendo ao que foi feito na alínea anterior conclui-se que um subespaço tridimensional invariante para a equação (53) é

$$
L_3 = E_j + E_k + E_\ell
$$

com j, k, ℓ distintos. Sendo exigido que $L_2 \subset L_3$ podemos considerar $j = 1$ e $k = 4$ de modo que ficamos com $L_3 = L_2 + E_\ell$ onde ℓ pode ser igual a 2 ou 3. Para qualquer destas escolhas o retrato de fase é qualitativamente semelhante (Figura 41).

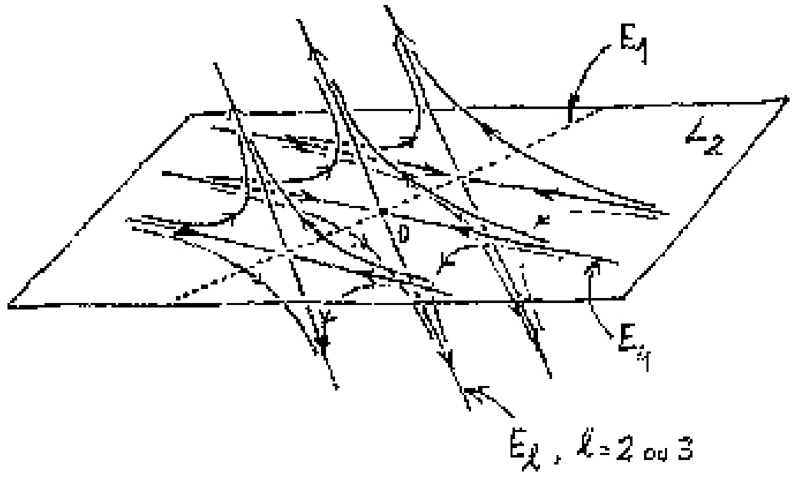


Figura 41: Esboço do retrato de fases da restrição de (53) a um subespaço tridimensional invariante que contenha o subespaço L_2.

Exame de 17.6.96 e resolução.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

(Mecânica)

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

Data: 17/6/1996
Duração: 1h30 + 1h30.

I.

Considere a equação diferencial

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \mathbf{b}(t) \tag{54}$$

1. Seja $\mathbf{b}(t) \equiv \mathbf{0}$.
   a) Determine a solução geral de (54).
   b) Identifique um subespaço tridimensional de $\mathbb{R}^4$, L_3, que seja invariante para (54) e tal que a solução estacionária da restrição de (54) a L_3 seja assimptoticamente estável.
   c) Esboce o retrato de fase da restrição de (54) ao subespaço L_3 que determinou na alínea anterior.
2. Seja agora $\mathbf{b}(t) = (1, \cos t, 0, 0)^{\mathrm{T}}$.
   a) Determine uma solução particular de (54).
   b) Determine a solução de (54) que satisfaz a condição inicial $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) + 1 = x_4(0) + 1 = 1$.

II.

Considere a equação diferencial linear

$$x'''' + 2x''' + x'' = t + \cos t \tag{55}$$

a) Determine a solução geral da equação homogénea correspondente a (55).

b) Determine uma solução particular de (55).

c) Determine a solução de (55) que satisfaz a condição $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$.

III.

Justifique que o problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = (t-1)(1+x^2) \\ x(1) = 0 \end{cases}$$

tem uma única solução. Determine-a e indique explicitamente qual é o seu intervalo máximo de existência.

IV.

Um sistema hamiltoneano é um sistema de EDOs do tipo

$$\begin{cases} q' = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ p' = -\dfrac{\partial H}{\partial q}, \end{cases} \tag{56}$$

onde $H = H(q,p)$ é uma função com a regularidade suficiente para que o membro direito de (56) faça sentido, e que é designada por Hamiltoneana.

1. Mostre que a Hamiltoneana H é uma constante do movimento para (56).
2. Suponha que $H(q,p) = q^3 - q^2 + p^2$.
   a) Determine o(s) ponto(s) de equilíbrio de (56).
   b) Linearize (56) em torno do(s) ponto(s) de equilíbrio.
   c) Esboce o retrato de fase de (56).

V.

1. Considere a função φ definida em $[0,4]$ por

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1] \cup]3,4] \\ 1-x & \text{se } x \in [1,2] \\ x-3 & \text{se } x \in]2,3] \end{cases}$$

   a) Determine uma série de Fourier de cosenos de φ.
   b) Estude a série obtida na alínea anterior quanto às convergências pontual e uniforme.
2. Determine a solução formal do seguinte problema de condições iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times]0,4[\\ u(0,x) = \varphi(x), & x \in [0,4] \\ u_x(t,0) = u_x(t,4) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Resolução:

I.

1.a) Observando que a matriz do sistema (54) é uma matriz de Jordan, podemos escrever a solução geral na forma

$$\mathbf{x}(t) = e^{Jt}\mathbf{c}$$

onde J é a matriz de (54), $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))^{\mathrm{T}}$ e $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4) \in \mathbb{R}^4$ é um vector constante arbitrário. Como J é uma matriz de Jordan (e diagonal por blocos) tem-se $e^{Jt} = \operatorname{diag}\left(e^t, e^{J_1 t}, e^{-t}\right)$ onde

$$J_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{=:-I_2} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=:N_2}.$$

Assim, como $I_2 N_2 = N_2 I_2$, tem-se

$$e^{J_1 t} = e^{-I_2 t} e^{N_2 t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + O \right) = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Conclui-se então que

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}.$$

b) Como a matriz J é triangular (superior) conclui-se que os seus valores próprios são os elementos da diagonal principal, i.e., $\lambda_1 = 1$ com multiplicidade algébrica igual a um, e $\lambda_2 = -1$ com multiplicidade algébrica igual a três. Como tal o espaço nulo de J é constituido apenas por um único ponto de $\mathbb{R}^4$, a origem $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Este único ponto de equilíbrio de (54) não é assimptoticamente estável devido ao valor próprio $\lambda_1 = 1$ da matriz J : qualquer solução de (54) com valor inicial cuja projecção sobre o espaço próprio E_{λ_1}, correspondente a λ_1, seja não nula não converge para $\mathbf{0}$ quando $t \to +\infty$. Como o espaço próprio E_{λ_1} é invariante, existe um subespaço de $\mathbb{R}^4$, tridimensional, L_3, tal que $E_{\lambda_1} \oplus L_3 = \mathbb{R}^4$. Da definição da matriz J tem-se imediatamente que $E_{\lambda_1} = (\alpha, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ e portanto $L_3 = \{\mathbf{w} = (0, w_2, w_3, w_4)^{\mathrm{T}} : w_j \in \mathbb{R}\}$. Agora utilizando, por exemplo, a expressão geral das soluções de (54) obtida na alínea anterior, tem-se que se $\mathbf{c} \in L_3$ então $c_1 = 0$ e consequentemente $x_1(t) = 0 \ \forall t$, ou seja, $\mathbf{x}(t) \in L_3$ concluindo-se assim que L_3 é invariante. Como $E_{\lambda_1} \perp L_3$ é evidente que se $\mathbf{c} \in L_3$ a sua projecção sobre E_{λ_1} é nula e, pela discussão apresentada acima, a solução estacionária da restrição de (54) a L_3 é assimptoticamente estável.

c) Pelos resultados da alínea anterior tem-se que a restrição do sistema (54) ao subespaço tridimensional invariante L_3 é

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}. \tag{57}$$

A fim de esboçar o retrato de fase de (57) é conveniente investigar a existência de subespaços uni- ou bidimensionais de L_3 que sejam invariantes para (57). Sendo a matriz de (57) uma matriz diagonal por blocos observa-se imediatamente que os conjuntos $L_1 := \{(0,0,x_4)^{\mathrm{T}}\}$ e $L_2 := \{(x_2,x_3,0)^{\mathrm{T}}\}$ são invariantes para (57). Atendendo a que o retrato de fase da restrição de (57) a L_1 é o apresentado na Figura 42.

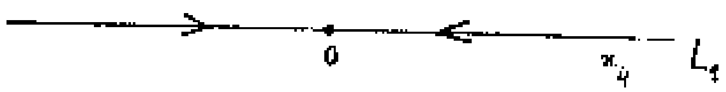


Figura 42: Retrato de fase da restrição de (57) a L_1.

e o da restrição a L_2 está na Figura 43.

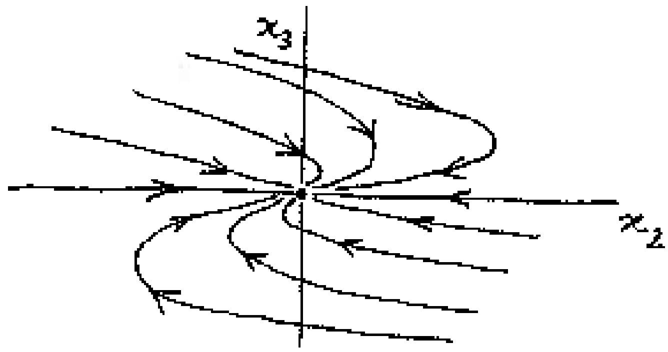


Figura 43: Retrato de fase da restrição de (57) a L_2.

e, como $L_3 = L_1 \oplus L_2$, conclui-se que para o retrato de fase da restrição a L_3 de (54) se tem o esboço apresentado na Figura 44.

2.a) Pela fórmula de variação das constantes, uma solução particular de (54) é dada por

$$\mathbf{x}_{\text{part}}(t) = e^{Jt}\int_0^t e^{-Js}\mathbf{b}(s)ds.$$

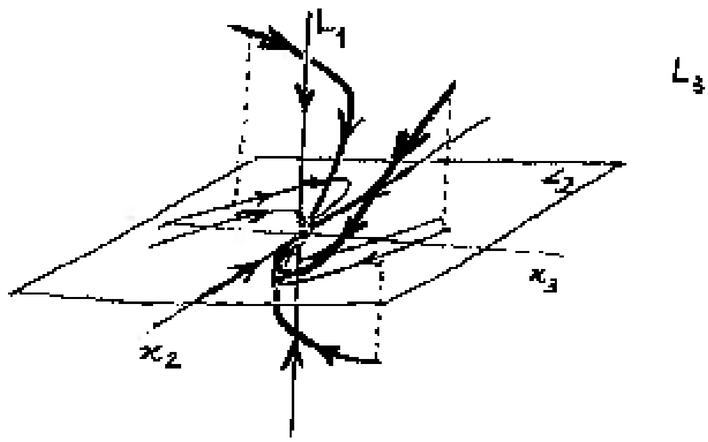


Figura 44: Retrato de fase da restrição de (57) a L_3.

Atendendo à expressão para e^{Jt} determinada na alínea 1.a) tem-se

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{\text{part}}(t) &= e^{Jt}\int_0^t e^{-Js}\mathbf{b}(s)ds \\
&= \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^s & -se^s & 0 \\ 0 & 0 & e^s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \cos s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ds = \\
&= \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-s} \\ e^s \cos s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ds = \\
&= \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-e^{-t} \\ \frac{1}{2}e^t \sin t + \frac{1}{2}e^t \cos t - \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} e^t - 1 \\ \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

b) A solução geral do sistema não homogéneo (54) pode ser escrita na forma $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\text{hom}}(t) + \mathbf{x}_{\text{part}}(t)$, onde $\mathbf{x}_{\text{hom}}(t)$ é a solução geral da equação homogénea, que determinamos na alínea 1.a), e $\mathbf{x}_{\text{part}}(t)$ é uma solução particular do problema não-homogéneo, a qual foi encontrada na alínea anterior. Consequentemente tem-se, atendendo à condição inicial dada,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

donde se conclui que $c_1 = c_2 = 1$, $c_3 = c_4 = 0$ e a solução procurada é

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^t - 1 \\ \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^t - 1 \\ \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

II.

a) A equação homogénea correspondente a (55) é $x'''' + 2x''' + x'' = 0$ a qual pode ser escrita na forma $\left(D^4 + 2D^3 + D^2\right) x = 0$. Seja $p(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2$. Factorizando este polinómio obtém-se $p(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = \lambda^2(\lambda + 1)^2$ pelo que a equação diferencial dada pode ser escrita na forma $D^2(D + 1)^2 x = 0$ cuja solução geral é

$$x(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 e^{-t} + \alpha_4 t e^{-t},$$

onde α_k, $k = 1, \ldots, 4$ são constantes reais arbitrárias.

b) Atendendo a que o membro direito de (55) é a soma de um polinómio em t com um coseno e tendo em consideração que a equação é linear podemos obter a solução particular pretendida resolvendo separadamente as equações $x'''' + 2x''' + x'' = t$ e $x'''' + 2x''' + x'' = \cos t$ e adicionando os resultados. Comecemos por $x'''' + 2x''' + x'' = t$. Como o membro direito é igual a te^{0t} e 0 é uma raíz do polinómio característico $p(\lambda)$ com multiplicidade 2 sabemos que as soluções particulares podem ser escritas na forma $x_{\text{part}}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$, pelo que se tem $x'_{\text{part}}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$, $x''_{\text{part}}(t) = 2a_2 + 6a_3 t$, $x'''_{\text{part}}(t) = 6a_3$ e finalmente $x''''_{\text{part}}(t) = 0$. Substituindo na equação diferencial que estamos a considerar tem-se $0 + 2\,(6a_3) + (2a_2 + 6a_3 t) = t$ concluindo-se que a_0 e a_1 são arbitrários, $a_2 = -1$ e $a_3 = 1/6$, sendo uma solução particular, por exemplo, $x_{\text{part}}(t) = -t^2 + \frac{1}{6}t^3$. Consideremos agora a equação $x'''' + 2x''' + x'' = \cos t$. Como $\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$ e como nem $\lambda = i$ nem $\lambda = -i$ são zeros de $p(\lambda)$, as soluções particulares da equação podem ser escritas na forma $x_{\text{part}}(t) = \alpha e^{it} + \beta e^{-it}$. Daqui obtem-se $x'_{\text{part}}(t) = \alpha i e^{it} - \beta i e^{-it}$, $x''_{\text{part}}(t) = -\alpha e^{it} - \beta e^{-it}$, $x'''_{\text{part}}(t) = -\alpha i e^{it} + \beta i e^{-it}$ e finalmente $x''''_{\text{part}}(t) = \alpha e^{it} + \beta e^{-it}$. Substituindo na equação que estamos a resolver vem $\left(\alpha e^{it} + \beta e^{-it}\right) + 2\left(-\alpha i e^{it} + \beta i e^{-it}\right) + \left(-\alpha e^{it} - \beta e^{-it}\right) = \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it}$, donde se conclui que

$\alpha - 2\alpha i - \alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta + 2\beta i - \beta = \frac{1}{2}$ e portanto $\alpha = -\beta = \frac{i}{4}$. A solução particular será então $x_{\text{part}}(t) = \frac{i}{4}e^{it} - \frac{i}{4}e^{-it} = \frac{i}{4}(\cos t + i\sin t) - \frac{i}{4}(\cos t - i\sin t) = -\frac{1}{2}\sin t$. Atendendo a isto, uma solução particular de (55) é

$$x_{\text{part}}(t) = -t^2 + \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}\sin t.$$

c) A solução geral de (55) é

$$x(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 e^{-t} + \alpha_4 t e^{-t} - t^2 + \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}\sin t.$$

Derivando esta expressão tem-se

$$\begin{aligned} x'(t) &= \alpha_2 + (\alpha_4 - \alpha_3)e^{-t} - \alpha_4 t e^{-t} - 2t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}\cos t \\ x''(t) &= (\alpha_3 - 2\alpha_4)e^{-t} + \alpha_4 t e^{-t} - 2 + t + \frac{1}{2}\sin t \\ x'''(t) &= (3\alpha_4 - \alpha_3)e^{-t} - \alpha_4 t e^{-t} + 1 + \frac{1}{2}\cos t, \end{aligned}$$

pelo que, utilizando as condições iniciais dadas, vem

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - \frac{1}{2} = 0 \\ \alpha_3 - 2\alpha_4 - 2 = 0 \\ -\alpha_3 + 3\alpha_4 + \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 2 \\ \alpha_3 = 1 \\ \alpha_4 = -1/2 \end{cases}$$

e a solução pedida é

$$x(t) = -1 + 2t - t^2 + \frac{1}{6}t^3 + e^{-t} - \frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{2}\sin t.$$

III.

A função do membro direito da equação diferencial está definida em $\mathbb{R}^2$ e é de classe $\mathcal{C}^\infty$ no seu domínio, pelo que é continua como função de t e localmente Lipschitziana como função de x. Assim, o Teorema de Picard-Lindelöf é aplicável, garantindo-se a existência e unicidade de solução do problema de Cauchy apresentado. Observe-se que a equação em causa é uma equação separável: dividindo ambos os membros da equação por $1 + x^2$ (que é sempre diferente de zero) tem-se $(1 + x^2)^{-1}x' = (t - 1)$. Integrando ambos os membros entre $t = 1$ e um valor arbitrário de t obtém-se

$$\int_1^t \frac{1}{1 + x(s)^2}\frac{dx}{ds}ds = \int_1^t (s - 1)ds,$$

ou seja

$$\int_0^{x(t)} \frac{1}{1 + x^2}dx = \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2}.$$

Uma integração imediata fornece $\arctan x(t) = \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2}$ e portanto

$$x(t) = \tan\left(\frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2}\right).$$

O intervalo máximo de existência da solução será o intervalo aberto $I_{\max}$ onde $x(t)$ é de classe $\mathcal{C}^1$ e que contém $t = 1$. Observando que $x(t)$ é a composição de duas funções de classe $\mathcal{C}^\infty$ tem-se que será de classe $\mathcal{C}^1$ onde estiver definida. Observando que $x(t)$ não está definida nos pontos t para os quais $\frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$ e $\frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{2}$ é conveniente calcular estes pontos: Resolvendo a primeira equação obtêm-se as soluções $t_- = 1 - \sqrt{\pi}$ e $t_+ = 1 + \sqrt{\pi}$. A segunda equação não tem raízes reais. Como $t_- < 1 < t_+$ conclui-se que o intervalo máximo de existência da solução é $I_{\max} =]1 - \sqrt{\pi}, 1 + \sqrt{\pi}[$.

IV.

1. Seja $(q(t), p(t))$ uma solução de (56). Então

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q}q' + \frac{\partial H}{\partial p}p' = \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p}\left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right) \equiv 0,$$

pelo que H é constante sobre soluções, ou seja, é uma constante do movimento para (56).

2.a) Com a função H dada o sistema (56) fica

$$\begin{cases} q' = 2p \\ p' = 2q - 3q^2 \end{cases} \tag{58}$$

e os pontos de equilíbrio são

$$\begin{cases} q' = 0 \\ p' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} p = 0 \\ (2-3q)q = 0 \end{cases} \iff (q,p) = (0,0)\,,\ (2/3, 0).$$

b) A matriz jacobiana do sistema num ponto arbitrário (q, p) é

$$A(q,p) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2-6q & 0 \end{bmatrix}$$

pelo que nos pontos de equilíbrio tem-se os sistemas lineares seguintes

Linearização em torno de $(0, 0)$:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

onde $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} = (q-0, p-0)^{\mathrm{T}}$. Como os valores próprios da matriz da linearização, $\lambda_\pm = \pm 2$, têm parte real diferente de zero, poderemos utilizar esta linearização no estudo do comportamento do sistema não linear (58) numa vizinhança da origem.

Linearização em torno de $(2/3, 0)$:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

onde $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} = \left(q - \frac{2}{3}, p - 0\right)^{\mathrm{T}}$. Os valores próprios da matriz da linearização são $\pm 2i$ e como têm partes reais nulas conclui-se que não é possível utilizar a linearização para o estudo do comportamento do sistema não-linear em pequenas vizinhanças de $(2/3, 0)$.

c) Para esboçar o retrato de fase de (56) utilizaremos a linearização em torno do ponto de equilíbrio $(0, 0)$ e o facto da hamiltoneana $H(q, p) = q^3 - q^2 + p^2$ ser uma constante do movimento. Comecemos pela linearização: atendendo ao resultado da alínea anterior, o ponto de equilíbrio $(0, 0)$ é um ponto de sela. Os espaços próprios da matriz jacobiana $A(0, 0)$ são os seguintes:

(i) Correspondente ao valor próprio $\lambda_+ = 2$:

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow v_2 = v_1$$

pelo que o espaço próprio E_2 é dado por $E_2 \left\{(\alpha, \alpha)^{\mathrm{T}} : \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.

(ii) Correspondente ao valor próprio $\lambda_- = -2$:

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow v_2 = -v_1$$

pelo que o espaço próprio E_2 é dado por $E_2 \left\{(\beta, -\beta)^{\mathrm{T}} : \beta \in \mathbb{R}\right\}$.

O esboço do retrato de fase do sistema numa vizinhança de $(0, 0)$ poderá ser, então, o apresentado na Figura 45.

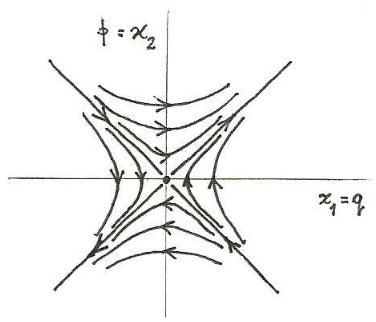


Figura 45: Esboço do retrato de fases de (56) numa vizinhança de $(0, 0)$.

Quanto ao que se passa fora de vizinhanças suficientemente pequenas da origem, isto poderá ser investigado recorrendo ao facto de H ser uma constante do movimento para (56) e, consequentemente, as órbitas do sistema estarem contidas nos conjuntos de nível de H. Observando que H é a soma de uma função não-negativa da variável p, a saber $H_1(p) = p^2$, com uma função apenas da outra variável, q, $H_2(q) = q^3 - q^2$, o esboço das curvas de nível pode ser facilmente feito a partir do gráfico de $H_2(q)$ tendo em conta que $H(q,p) = H_1(p) + H_2(q) =$ constante e que $H_1(p) \geq 0$. O sentido das órbitas da equação é facilmente obtido utilizando, por exemplo, a primeira equação de (56): quando $p > 0$ tem-se $q' > 0$, ou seja, $q(t)$ crescente, e reciprocamente. Isto permite esboçar o apresentado na Figura 46, já entrando em consideração com os resultados obtidos pela linearização em torno de $(0,0)$.

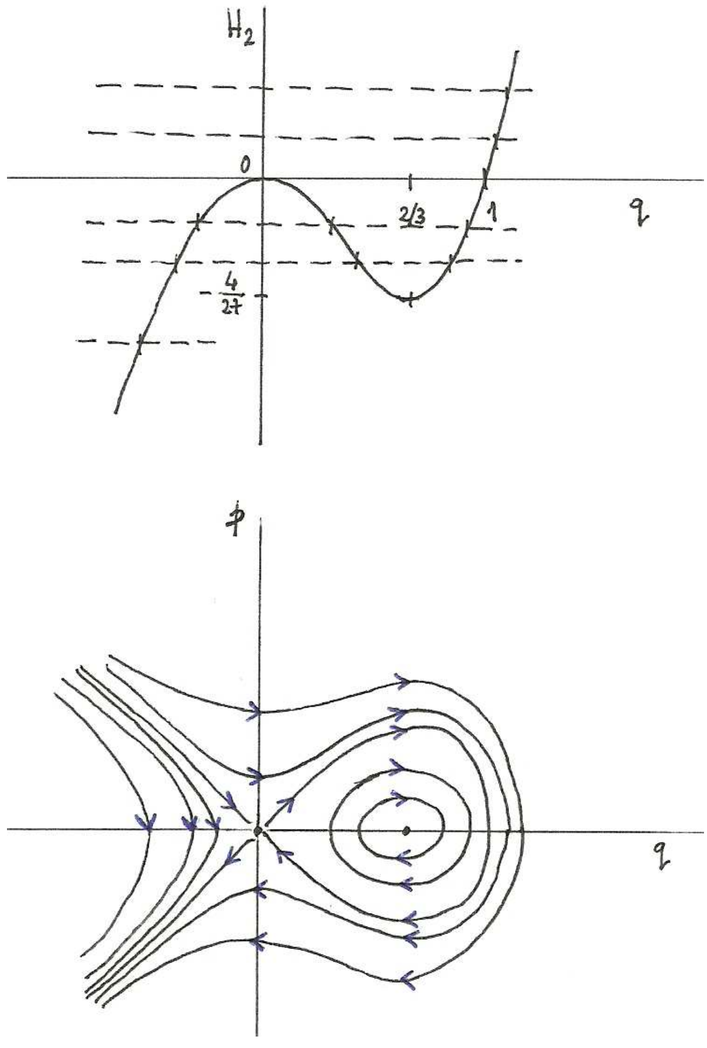


Figura 46: Esboço do retrato de fases de (56).

V.

1.a) Na Figura 47 apresenta-se o gráfico da função φ.

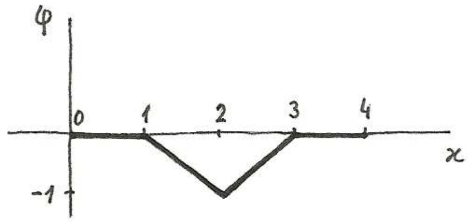


Figura 47: Gráfico da função φ.

Para determinar uma série de Fourier de cosenos para φ há que estender φ como função par e periódica a todo o $\mathbb{R}$. O modo mais simples de fazê-lo é começar por definir a extensão par ao intervalo $[-4, 4]$ (Figura 48).

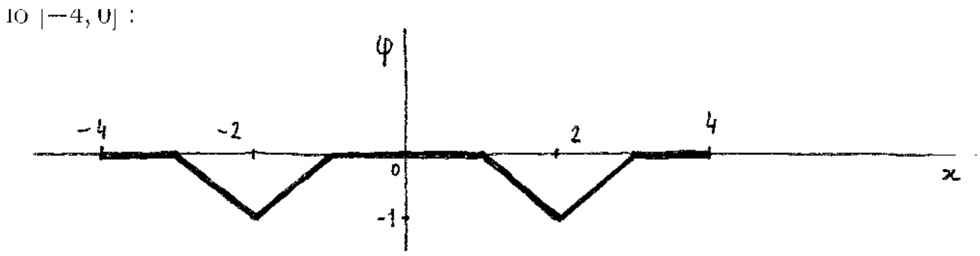


Figura 48: Extensão par de φ ao intervalo $[-4, 4]$.

Agora prolonga-se esta função a todo o $\mathbb{R}$ como função periódica. Designaremos o resultado por $\tilde{\varphi}$ (Figura 49).

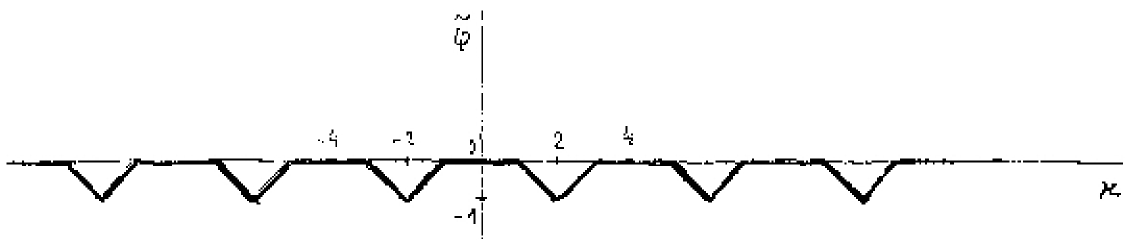


Figura 49: Prolongamento a todo o $\mathbb{R}$, como função periódica, da função apresentada na Figura 48.

Observe-se que a função $\tilde{\varphi}$ pode ser considerada como uma função $8-$periódica, mas é mais natural considerá-la uma função $4-$periódica, visto que 4 é o seu período mínimo (Figura 50).

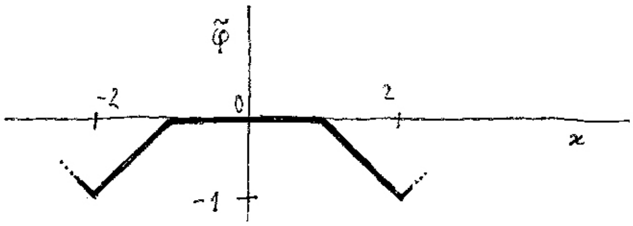


Figura 50: Período mínimo da função apresentada na Figura 49.

Assim, os coeficientes da série de Fourier, que, por ser de uma função par, será necessariamente uma série de cosenos, são calculados como se segue

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2}\int_0^2 \varphi(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx \\ &= \int_1^2 (1-x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{se } n=0 \\ \frac{4}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-\cos n\pi\right) & \text{se } n\in\mathbb{N}_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Daqui conclui-se que a série de Fourier pretendida é

$$-\frac{1}{4}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4}{k^2\pi^2}\left(\cos\frac{k\pi}{2}-\cos k\pi\right)\cos\frac{k\pi x}{2}.$$

b) A função $\tilde{\varphi}$ é contínua em $\mathbb{R}$. A sua derivada é periódica de período 4 e, no intervalo $]-2,2[$, tem-se

$$\tilde{\varphi}'(x)=\begin{cases} 1 & \text{se } x\in]-2,-1[\\ 0 & \text{se } x\in]-1,1[\\ -1 & \text{se } x\in]1,2[. \end{cases}$$

Portanto as derivadas laterais em $x=\pm 1,\pm 2$ existem e são finitas e conclui-se que $\tilde{\varphi}$ é uma função seccionalmente diferenciável. Pelo Teorema de Fourier conclui-se que a série de Fourier é pontualmente convergente em $\mathbb{R}$ e que a sua soma é igual à função $\tilde{\varphi}$. Atendendo à expressão para $\tilde{\varphi}'$ dada acima conclui-se que esta função e o seu quadrado são integráveis em $[-2,2]$ (por serem função seccionalmente contínuas). Isto permite aplicar o teorema de convergência uniforme de séries de Fourier dado no curso e concluir que a série de Fourier determinada acima é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$.

2. Utilizando a técnica da separação de variáveis vamos procurar soluções da forma $u(t,x) = T(t)X(x)$. Assim tem-se $u_t = T'X$ e $u_{xx} = TX''$ pelo que a equação dada pode ser escrita na forma $T'(t)X(x) = T(t)X''(x)$. Supondo que $T(t)X(x)$ é diferente de 0 em $(t,x)\mathbb{R}^+\times]0,4[$ pode-se dividir a equação acima por esta função e obter

$$\frac{T'}{T}(t) = \frac{X''}{X}(x), \quad (t,x)\mathbb{R}^+\times]0,4[.$$

Atendendo a que esta igualdade tem de ser satisfeita para todos os pontos do conjunto aberto indicado, terá de existir uma constante real σ, independente de t e de x, tal que

$$\frac{T'}{T}(t) = \sigma = \frac{X''}{X}(x), \quad (t,x)\mathbb{R}^+\times]0,4[.$$

As condições na fronteira podem ser escritas utilizando a hipótese de $u(t,x) = T(t)X(x)$:

$$\begin{array}{ll} 0 = u_x(t,0) = T(t)X'(0) \Longleftrightarrow X'(0) = 0 & \text{porque por hipótese } T(t) \neq 0, \\ 0 = u_x(t,4) = T(t)X'(4) \Longleftrightarrow X'(4) = 0 & \text{pela mesma razão.} \end{array}$$

Temos assim o seguinte problema de valores na fronteira para $X(x)$:

$$\begin{cases} X'' - \sigma X = 0 \\ X'(0) = X'(4) = 0 \end{cases}$$

Estudemos a possibilidade de obtenção de soluções *não-triviais* (que não sejam identicamente nulas) deste problema:

- Considere-se $\sigma = 0$. A equação diferencial fica reduzida a $X'' = 0$ cujas soluções são $X(x) = ax + b$ e atendendo às condições na fronteira $0 = X'(0) = a$ e $0 = X'(4) = a$ conclui-se, portanto, que $a = 0$ e b é arbitrário, ou seja, as soluções do problema com $\sigma = 0$ são funções constantes $X(x) \equiv b$.

- Seja agora $\sigma > 0$. A solução geral da equação é $X(x) = ae^{\sqrt{\sigma}x} + be^{-\sqrt{\sigma}x}$. Atendendo às condições na fronteira tem-se $0 = X'(0) = a\sqrt{\sigma} - b\sqrt{\sigma}$ e $0 = X'(4) = a\sqrt{\sigma}e^{4\sqrt{\sigma}} - b\sqrt{\sigma}e^{-4\sqrt{\sigma}}$ cuja única solução é $a = b = 0$ fornecendo como única solução da equação a função identicamente nula $X(x) \equiv 0$.

- Finalmente tome-se $\sigma < 0$. Por facilidade de notação é conveniente escrever $\sigma = -\lambda^2$ com $\lambda > 0$. A solução geral real da equação diferencial é agora $X(x) = a\cos\lambda x + b\sin\lambda x$. Atendendo às condições na fronteira tem-se $0 = X'(0) = -a\lambda\sin 0 + b\lambda\cos 0 = b\lambda$ donde se obtém $b = 0$ e portanto $0 = X'(4) = -a\lambda\sin 4\lambda$ concluindo-se que, ou $a = 0$ e obtemos a solução $X(x) \equiv 0$, ou $\sin 4\lambda = 0$, isto é, $\lambda = \lambda_k = k\pi/4, k \in \mathbb{N}_1$, obtendo-se assim infinitas soluções do problema de valores na fronteira, em particular as funções $X_k(x) = \cos(k\pi x/4), \quad \forall k \in \mathbb{N}_1$, e todas as combinações lineares de um número finito destas funções

Dos resultados obtidos para os casos $\sigma = 0$ e $\sigma < 0$ conclui-se que se pode tomar $\sigma = -\lambda^2 = -k^2\pi^2/16$ com $k \in \mathbb{N}_0$. Atendendo a isto a equação para $T(t)$ fica

$$T' = -\frac{k^2\pi^2}{16}T$$

cuja solução geral é

$$T_k(t) = a_k e^{-k^2\pi^2 t/16},$$

com a_k constantes reais arbitrárias e k um inteiro não-negativo. Assim, solução geral formal do problema é

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(k\pi x/4) e^{-k^2\pi^2 t/16}.$$

Para que seja verificada a condição inicial $u(0,x) = \varphi(x)$ tem de se ter

$$\varphi(x) = u(0,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(k\pi x/4).$$

Uma série de Fourier de cosenos para a função φ foi determinada na alínea 1.a) e na alínea 1.b) concluiu-se que essa série de Fourier era uniformemente (e portanto também) pontualmente) convergente em $\mathbb{R}$ e a sua soma é igual a φ. Daqui conclui-se imediatamente que os coeficientes da série de Fourier então obtida e da série para $u(0,x)$ têm de ser iguais, pelo que:

$$a_0 = -\frac{1}{4}$$

$$a_{2k} = \frac{4}{k^2\pi^2}\left(\cos\frac{k\pi}{2} - \cos k\pi\right), \quad k \in \mathbb{N}_1$$

$$a_{2k-1} = 0, \quad k \in \mathbb{N}_1$$

Substituindo estes valores para as constantes a_k na expressão da solução formal geral apresentada acima obtém-se a solução formal:

$$u(t,x) = -\frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{k^2\pi^2}\left(\cos\frac{k\pi}{2} - \cos k\pi\right)\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right) e^{-k^2\pi^2 t/4}.$$

Exame de 15.7.96 e resolução.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

(Mecânica)

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

Data: 15/7/1996
Duração: 3h00.

I.

Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias lineares

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \tag{59}$$

a) Determine a(s) solução(ões) estacionária(s) de (59) e classifique-a(s) quanto à estabilidade.

b) Determine a solução geral de (59).

c) Determine o maior subconjunto L de $\mathbb{R}^3$ tal que se $\mathbf{x}(0) \in L$ então a solução é limitada.

II.

Considere a equação diferencial linear

$$w'''' + w'' + 2w' = t^2 + \cos t \tag{60}$$

a) Determine a solução geral da equação homogénea correspondente a (60).

b) Determine a solução geral de (60).

III.

Determine a solução formal do seguinte problema

$$\begin{cases} u_{tt} = 2u_{xx} & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times]0,1[\\ u(t,0) = u_x(t,1) = 0 & t \in \mathbb{R}_0^+ \\ u(0,x) = 0, \; u_t(0,x) = \sin(x\pi/2) & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

e estude a sua regularidade a fim de decidir se a solução obtida é, ou não, uma solução clássica (i.e., de classe $\mathcal{C}^2$) do problema dado.

IV.

Considere a equação diferencial ordinária

$$\left(4x^2y + 3xy^2 + 2y^3\right) + \left(2x^3 + 3x^2y + 4xy^2\right)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{61}$$

a) Mostre que (61) tem um factor integrante do tipo $\mu = \mu(xy)$.

b) Mostre que a solução de (61) com condição inicial $y(-1) = 1$ é dada implicitamente pela expressão $x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 = 1$.

c) Determine o polinómio de Taylor de segunda ordem, no ponto -1, da solução dada implicitamente na alínea anterior.

V.

Uma equação diferencial ordinária de segunda ordem

$$M(t, x, x') + N(t, x, x')x'' = 0 \tag{62}$$

diz-se exacta se existir uma função $\Phi(t, x, x')$ tal que $M + Nx'' = \frac{d}{dt}\Phi$.

a) Deduza relações entre as derivadas (de primeira e de segunda ordem) de M e de N que sejam necessárias para garantir a existência de uma função Φ nas condições descritas acima. (*Sugestão: poderá ser útil usar o mesmo tipo de argumento que foi utilizado para o estudo das equações exactas de primeira ordem.*)

b) Sendo (62) exacta, indique como determinaria Φ.

Resolução:

I.

a) As soluções estacionárias são as funções $\mathbf{x}(t)$ constantes, ou seja, $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{0}$, pelo que se tem

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Os valores próprios da matriz do sistema são os zeros do polinómio característico,

$$p_{\text{A}}(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2+1),$$

os quais são $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = i$ e $\lambda_3 = -i$. Como existe um valor próprio com parte real positiva, λ_1, conclui-se que a solução estacionária é instável.

b) Atendendo a que os valores próprios são simples, pode-se facilmente obter a solução usando o método dos valores e vectores próprios: Para $\lambda_1 = 1$ os vectores próprios associados são

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \lambda_1 I_3 \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -v_1 + v_2 = 0 \\ -v_1 - v_2 + v_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{v} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Para $\lambda_2 = -i$ os vectores próprios associados são

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \lambda_2 I_3 \right) \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} iw_1 + w_2 = 0 \\ -w_1 + iw_2 + w_3 = 0 \\ (1+i)w_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{w} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix}, \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Daqui tem-se

$$\begin{aligned} e^{-it}\mathbf{w} &= (\cos t - i \sin t) \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \sin t \right) + i \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos t - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sin t \right) \\ &= \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

concluindo-se, assim, que a solução geral real é dada por

$$\mathbf{x}(t) = \alpha_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \\ 0 \end{bmatrix},$$

com α_1, α_2 e α_3 constantes reais arbitrárias.

c) Atendendo ao resultado da alínea anterior, a solução será limitada se e só se $\alpha_1 = 0$, caso em que se terá $\mathbf{x}(0) = (\alpha_2, \alpha_3, 0)^{\mathrm{T}}$ pelo que se conclui que

$$L = \left\{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\right\}.$$

II.

a) A equação homogénea correspondente a (60) é

$$w'''' + w'' + 2w' = 0$$

a qual pode ser escrita na forma $(D^4+D^2+2D)w = 0$. Considere-se o polinómio característico associado $p(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^2 + 2\lambda$. Este polinómio pode ser factorizado como se segue: $p(\lambda) = \lambda(\lambda^3 + \lambda + 2)$, notando que o polinómio entre parentesis tem um zero em $\lambda = -1$ obtem-se $p(\lambda) = \lambda(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+2) = \lambda(\lambda+1)\left(\lambda - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i\right)\right)\left(\lambda - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i\right)\right)$. Consequentemente, a solução geral *real* de (60) é

$$w(t) = \alpha_1 + \alpha_2 e^{-t} + \alpha_3 e^{t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + \alpha_4 e^{t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right),$$

onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ são constantes reais arbitrárias.

b) A solução geral de (60) pode ser escrita como a soma da solução geral da equação homogénea (determinada na alínea anterior) com uma solução particular da equação não-homogénea: $w(t) = w_{\text{hom}}(t) + w_{\text{part}}(t)$. Atendendo a que o termo não-homogéneo é da forma $\sum_k p_k(t)e^{\mu_k t}$ e tendo em conta que a equação é linear conclui-se que uma solução particular será da forma

$$w_{\text{part}}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 \cos t + a_5 \sin t.$$

Derivando esta função até à quarta ordem tem-se

$$\begin{aligned}
w'_{\text{part}}(t) &= a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 - a_4 \sin t + a_5 \cos t \\
w''_{\text{part}}(t) &= 2a_2 + 6a_3 t - a_4 \cos t - a_5 \sin t \\
w'''_{\text{part}}(t) &= 6a_3 + a_4 \sin t - a_5 \cos t \\
w''''_{\text{part}}(t) &= a_4 \cos t + a_5 \sin t.
\end{aligned}$$

Substituindo em (60) vem

$$(2a_1+2a_2)+(4a_2+6a_3)t+6a_3t^2+(a_4-a_4+2a_5)\cos t+(a_5-a_5-2a_4)\sin t=t^2+\cos t$$

pelo que se conclui que $a_1=1/4$, $a_2=-1/4$, $a_3=1/6$, $a_4=0$, $a_5=1/2$, e a_0 arbitrário, vindo então (escolhendo $a_0=0$),

$$w_{\text{part}}(t)=\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}\sin t$$

e a solução geral pretendida pode ser escrita somando esta expressão com a obtida na alínea anterior para a solução geral da equação homogénea correspondente, como foi referido acima.

III.

Utilizando a técnica da separação de variáveis vamos procurar soluções da forma $u(t,x)=T(t)X(x)$. Assim tem-se $u_{tt}=T''X$ e $u_{xx}=TX''$ pelo que a equação dada pode ser escrita na forma $T''(t)X(x)=2T(t)X''(x)$. Supondo que $2T(t)X(x)$ é diferente de 0 em $(t,x)\mathbb{R}^+\times]0,1[$ pode-se dividir a equação acima por esta função e obter

$$\frac{1}{2}\frac{T''}{T}(t)=\frac{X''}{X}(x),\quad (t,x)\mathbb{R}^+\times]0,1[.$$

Atendendo a que esta igualdade tem de ser satisfeita para todos os pontos do conjunto aberto indicado, terá de existir uma constante real σ, independente de t e de x, tal que

$$\frac{1}{2}\frac{T''}{T}(t)=\sigma=\frac{X''}{X}(x),\quad (t,x)\mathbb{R}^+\times]0,1[.$$

As condições na fronteira podem ser escritas utilizando a hipótese de $u(t,x)=T(t)X(x)$:

$$\begin{array}{ll} 0=u(t,0)=T(t)X(0)\Longleftrightarrow X(0)=0 & \text{porque por hipótese } T(t)\neq 0,\\ 0=u_x(t,1)=T(t)X'(1)\Longleftrightarrow X'(1)=0 & \text{pela mesma razão.}\end{array}$$

Temos assim o seguinte problema de valores na fronteira para $X(x)$:

$$\begin{cases} X''-\sigma X=0\\ X(0)=X'(1)=0\end{cases}$$

Estudemos a possibilidade de obtenção de soluções *não-triviais* (que não sejam identicamente nulas) deste problema:

- Considere-se $\sigma=0$. A equação diferencial fica reduzida a $X''=0$ cujas soluções são $X(x)=ax+b$ e atendendo às condições na fronteira $0=X(0)=b$ e $0=X'(1)=a$ conclui-se, portanto, que $a=0$ e $b=0$, fornecendo como única solução da equação a função identicamente nula $X(x)\equiv 0$.

- Seja agora $\sigma > 0$. A solução geral da equação é $X(x) = ae^{\sqrt{\sigma}x}+be^{-\sqrt{\sigma}x}$. Atendendo às condições na fronteira tem-se $0 = X(0) = a + b$ e $0 = X'(1) = a\sqrt{\sigma}e^{\sqrt{\sigma}} - b\sqrt{\sigma}e^{-\sqrt{\sigma}}$ cuja única solução é $a = b = 0$ e, tal como no caso anterior,a única solução da equação é a função identicamente nula $X(x) \equiv 0$.

- Finalmente tome-se $\sigma < 0$. Por facilidade de notação é conveniente escrever $\sigma = -\lambda^2$ com $\lambda > 0$. A solução geral real da equação diferencial é agora $X(x) = a\cos\lambda x + b\sin\lambda x$. Atendendo às condições na fronteira tem-se $0 = X(0) = a\cos 0 + b\sin 0 = a$ donde se obtém $a = 0$ e portanto $0 = X'(1) = b\lambda\cos\lambda$ concluindo-se que, ou $b = 0$ e obtemos a solução $X(x) \equiv 0$, ou $\cos\lambda = 0$, isto é, $\lambda = \lambda_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{N}_0$, obtendo-se assim infinitas soluções do problema de valores na fronteira, em particular as funções $X_k(x) = \sin\left[(\pi/2 + k\pi)\,x\right], \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$, e todas as combinações lineares de um número finito destas funções

Destes resultados conclui-se que se pode tomar $\sigma = -\lambda^2 = -\left(\pi/2 + k\pi\right)^2$ com $k \in \mathbb{N}_0$. Atendendo a isto a equação para $T(t)$ fica

$$T'' + 2\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2 T = 0$$

cuja solução geral é

$$T_k(t) = a_k \cos\left[\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)t\right] + b_k \sin\left[\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)t\right],$$

com a_k e b_k constantes reais arbitrárias e $k \in \mathbb{N}_1$. Assim, solução geral formal do problema é

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(a_k \cos\left[\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)t\right] + b_k \sin\left[\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)t\right]\right)\sin\left[\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)x\right].$$

Atendendo à condição inicial tem-se:

$$0 = u(0,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \sin\left[\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)x\right]$$

pelo que se tem $a_k = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}_0$, por outro lado, tem-se também

$$\sin(x\pi/2) = u_t(0,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) b_k \sin\left[\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)x\right],$$

e portanto $b_0 = \sqrt{2}/\pi$ e $b_k = 0$ para todo o $k \geq 1$. Atendendo a isto, solução formal pedida é a seguinte

$$u(t,x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}t\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right),$$

a qual é uma função infinitamente diferenciável em ordem a t e a x e, portanto, é mesmo uma solução (clássica) do problema posto.

IV.

a) Suponhamos que existe de facto um factor integrante do tipo $\mu(xy)$ para a equação (61). Então a equação obtida por multiplicação de (61) pelo factor integrante será uma equação exacta e, consequentemente, ter-se-à

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(xy)\left(4x^2y+3xy^2+2y^3\right)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(xy)\left(2x^3+3x^2y+4xy^2\right)\right). \tag{63}$$

Se conseguirnos provar que esta *equação diferencial* para μ tem uma solução que é, efectivamente, função apenas de xy então concluimos que a nossa hipótese inicial é válida e que, portanto, existe um factor integrante do tipo pretendido. Vejamos o que se passa: A equação (63) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\mu(xy)}{\partial y}\left(4x^2y+3xy^2+2y^3\right)+\mu(xy)\left(4x^2+6xy+6y^2\right)=\\ &=\frac{\partial\mu(xy)}{\partial x}\left(2x^3+3x^2y+4xy^2\right)+\mu(xy)\left(6x^2+6xy+4y^2\right)\end{aligned}$$

e atendendo a que

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mu(xy)}{\partial y}&=\frac{\partial\mu(xy)}{\partial(xy)}\frac{\partial xy}{\partial y}=\mu' x\\ \frac{\partial\mu(xy)}{\partial x}&=\frac{\partial\mu(xy)}{\partial(xy)}\frac{\partial xy}{\partial x}=\mu' y\end{aligned}$$

tem-se

$$\mu' x\left(4x^2y+3xy^2+2y^3\right)-\mu' y\left(2x^3+3x^2y+4xy^2\right)=\left(6x^2+6xy+4y^2-4x^2-6xy-6y^2\right)\mu$$

e portanto

$$\left(2x^3y-2xy^3\right)\mu'=\left(2x^2-2y^2\right)\mu$$

ou seja

$$\mu'=\frac{1}{xy}\mu,$$

cuja solução geral é

$$\mu(xy)=\alpha xy,$$

onde α é uma constante real arbitrária. Com isto conclui-se o que se pretendia.

b) Escolhendo $\alpha=1$ no resultado da alínea anterior e multiplicando a equação (61) pelo factor integrante assim obtido, $\mu(xy)=xy$, obtém-se a equação exacta

$$\left(4x^3y^2+3x^2y^3+2xy^4\right)+\left(2x^4y+3x^3y^2+4x^2y^3\right)\frac{dy}{dx}=0$$

e, sendo exacta, tem-se que existe uma função suficientemente regular, $\Phi(x,y)$, tal que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial x} &= 4x^3y^2+3x^2y^3+2xy^4\\
\frac{\partial \Phi}{\partial y} &= 2x^4y+3x^3y^2+4x^2y^3
\end{aligned}$$

integrando cada uma destas equações tem-se

$$\begin{aligned}
\Phi(x,y) &= \int \left(4x^3y^2+3x^2y^3+2xy^4\right) dx = x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4+h_1(y)\\
\Phi(x,y) &= \int \left(2x^4y+3x^3y^2+4x^2y^3\right) dy = x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4+h_2(x)
\end{aligned}$$

pelo que, comparando estas duas expressões, tem-se $h_1(y)=h_2(x)=$ constante. Como esta constante é arbitrária pode tomar-se igual a 0. A equação (61) pode agora ser escrita na forma

$$\frac{d}{dx}\left(x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4\right)=0$$

e portanto as suas soluções $y=y(x)$ são dadas, implicitamente, por

$$x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4=\alpha.$$

Atendendo à condição inicial $y(-1)=1$ conclui-se que $\alpha=(-1)^4 1^2+(-1)^3 1^3+(-1)^2 1^4=1$, o que permite concluir o que se pretendia.

c) O polinómio de Taylor pedido será

$$P(x)=y(-1)+(x+1)y'(-1)+\frac{1}{2!}(x+1)^2y''(-1).$$

Atendendo à condição inicial dada tem-se $y(-1)=1$. Pela equação diferencial (61) escrita agora na forma

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{4x^2y+3xy^2+2y^3}{2x^3+3x^2y+4xy^2}$$

conclui-se que, em $(x,y)=(x,y(x))=(-1,1)$ tem-se $y'(-1)=1$. Finalmente, calculando a derivada total (em ordem a x) de (61) tem-se

$$\begin{aligned}
&\left(8xy+4x^2y'+3y^2+6xyy'+6y^2y'\right)+\\
&+\left(6x^2+6xy+3x^2y'+4y^2+8xyy'\right)y'+\\
&+\left(2x^3+3x^2y+4xy^2\right)y'' = 0.
\end{aligned}$$

Calculando esta expressão no ponto $x=-1$ e tendo em atenção que $y(-1)=1$ e $y'(-1)=1$, conclui-se que $y''(-1)=-2/3$, vindo o polinómio de Taylor dado por

$$P(x)=1+(x+1)-\frac{1}{3}(x+1)^2.$$

V.

a) Suponhamos que (62) é exacta e que, consequentemente, existe uma função Φ tal que $\frac{d}{dt}\Phi(t,x,x') = M(t,x,x') + N(t,x,x')x''$. Então, pela regra da derivação das funções compostas, tem-se

$$\frac{d}{dt}\Phi(t,x,x') = \Phi_t + \Phi_x x' + \Phi_{x'} x'' = M + Nx'',$$

donde se obtém

$$\begin{aligned} M &= \Phi_t + \Phi_x p \\ N &= \Phi_p \end{aligned}$$

onde, para facilidade de notação, fizemos $p \overset{\text{def}}{=} x'$. Pretendemos, a partir destas expressões, deduzir relações entre as derivadas de N e de M (mas não de Φ) em analogia com o que foi feito para equações exactas de primeira ordem. Um primeiro passo consiste em calcular as derivadas parciais de M e N em ordem às diferentes variáveis:

$$\begin{aligned} N_t &= \Phi_{tp} & \qquad M_t &= \Phi_{tt} + \Phi_{tx} p \\ N_x &= \Phi_{xp} & M_x &= \Phi_{tx} + \Phi_{xx} p \\ N_p &= \Phi_{pp} & M_p &= \Phi_{tp} + \Phi_x + \Phi_{xp} p \end{aligned}$$

A partir destas expressões obtêm-se facilmente as expressões das segundas derivadas parciais de M e N as quais são, atendendo ao Teorema de Schwarz, as seguintes:

$$\begin{aligned} N_{tt} &= \Phi_{ttp} & \qquad M_{tt} &= \Phi_{ttt} + \Phi_{ttx} p \\ N_{tx} &= \Phi_{txp} & M_{tx} &= \Phi_{ttx} + \Phi_{txx} p \\ N_{tp} &= \Phi_{tpp} & M_{tp} &= \Phi_{ttp} + \Phi_{tx} + \Phi_{txp} p \\ N_{xx} &= \Phi_{xxp} & M_{xx} &= \Phi_{txx} + \Phi_{xxx} p \\ N_{xp} &= \Phi_{xpp} & M_{xp} &= \Phi_{txp} + \Phi_{xx} + \Phi_{xxp} p \\ N_{pp} &= \Phi_{ppp} & M_{pp} &= \Phi_{tpp} + 2\Phi_{xp} + \Phi_{xpp} p \end{aligned}$$

Atendendo a estas expressões conclui-se que, por exemplo,

$$\begin{aligned} M_{pp} &= \Phi_{tpp} + 2\Phi_{xp} + \Phi_{xpp} p \\ &= N_{tp} + 2N_x + N_{xp} p \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} M_{tp} &= \Phi_{ttp} + \Phi_{tx} + \Phi_{txp} p \\ &= N_{tt} + (M_x - \Phi_{xx} p) + N_{tx} p \\ &= N_{tt} + M_x - (M_{xp} - \Phi_{txp} - \Phi_{xxp} p)\, p + N_{tx} p \\ &= N_{tt} + M_x - M_{xp} p + 2N_{tx} p + N_{xx} p^2 \end{aligned}$$

que são expressões do tipo pretendido.

b) Sendo (62) exacta sabe-se que existe uma função $\Phi(t,x,p)$ tal que (ver inicio da alínea anterior)

$$\begin{aligned} M &= \Phi_t + \Phi_x p \\ N &= \Phi_p \end{aligned}$$

Da segunda destas equações obtém-se

$$\Phi(t,x,p) = \int N(t,x,p)dp + h(t,x) \tag{64}$$

onde h é uma função arbitrária, independente de p. Substituindo esta expressão na primeira equação tem-se

$$M(t,x,p) = \frac{\partial}{\partial t}\int N(t,x,p)dp + \frac{\partial h}{\partial t} + p\frac{\partial}{\partial x}\int N(t,x,p)dp + p\frac{\partial h}{\partial x}$$

ou seja

$$h_t + ph_x = M(t,x,p) - \frac{\partial}{\partial t}\int N(t,x,p)dp - p\frac{\partial}{\partial x}\int N(t,x,p)dp,$$

a qual é uma equação diferencial parcial linear de primeira ordem para a função incognita $h = h(t,x)$. Resolvendo esta equação obtem-se h e, atendendo a (64), fica-se a conhecer Φ.

Teste de 8.11.96 e resolução.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

(Aeroespacial, Ambiente, Mecânica)

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

Data: 8/11/1996
Duração: 1h30.

I.

Considere o sistema de equações diferenciais

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1' & = & -\,x_2 \\ x_2' & = & -x_2 \\ x_3' & = & -\,x_4 + b(t) \\ x_4' & = & x_4 \end{array}\right. \tag{65}$$

1. Escreva o sistema (65) na forma vectorial $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{h}(t)$ indicando explicitamente qual é a matriz A e quais são os vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{h}(t)$.

2. Seja $b(t) \equiv 0$.

   a) Determine a solução geral de (65).

   b) Determine a(s) solução(ões) estacionária(s) de (65) e estude-a(s) quanto à estabilidade.

   c) Identifique o maior subespaço $L \subset \mathbb{R}^4$ tal que as soluções estacionárias da restrição de (65) a L são estáveis.

   d) Resolva a alínea anterior substituindo "estáveis" por "assimptoticamente estáveis".

3. Considere agora $b(t) = t$.

   a) Determine a solução geral de (65).

   b) Calcule a solução de (65) que verifica a condição inicial $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 1$.

II.

Considerem-se as funções reais $a_0(t), a_1(t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e $a_2(t) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Para qualquer função real $x = x(t) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ definem-se os operadores lineares

$$\begin{array}{ll} L = L[x] : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}), & L[x] \overset{\text{def}}{=} a_2(t)x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x \\ L^+ = L^+[x] : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}), & L^+[x] \overset{\text{def}}{=} (a_2(t)x)'' - (a_1(t)x)' + a_0(t)x. \end{array}$$

O operador L^+ designa-se por operador adjunto do operador L.

1. A equação diferencial linear

$$L[x] = 0 \tag{66}$$

diz-se *exacta* se, e só se, existirem funções reais $A_0(t)$ e $A_1(t)$, de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ tais que $L[x] = (A_1(t)x' + A_0(t)x)'$.

a) Mostre que (66) é exacta se e só se $a_2(t) = A_1(t)$, $a_1(t) = A_1'(t) + A_0(t)$ e $a_0(t) = A_0'(t)$.

b) Conclua que (66) é exacta se e só se $a_2''(t) - a_1'(t) + a_0(t) = 0$.

2. Diz-se que (66) tem um *factor integrante* $\mu = \mu(t)$ se e só se a equação diferencial $\mu L[x] = 0$ é exacta.

a) Mostre que $\mu \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ é um factor integrante para (66) se e só se $L^+[\mu] = 0$.

3. A equação diferencial (66) diz-se *auto-adjunta* se e só se $L[x] = L^+[x]$.

a) Mostre que (66) é uma equação auto-adjunta se e só se pode ser escrita na seguinte forma

$$\big(a_2(t)x'\big)' + a_0(t)x = 0.$$

b) Supondo que $a_2(t) \neq 0, \forall t$, mostre que existe uma função $\nu = \nu(t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ tal que a equação diferencial $\nu L[x] = 0$ é auto-adjunta. Determine a expressão de ν.

Resolução:

I.

1. Fazendo $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$ o sistema (65) escreve-se

$$\mathbf{x}'=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}'=\begin{bmatrix} -x_2\\ -x_2\\ -x_4+b(t)\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0&-1&0&0\\ 0&-1&0&0\\ 0&0&0&-1\\ 0&0&0&1\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ b(t)\\ 0\end{bmatrix},$$

pelo que se tem $A=\begin{bmatrix} 0&-1&0&0\\ 0&-1&0&0\\ 0&0&0&-1\\ 0&0&0&1\end{bmatrix}$ e $\mathbf{h}(t)=(0,0,b(t),0)^{\mathrm{T}}$.

2.a) A matriz A é triangular superior e portanto os seus valores próprios são os elementos da diagonal principal, ou seja, $\lambda_1=\lambda_2=0, \lambda_3=-1$ e $\lambda_4=1$. Os vectores próprios correspondentes são os seguintes: para $\lambda_1=\lambda_2=0$:

$$\mathbf{0}=(A-0I_4)\mathbf{v}=\begin{bmatrix} 0&-1&0&0\\ 0&-1&0&0\\ 0&0&0&-1\\ 0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -v_2\\ -v_2\\ -v_4\\ v_4\end{bmatrix}$$

consequentemente os vectores próprios correspondentes ao valor próprio nulo são do tipo $\mathbf{v}=(v_1,0,v_3,0)^{\mathrm{T}}$, com v_1 e v_3 constantes reais arbitrárias. Tem-se, então, um espaço próprio bidimensional, uma base do qual é $\{(1,0,0,0)^{\mathrm{T}},(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}\}$. Para o valor próprio $\lambda_3=-1$ o vectores próprios são dados por

$$\mathbf{0}=(A+I_4)\mathbf{v}=\begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&1&-1\\ 0&0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\\ -v_1+v_2\\ v_3-v_4\\ 2v_4\end{bmatrix}$$

e conclui-se que $\mathbf{v}=(v_1,v_1,0,0)^{\mathrm{T}}$. Assim, uma base para o espaço próprio é $\{(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}\}$. Finalmente, para $\lambda_4=1$ tem-se

$$\mathbf{0}=(A-I_4)\mathbf{v}=\begin{bmatrix} -1&0&0&0\\ 0&-2&0&0\\ 0&0&-1&-1\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -v_1\\ -2v_2\\ -v_3-v_4\\ 0\end{bmatrix}$$

e uma base para o espaço próprio é $\{(0,0,1,-1)^{\mathrm{T}}\}$. Estes resultados permitem concluir que a solução geral de (65) é

$$\mathbf{x}(t) = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{t},$$

com $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e α_4 constantes reais arbitrárias.

b) Atendendo à alínea anterior, as soluções estacionárias (ou constantes) do sistema são

$$\mathbf{x}(t) = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz A tem um valor próprio com parte real positiva, a saber $\lambda_4 = 1$, conclui-se que todas as soluções estacionárias são instáveis.

c) Observámos na alínea a) que todos os valores próprios de A são reais. Portanto todos os espaços próprios de A são reais e invariantes para a equação (65). O subespaço L que se pretende determinar deve ser tal que a restrição de (65) a L tenha todos os equilíbrios estáveis. Como o valor próprio nulo de A tem multiplicidade algébrica igual à multiplicidade geométrica (=2) conclui-se que $L = E_0 + E_{-1}$, onde $E_0 = \mathcal{L}\{(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}, (0,0,1,0)^{\mathrm{T}}\}$ e $E_{-1} = \mathcal{L}\{(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}\}$, ou seja,

$$L = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, 0)^{\mathrm{T}}\right\}.$$

O espaço em causa é tridimensional.

d) Neste caso apenas podemos considerar os espaços próprios correspondentes aos valores próprios com parte real estritamente negativa o que, no presente caso, resulta que que $L = E_{-1}$, com E_{-1} indicado na alínea anterior, e portanto o subespaço pedido é unidimensional.

3.a) Sabendo já qual a solução geral da equação homogénea podemos responder à questão tentando determinar uma solução particular da equação não-homogénea. Atendendo a que o termo não-homogéneo de (65) é $\mathbf{h}(t) = (0,0,t,0)^{\mathrm{T}} = (0,0,t,0)^{\mathrm{T}} e^{0t}$ e como $\mu = 0$ é um valor próprio da matriz A com multiplicidade algébrica a_0 igual à multiplicidade geométrica g_0 e igual a 2 conclui-se que uma solução particular de (65) é do tipo $\mathbf{x}_{\text{part}}(t) = \mathbf{q}_m(t)e^{0t}$ onde $\mathbf{q}_m(t)$ é um polinómio vectorial de grau $m \leq 1 + a_0 - g_0 + 1 = 2$. Portanto, escrevendo

$$\mathbf{x}_{\text{part}}(t) = \begin{bmatrix} a_1 t^2 + b_1 t + c_1 \\ a_2 t^2 + b_2 t + c_2 \\ a_3 t^2 + b_3 t + c_3 \\ a_4 t^2 + b_4 t + c_4 \end{bmatrix},$$

tem-se

$$\mathbf{x}'_{\text{part}}(t) - A\mathbf{x}_{\text{part}}(t) = \begin{bmatrix} a_2t^2 + (2a_1 + b_2)t + (b_1 + c_2) \\ a_2t^2 + (2a_2 + b_2)t + (b_2 + c_2) \\ a_4t^2 + (2a_3 + b_4)t + (b_3 + c_4) \\ -a_4t^2 + (2a_4 - b_4)t + (b_4 - c_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$$

concluindo-se que $a_1 = a_2 = a_4 = b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = c_2 = c_4 = 0$, $a_3 = 1/2$ e c_1 e c_3 são arbitrários (fá-lo-emos iguais a 0.) Daqui obtém-se a solução particular $\mathbf{x}_{\text{part}}(t) = \left(0, 0, \frac{1}{2}t^2, 0\right)^{\mathrm{T}}$ e a solução geral pode-se escrever como

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & e^t \\ 0 & 0 & 0 & -e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}t^2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) Atendendo ao resultado da alínea anterior tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e portanto

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1 + \alpha_3 \\ 1 = \alpha_3 \\ 1 = \alpha_2 + \alpha_4 \\ 1 = -\alpha_4 \end{cases}$$

cuja solução é $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 1$ e $\alpha_4 = -1$. Consequentemente, a solução pretendida é

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & e^t \\ 0 & 0 & 0 & -e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}t^2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

II.

1.a) Como $(A_1(t)x' + A_0(t)x)' = A_1'(t)x' + A_1(t)x'' + A_0'(t)x + A_0(t)x' = A_1(t)x'' + (A_1'(t) + A_0(t))\,x' + A_0'(t)x$ conclui-se que $L[x] = a_2(t)x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x$ é igual a $(A_1(t)x' + A_0(t)x)'$ se e só se $a_2(t) = A_1(t)$, $a_1(t) = A_1'(t) + A_0(t)$ e $a_0(t) = A_0'(t)$.

b) Atendendo ao resultado da alínea anterior tem-se $a_1'(t) = A_1''(t) + A_0'(t) = a_2''(t) + a_0(t)$, ou seja $a_2''(t) - a_1'(t) + a_0(t) = 0$, como se pretendia.

2.a) Como se tem

$$\begin{aligned}\mu L[x] &= \mu\left(a_2(t)x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x\right)\\ &= \mu a_2(t)x'' + \mu a_1(t)x' + \mu a_0(t)x\\ &= \left(\mu a_2(t)\right)x'' + \left(\mu a_1(t)\right)x' + \left(\mu a_0(t)\right)x\end{aligned}$$

conclui-se, pela alínea anterior, que $\mu L[x] = 0$ é exacta se e só se $(a_2(t)\mu)'' - (a_1(t)\mu)' + (a_0(t)\mu) = 0$, ou seja $L^+[\mu] = 0$.

3.a)

$$\begin{aligned}&\text{A equação (66) é auto-adjunta} \Longleftrightarrow\\ \Longleftrightarrow\quad & L[x] = L^+[x]\\ \Longleftrightarrow\quad & a_2(t)x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = (a_2(t)x)'' - (a_1(t)x)' + a_0(t)x\\ \Longleftrightarrow\quad & a_2(t)x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = a_2(t)x'' + \left(2a_2'(t) - a_1(t)\right)x' + \left(a_2''(t) - a_1'(t) + a_0(t)\right)x\\ \Longleftrightarrow\quad & \begin{cases} a_1(t) = 2a_2'(t) - a_1(t)\\ a_0(t) = a_2''(t) - a_1'(t) + a_0(t)\end{cases}\\ \Longleftrightarrow\quad & a_2'(t) = a_1(t)\end{aligned}$$

e portanto

$$a_2(t)x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = a_2(t)x'' + a_2'(t)x' + a_0(t)x = \left(a_2(t)x'\right)' + a_0(t)x.$$

b) Suponha-se que $L[x] = 0$ não é auto-adjunta. Atendendo à alínea anterior, para que $\nu L[x] = 0$ seja auto-adjunta é necessário e suficiente que $(\nu a_2(t))' = \nu a_1(t)$, ou seja $\nu' a_2(t) + \nu a_2'(t) = \nu a_1(t)$. Mas isto significa que se tem de escolher ν como solução da equação diferencial ordinária $\nu' = \frac{a_1(t) - a_2'(t)}{a_2(t)}\nu$. Sendo $a_2(t) \neq 0$ conclui-se que esta equação, para quaisquer $a_1 \in \mathcal{C}^1$ e $a_2 \in \mathcal{C}^2$, tem solução dada por

$$\nu(t) = \nu(t_0)\exp\left[\int_{t_0}^{t} \frac{a_1(s) - a_2'(s)}{a_2(s)} ds\right],$$

onde t_0 e $\nu(t_0)$ são constantes reais arbitrárias.

Exame de 16.1.97 e resolução.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

(Aeroespacial, Ambiente, Mecânica)

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

Data: 16/1/1997 **Duração:** 1h30 + 1h30.

I.

Considere o sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 9 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{b}(t). \tag{67}$$

1. Seja $\mathbf{b}(t) \equiv \mathbf{0}$.
   a) Determine a solução geral de (67).
   b) Identifique um subespaço tridimensional de $\mathbb{R}^4$, L_3, que seja invariante para (67).
   c) Escreva o sistema que obtém por restrição de (67) a L_3. e esboce o seu retrato de fase.
2. Considere agora $\mathbf{b}(t) = (0, 1+t, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. Determine uma solução particular de (67) e escreva uma expressão para a solução geral.

II.

Sejam $a_j(t)$ funções reais de variável real tais que $a_j(\cdot) \in \mathcal{C}^j(\mathbb{R})$. Uma equação diferencial ordinária linear de ordem n,

$$a_n(t)x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_2(t)x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t), \tag{68}$$

diz-se exacta se e só se existirem funções reais de variável real $A_j(t)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, tais que

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=0}^{n-1} A_j x^{(j)}\right) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^{(j)}.$$

1.a) Mostre que (68) é exacta se e só se

$$\begin{aligned} a_0 &= A_0' \\ a_j &= A_j' + A_{j-1}, \quad 1 \le j \le n-1 \\ a_n &= A_{n-1} \end{aligned}$$

b) Conclua que (68) é exacta se e só se

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} a_j^{(j)} = 0.$$

2. Considere a equação diferencial

$$(1 + t + t^2)x''' + (3 + 6t)x'' + 6x' = \cos t \tag{69}$$

a) Mostre que (69) é exacta.

b) Utilizando o resultado da alínea anterior, primitive a equação (69) e mostre que a equação resultante é também exacta.

c) Repetindo o processo da alínea anterior, determine a solução geral de (69).

III.

Suponha que se deita água com um caudal de 1 metro cúbico por segundo para dentro de um cone de eixo vertical e com uma abertura de $\pi/2$. Designe por $h(t)$ a altura de água, em metros, no cone, no instante t. Suponha ainda que a água se escoa pelo vertice com um caudal proporcional à altura de água no cone, sendo $\alpha > 0$ a constante de proporcionalidade.

a) Sabendo que o volume de um cone é igual a um terço do produto da área da base pela altura, mostre que a equação diferencial para $h(t)$ é

$$h' = \frac{1 - \alpha h}{\pi h^2} \tag{70}$$

b) *Sem resolver a equação* determine a constante de escoamento α de modo a que a altura limite de água no cone, $h_\infty = \lim_{t\to+\infty} h(t)$, seja de 1 metro.

c) Determine uma expressão para a solução de (70) que satisfaz a condição inicial $h(t_0) = h_0$ metros.

IV.

Iremos considerar um modelo muito simplificado de uma descarga radioactiva num rio.
Considere-se um trecho de comprimento $L > 0$ de um rio e suponha-se que a velocidade média das águas é constante e igual a $c > 0$. O rio é representado matematicamente pelo intervalo $[0, L]$, sendo a foz localizada em $x = L$. Numa das margens, entre as posições $x = L/100$ e $x = L/50$, está implantada uma central nuclear. Considere-se que uma descarga acidental da central lança no rio um nucleótido radioactivo U com constante de decaimento $\lambda > 0$ e com constante de difusão na água $\mathcal{D} > 0$.
Sendo $u(x, t)$ a concentração de U no instante t e posição no rio x, a equação que modela a dispersão de U é a seguinte equação de difusão-convexão-reacção

$$u_t = \mathcal{D}u_{xx} - cu_x - \lambda u, \qquad (x, t) \in]0, L[\times\mathbb{R}^+ \tag{71}$$

com condição de Dirichlet homogénea na fronteira.

1.a) Sejam α e β duas constantes reais e considere a função $v(x, t) \overset{\text{def}}{=} e^{\alpha x+\beta t}u(x, t)$. Mostre que $u(x, t)$ é solução de (71) se e só se $v(x, t)$ fôr solução da equação

$$v_t = \mathcal{D}v_{xx} - (c + 2\alpha\mathcal{D})v_x + (\beta + \mathcal{D}\alpha^2 + c\alpha - \lambda)v.$$

b) Determine α e β de modo a que a equação para v seja $v_t = \mathcal{D}v_{xx}$ e identifique a condição na fronteira correspondente.

c) Determine a solução geral formal do problema da alínea anterior.

2. No instante $t = 0$ a descarga da central provoca o aparecimento do nucleótido U no rio com concentração $u(x, 0) = u_0\chi_{[L/100,L/50]}(x)$, onde $u_0 > 0$ é uma constante e $\chi_A(x)$ é a função característica do conjunto A.

a) Determine a condição inicial $v(x, 0)$ para o problema da alínea 1.b).

b) Determine a solução formal do problema da alínea 1.b) correspondente à condição inicial que obteve na alínea anterior.

c) Obtenha a solução formal do problema para $u(x, t)$ originalmente colocado.

Resolução:

I.

1.a) Observando que a matriz do sistema é diagonal por blocos podemos escrever a solução geral de (67) na forma

$$\mathbf{x}(t) = \operatorname{diag}\left(e^{A_1 t}, e^{A_2 t}\right)\mathbf{x}(0),$$

onde $A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ e $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 9 & -2 \end{bmatrix}$. Observando que $A_2 = -2I_2 + N_2$ e atendendo a que $I_2N_2 = N_2I_2$ conclui-se que

$$e^{A_1 t} = e^{-2I_2 t}e^{N_2 t} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Quanto à matriz A_2 os seus valores próprios são os zeros de $p(\lambda) = \det(A_2 - \lambda I_2) = (1 - \lambda)(-2-\lambda) + 9/2 = \lambda^2 + \lambda + 5/2$, os quais são $\lambda_+ = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ e $\lambda_- = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$. Recorrendo ao método de Putzer sabe-se que

$$e^{A_2 t} = r_1(t)P_0(A_2) + r_2(t)P_1(A_2)$$

onde as matrizes $P_j(A_2)$ são dadas por $P_0(A_2) = I_2$ e $P_1(A_2) = A_2 - \lambda_+ I_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i & -\frac{1}{2} \\ 9 & -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i \end{bmatrix}$ e $(r_1(t), r_2(t))$ é a solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} r_1' = \lambda_+ r_1, & r_1(0) = 1 \\ r_2' = \lambda_- r_2 + r_1, & r_2(0) = 0. \end{cases}$$

A solução da primeira equação deste sistema obtem-se sem dificuldade e é

$$r_1(t) = e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)t}.$$

A segunda equação é facilmente resolvida multiplicando a equação por um factor integrante. O resultado final é

$$r_2(t) = \frac{1}{3i}\left(e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)t} - e^{\left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right)t}\right).$$

Atendendo a isto tem-se

$$\begin{aligned} e^{A_2 t} &= e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)t}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3i}\left(e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)t} - e^{\left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right)t}\right)\begin{bmatrix} \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i & -\frac{1}{2} \\ 9 & -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i \end{bmatrix} \\ &= e^{-t/2}\begin{bmatrix} \cos(3t/2) + \sin(3t/2) & -\frac{1}{3}\sin(3t/2) \\ 6\sin(3t/2) & \cos(3t/2) - \sin(3t/2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e portanto a solução geral de (67) é

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t/2}(\cos(3t/2)+\sin(3t/2)) & -\frac{1}{3}e^{-t/2}\sin(3t/2) \\ 0 & 0 & 6e^{-t/2}\sin(3t/2) & e^{-t/2}(\cos(3t/2)-\sin(3t/2)) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{bmatrix}$$

onde a condição inicial $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0))^{\mathrm{T}}$ é arbitrária.

b) Recorrendo ao resultado da alínea anterior observa-se facilmente que $x_2(0)=0 \Rightarrow x_2(t)=0$ para todo o $t\in\mathbb{R}$. Consequentemente um subespaço tridimensional invariante para a equação dada será

$$L_3=\left\{\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^4 : x_2=0\right\}.$$

c) Com o subespaço L_3 determinado na alínea anterior identificado com $\mathbb{R}^3$ pela correpondência

$$L_3 \ni (x_1,0,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=\mathbf{x}\longleftrightarrow \mathbf{y}=(x_1,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^3,$$

pode-se escrever a restrição de (67) a L_3 do seguinte modo

$$\mathbf{y}'=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 9 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{y}.$$

Observe-se que os valores próprios da matriz deste sistema são $\lambda_1=-2$, $\lambda_\pm=-\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}i$ e da estrutura da matriz conclui-se ainda que o subespaço $E_1=\left\{\mathbf{y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^3 : y_2=y_3=0\right\}$ é invariante e o subespaço $L_2=\left\{\mathbf{y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^3 : y_1=0\right\}$ é também invariante. Observando que $L_3=E_1\oplus L_2$ e tendo em conta os retratos de fase das restrições a E_1 e a L_2 pode-se traçar o retrato de fase pretendido. Vejamos: E_1 é o espaço próprio correspondente a $\lambda_1=-2$ e portanto o retrato de fase da restrição do sistema a E_1 é o apresentado na Figura 51.

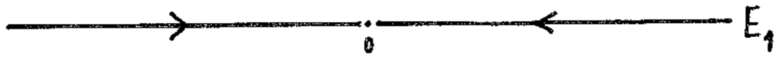


Figura 51: Retrato de fase da restrição do sistema (67) a E_1.

Observando que um vector próprio $\mathbf{v}$ correspondente ao valor próprio complexo λ_+ é

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}-\frac{3}{2}i & -\frac{1}{2} \\ 0 & 9 & -\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} v_1=0 \\ v_2 \text{ qualquer} \\ v_3=(1-3i)v_2 \end{array}\right.\Leftrightarrow \mathbf{v}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1-3i \end{bmatrix}\alpha,$$

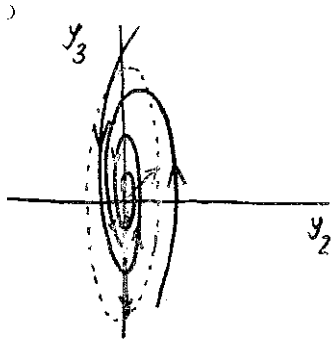


Figura 52: Retrato de fase da restrição do sistema (67) a L_2.

onde α é uma constante complexa arbitrária. Daqui conclui-se que o retrato de fase da restrição a L_2 tem o aspecto apresentado na Figura 52.

e portanto o retrato de fase da restrição do sistema dado ao subespaço invariante L_3 é o esboçado na Figura 53.

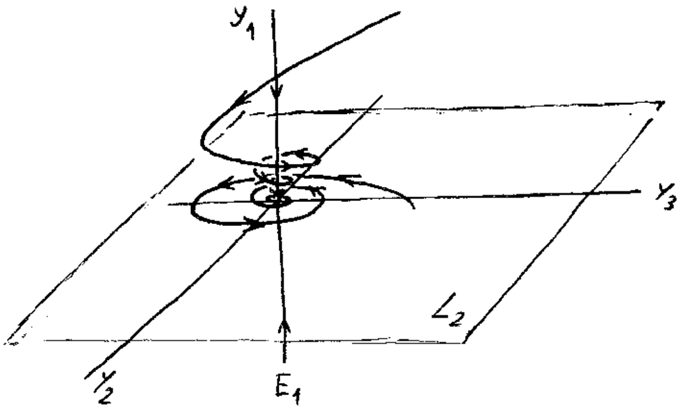


Figura 53: Retrato de fase da restrição do sistema (67) a L_3.

2.a) Atendendo a que o termo não-homogéneo de (67) é $\mathbf{b}(t) = (0, 1+t, 0, 0)^{\mathrm{T}} = (0, 1+t, 0, 0)^{\mathrm{T}} e^{0t}$ e como $\mu = 0$ não é valor próprio da matriz do sistema, conclui-se que uma solução particular de (67) é do tipo

$$\mathbf{x}_{\text{part}}(t) = \begin{bmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \\ a_3 t + b_3 \\ a_4 t + b_4 \end{bmatrix}$$

o que substituindo na equação (67) fornece

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2a_1 + a_2)t + (-2b_1 + b_2) \\ -2a_2 t - 2b_2 \\ (a_3 - \frac{1}{2}a_4)t + (b_3 - \frac{1}{2}b_4) \\ (9a_3 - 2a_4)t + (9b_3 - 2b_4) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1+t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

concluindo-se que $a_1 = 1/4, a_2 = 1/2, b_2 = 1/4$ e $a_3 = a_4 = b_1 = b_3 = b_4 = 0$. Consequentemente, uma solução particular é

$$\mathbf{x}_{\text{part}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}t \\ \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e a solução geral pode ser dada por

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(3t/2) + \sin(3t/2) & -\frac{1}{3}\sin(3t/2) \\ 0 & 0 & 6\sin(3t/2) & \cos(3t/2) - \sin(3t/2) \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4}t \\ \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^4$ é um vector constante arbitrário.

II.

1.a) Atendendo a que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n} a_j x^{(j)} &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=0}^{n-1} A_j x^{(j)}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} A_j' x^{(j)} + \sum_{j=0}^{n-1} A_j x^{(j+1)} \\ &= A_0' x + \sum_{j=1}^{n-1} \left(A_j' + A_{j-1}\right) x^{(j)} + A_{n-1} x^{(n)} \end{aligned}$$

conclui-se que $a_0 = A_0'$, $a_n = A_{n-1}$ e $a_j = A_j' + A_{j-1}$ para $j = 1, \ldots, n-1$.

b) Atendendo ao resultado da alínea anterior

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}a_j^{(j)} = \\
&= (-1)^n a_0 + a_n^{(n)} + \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{n-j}a_j^{(j)} \\
&= (-1)^n A_0' + A_{n-1}^{(n)} + \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{n-j}A_j^{(j+1)} + \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{n-j}A_{j-1}^{(j)} \\
&= (-1)^n A_0' + A_{n-1}^{(n)} - \sum_{j=2}^{n-1}(-1)^{n-j}A_{j-1}^{(j)} - A_{n-1}^{(n)} + \sum_{j=2}^{n-1}(-1)^{n-j}A_{j-1}^{(j)} + (-1)^{n-1}A_0' \\
&= 0.
\end{aligned}$$

2.a) Para mostrar que a equação (69) é exacta basta aplicar o resultado da alínea anterior que, no presente caso em que $n = 3$, $a_3(t) = 1 + t + t^2$, $a_2(t) = 3 + 6t$, $a_1(t) \equiv 6$ e $a_0(t) \equiv 0$, resulta em

$$\sum_{j=0}^{3}(-1)^{3-j}a_j^{(j)} = -a_0 + a_1' - a_2'' + a_3''' = -0 + 0 - 0 + 0 = 0,$$

concluindo-se o pretendido.

b) Pelos resultados das alíneas 1a) e 2a) tem-se

$$\begin{aligned}
0 &= A_0' \\
6 &= A_1' + A_0 \\
3 + 6t &= A_2' + A_1 \\
1 + t + t^2 &= A_2
\end{aligned}$$

e portanto $A_2(t) = 1 + t + t^2$, $A_1(t) = 3 + 6t - A_2'(t) = 3 + 6t - 1 - 2t = 2 + 4t$, $A_0(t) = 6 - A_1'(t) = 6 - 4 = 2$. Conclui-se assim que a equação (69) pode ser escrita na forma

$$\frac{d}{dt}\big((1 + t + t^2)x'' + (2 + 4t)x' + 2x\big) = \cos t$$

e primitivando ambos os membros obtém-se

$$(1 + t + t^2)x'' + (2 + 4t)x' + 2x = \sin t + C_1,$$

onde C_1 é uma constante real arbitrária.

Para mostrar que esta equação também é exacta basta novamente aplicar o resultado da alínea 1b), agora com $n = 2$, $a_2(t) = 1 + t + t^2$, $a_1(t) = 2 + 4t$ e $a_0(t) = 2$. Tem-se, neste caso,

$$\sum_{j=0}^{2}(-1)^{2-j}a_j^{(j)} = a_0 - a_1' + a_2'' = 2 - 4 + 2 = 0,$$

e portanto a equação é exacta.

c) Atendendo ao resultado final da alínea anterior tem-se que existem funções $A_0(t)$ e $A_1(t)$ tais que

$$\begin{aligned} 2 &= A_0' \\ 2+4t &= A_1' + A_0 \\ 1+t+t^2 &= A_1 \end{aligned}$$

e portanto $A_1(t) = 1+t+t^2$, $A_0(t) = 2+4t-1-2t = 1+2t$. A equação pode agora escrever-se na forma

$$\frac{d}{dt}\big((1+t+t^2)x' + (1+2t)x\big) = \sin t + C_1$$

e primitivando mais uma vez ambos os membros tem-se

$$(1+t+t^2)x' + (1+2t)x = -\cos t + C_1 t + C_2,$$

onde C_2 é uma constante real arbitrária. Como $1+t+t^2 > 0$ para todo o $t \in \mathbb{R}$, a equação pode ser escrita na forma

$$x' = -\frac{1+2t}{1+t+t^2}x + \frac{C_1 t + C_2 - \cos t}{1+t+t^2},$$

reconhecendo-se imediatamente que estamos perante uma equação linear não-homogénea de primeira ordem, cuja solução geral pode ser facilmente obtida observando que um factor integrante para a equação é

$$\mu_h(t) = e^{\int \frac{1+2t}{1+t+t^2}dt} = e^{\log\left|1+t+t^2\right|} = \left|1+t+t^2\right| = 1+t+t^2$$

e portanto, primitivando, temos

$$\begin{aligned} (1+t+t^2)x(t) &= \int (1+t+t^2)\frac{C_1 t + C_2 - \cos t}{1+t+t^2}dt \\ &= \int (C_1 t + C_2 - \cos t)dt \\ &= \frac{1}{2}C_1 t^2 + C_2 t + C_3 - \sin t \end{aligned}$$

onde C_3 é uma constante real arbitrária. Assim, a solução geral pretendida é

$$x(t) = \frac{\frac{1}{2}C_1 t^2 + C_2 t + C_3 - \sin t}{1+t+t^2}.$$

III.

a) Seja V o volume de água contida no cone. Atendendo ao enunciado tem-se que a taxa de variação de V é $\frac{dV}{dt} = 1 - \alpha h$. Para um cone com as características dadas o raio da "base" e a altura da água são iguais e portanto $V = \frac{1}{3}\pi h^3$. Consequentemente $\frac{dV}{dt} = \pi h^2 h'$ e portanto a equação diferencial que h satisfaz é $\pi h^2 h' = 1 - \alpha h$, a qual pode ser imediatamente escrita na forma (70), supondo $h > 0$.

Figura 54: Retrato de fase da equação (70).

b) Atendendo a que a função $h \mapsto \frac{1-\alpha h}{\pi h^2}$, com $h > 0$, é positiva se $1-\alpha h > 0$, negativa se $1-\alpha h < 0$ e nula para $1 - \alpha h = 0$, a equação (70) tem o retrato de fase da Figura 54.

e portanto $h_\infty = 1/\alpha$, pelo que se se pretender $h_\infty = 1$ há que fazer $\alpha = 1$.

c) Atendendo a que a equação (70) é separável, tem-se

$$\begin{cases} \dfrac{\pi h^2}{1-\alpha h}\dfrac{dh}{dt} = 1 \\ \\ h(t_0) = h_0 \end{cases} \Longleftrightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{\pi h(s)^2}{1-\alpha h(s)}\frac{dh(s)}{ds}ds = \int_{t_0}^{t} ds \Longleftrightarrow \int_{h_0}^{h(t)} \frac{\pi h^2}{1-\alpha h}dh = t - t_0.$$

Para integrar o membro esquerdo simplifique-se primeiro a função racional. Efectuando a divisão dos polinómios tem-se

$$\frac{\pi h^2}{1-\alpha h} = -\frac{\pi}{\alpha}h - \frac{\pi}{\alpha^2} + \frac{\pi}{\alpha^2}\frac{1}{1-\alpha h}$$

e portanto a solução geral é

$$\alpha^2 h^2(t) + 2\alpha h(t) + 2\log|1-\alpha h(t)| = \left(\alpha^2 h_2^2 + 2\alpha h_0 + 2\log|1-\alpha h_0|\right) - \frac{2\alpha^3}{\pi}(t - t_0).$$

IV.

1.a) Sendo $v(x,t) = e^{\alpha x + \beta t}u(x,t)$ tem-se $u(x,t) = e^{-\alpha x - \beta t}v(x,t)$ e portanto

$$\begin{aligned} u_t &= -\beta e^{-\alpha x - \beta t}v + e^{-\alpha x - \beta t}v_t \\ u_x &= -\alpha e^{-\alpha x - \beta t}v + e^{-\alpha x - \beta t}v_x \\ u_{xx} &= \alpha^2 e^{-\alpha x - \beta t}v - 2\alpha e^{-\alpha x - \beta t}v_x + e^{-\alpha x - \beta t}v_{xx} \end{aligned}$$

concluindo-se que a equação (71) é equivalente a

$$\begin{aligned} (-\beta v + v_t)e^{-\alpha x - \beta t} &= \mathcal{D}e^{-\alpha x - \beta t}\left(\alpha^2 v - 2\alpha v_x + v_{xx}\right) - \\ &\quad -ce^{-\alpha x - \beta t}(-\alpha v + v_x) - \\ &\quad -\lambda e^{-\alpha x - \beta t}v, \end{aligned}$$

ou seja, dividindo ambos os membros por $e^{-\alpha x - \beta t}$,

$$-\beta v + v_t = \mathcal{D}\alpha^2 v - 2\alpha\mathcal{D}v_x + \mathcal{D}v_{xx} + \alpha cv - cv_x - \lambda v.$$

Rearranjando os termos desta equação tem-se

$$v_t = \mathcal{D}v_{xx} - (c + 2\alpha\mathcal{D})v_x + (\beta + \mathcal{D}\alpha^2 + \alpha c - \lambda)v,$$

como se pretendia.

b) Há que escolher α e β de modo a que

$$\begin{cases} c + 2\alpha\mathcal{D} = 0 \\ \beta + \mathcal{D}\alpha^2 + \alpha c - \lambda = 0 \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{cases} \alpha = -\dfrac{c}{2\mathcal{D}} \\ \\ \beta = \lambda + \dfrac{c^2}{4\mathcal{D}}. \end{cases}$$

Atendendo a que a condição na fronteira para u é de Dirichlet homogénea, a condição na fronteira para v é do mesmo tipo:

$$\hat{x} \in \{0, L\} \Longrightarrow v(\hat{x}, t) = e^{\alpha\hat{x}+\beta t}u(\hat{x}, t) = 0.$$

c) Tendo agora o problema

$$\begin{cases} v_t = \mathcal{D}v_{xx}, & (x,t) \in]0, L[\times\mathbb{R}^+ \\ v(0,t) = v(L,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

iremos recorrer ao método de separação de variáveis. Fazendo $v(x,t) = X(x)T(t)$ vem $v_t = XT'$ e $v_{xx} = X''T$ pelo que a equação diferencial vem $XT' = \mathcal{D}X''T$, ou seja, supondo que $v = XT$ não se anula em $]0, L[\times\mathbb{R}^+$,

$$\frac{1}{\mathcal{D}}\frac{T'}{T}(t) = \frac{X''}{X}(x), \qquad (x,t) \in]0, L[\times\mathbb{R}^+$$

e portanto terá de existir uma constante real σ, independente de t e de x, tal que

$$\frac{1}{\mathcal{D}}\frac{T'}{T}(t) = \sigma = \frac{X''}{X}(x), \qquad (x,t) \in]0, L[\times\mathbb{R}^+$$

o que resulta no seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{array}{l} X'' - \sigma X = 0 \\ T' - \sigma\mathcal{D}T = 0. \end{array}$$

As condições na fronteira para $v(x,t)$ fornecem o seguinte

$$\begin{array}{lcl} 0 = v(0,t) = X(0)T(t) & \Longrightarrow & X(0) = 0 \\ 0 = v(L,t) = X(L)T(t) & \Longrightarrow & X(L) = 0 \end{array}$$

uma vez que $T(t) \neq 0$ em $\mathbb{R}^+$. Obtemos assim o seguinte problema de valores na fronteira para X :

$$\begin{cases} X'' - \sigma X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

Estudaremos de seguida a possibilidade de obtenção de soluções *não-triviais* (não identicamente nulas) deste problema:

- Considere-se $\sigma = 0$. A equação diferencial fica reduzida a $X'' = 0$ cujas soluções são $X(x) = ax + b$ e atendendo às condições na fronteira $0 = X(0) = b$ e $0 = X(L) = aL + b$ conclui-se imediatamente que $a = b = 0$ e portanto a única solução do problema é a solução trivial $X(x) \equiv 0$.
- Seja agora $\sigma > 0$. A solução geral da equação é $X(x) = ae^{\sqrt{\sigma}x} + be^{-\sqrt{\sigma}x}$. Atendendo às condições na fronteira tem-se $0 = X(0) = a + b$ e $0 = X(L) = ae^{\sqrt{\sigma}L} + be^{-\sqrt{\sigma}L}$ cuja única solução é $a = b = 0$ fornecendo como única solução da equação a função identicamente nula $X(x) \equiv 0$.
- Finalmente tome-se $\sigma < 0$. A solução geral real da equação diferencial é agora $X(x) = a\cos\sqrt{|\sigma|}x + b\sin\sqrt{|\sigma|}x$. Atendendo às condições na fronteira tem-se $0 = X(0) = a\cos 0 + b\sin 0 = a$ e portanto $0 = X(L) = 0\cos\sqrt{|\sigma|}L + b\sin\sqrt{|\sigma|}L = b\sin\sqrt{|\sigma|}L$ concluindo-se que, ou $b = 0$ e obtemos a solução $X(x) \equiv 0$, ou $\sin\sqrt{|\sigma|}L = 0$, isto é, $\sqrt{|\sigma|} = \sqrt{|\sigma_k|} = \frac{k\pi}{L}, k \in \mathbb{N}_1$, obtendo-se assim infinitas soluções do problema de valores na fronteira, em particular as funções $X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad \forall k \in \mathbb{N}_1$, e todas as combinações lineares de um número finito destas funções.

Atendendo a que $\sigma = \sigma_k = -\frac{k^2\pi^2}{L^2}$ a equação para $T(t)$ pode-se escrever como

$$T' + \frac{k^2\pi^2\mathcal{D}}{L^2}T = 0,$$

para a qual uma base do espaço das soluções é constituida pela função

$$T_k(t) = \exp\left[-\frac{k^2\pi^2\mathcal{D}t}{L^2}\right].$$

Assim, a solução formal geral do problema dado é

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) e^{-k^2\pi^2L^{-2}\mathcal{D}t}.$$

2.a) A condição inicial para v será

$$v(x,0) = e^{\alpha x}u(x,0) = u_0 e^{\alpha x}\chi_{[L/100,L/50]}(x) = \begin{cases} u_0 e^{\alpha x}, & \text{se } x \in [L/100, L/50] \\ \\ 0, & \text{se } x \in [0,L] \setminus [L/100, L/50] \end{cases}$$

b) Atendendo à solução geral formal obtida na alínea 1c) tem-se

$$v(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \tag{72}$$

pelo que os coeficientes b_k terão de ser escolhidos de modo a que a série no membro direito de (72) seja a série de Fourier de senos, de período $2L$, da função $v(x,0)$ dada na alínea anterior. Atendendo a isto há que prolongar $v(x,0)$ a $\mathbb{R}$ como uma função ímpar de período $2L$ (Figura 55).

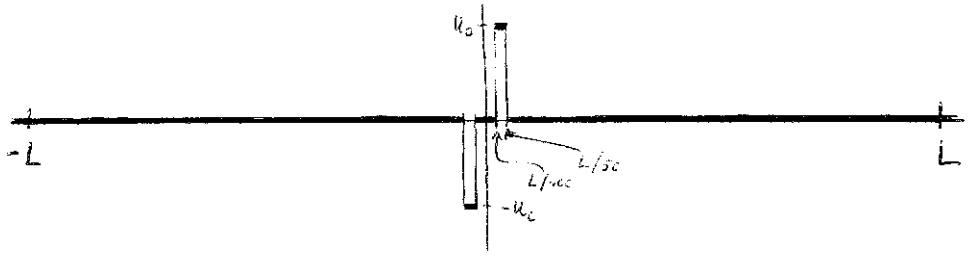


Figura 55: Prolongamento de $v(x,0)$ a $\mathbb{R}$ como função ímpar de período $2L$.

Assim tem-se

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{L}\int_0^L v(x,0)\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx \\ &= \frac{2}{L}\int_{L/100}^{L/50} u_0 e^{\alpha x}\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx \\ &\quad \text{(integrando por partes duas vezes)} \\ &= \frac{2k\pi u_0}{k^2\pi^2 + L^2\alpha^2}\left[e^{\alpha L/50}\left(\frac{\alpha L}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{50} - \cos\frac{k\pi}{50}\right) - e^{\alpha L/100}\left(\frac{\alpha L}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{100} - \cos\frac{k\pi}{100}\right)\right] \end{aligned}$$

e a solução formal pretendida é

$$\begin{aligned} &v(x,t) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k\pi u_0}{k^2\pi^2 + L^2\alpha^2}\left[e^{\alpha L/50}\left(\frac{\alpha L}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{50} - \cos\frac{k\pi}{50}\right) - e^{\alpha L/100}\left(\frac{\alpha L}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{100} - \cos\frac{k\pi}{100}\right)\right]\cdot \\ &\qquad \cdot \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)e^{-k^2\pi^2 L^{-2}\mathcal{D}t}. \end{aligned}$$

c) A solução formal do problema original será simplesmente o produto da solução $v(x,t)$ indicada acima por

$$\exp\left[-\frac{c}{2\mathcal{D}}x + \left(\lambda + \frac{c^2}{4\mathcal{D}}\right)t\right].$$

Exame de 22.2.97 e resolução.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

(Aeroespacial, Ambiente, Mecânica)

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

Data: 22/2/1997
Duração: 3h00.

I.

Considere o seguinte sistema de equações diferenciais lineares

$$\begin{cases} x_1' &= & -x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2' &= & -x_2 + x_3 \\ x_3' &= & -x_3 + x_4 \\ x_4' &= & x_4 \end{cases} \tag{73}$$

Considere o subespaço de $\mathbb{R}^4$ definido por $L_3 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4 : x_4 = 0\right\}$.

1.a) Mostre que L_3 é invariante para (73).

b) Escreva a restrição de (73) a L_3 na forma vectorial

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \tag{74}$$

identificando explicitamente os vectores $\mathbf{y}$ e $\mathbf{b}(t)$ e a matriz A.

c) Determine a solução geral do sistema obtido na alínea anterior[a].

2.a) Justifique que a projecção de (73) em L_3 é dada por (74) com $\mathbf{b}(t) = \left(0, 0, c_4 e^t\right)^{\mathrm{T}}$, onde c_4 é uma constante real arbitrária.

b) Determine a solução geral do sistema obtido na alínea anterior e use o resultado para escrever uma expressão para a solução geral de (73).

II.

Considere a equação diferencial ordinária

$$x^{(iv)} - x''' + x'' - x' = h(t). \tag{75}$$

1. Seja $h(t) \equiv 0$.

a) Determine a solução geral real de (75).

b) Determine a solução de (75) que satisfaz a condição inicial $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $x''(0) = 2$, $x'''(0) = 3$.

2. Seja agora $h(t) = \sqrt{2}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$. Determine uma solução particular de (75) e escreva uma expressão para a solução geral da equação.

---

[a] Se não resolveu a alínea anterior tome $\mathbf{y} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b}(t) = \mathbf{0}$, e $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

III.

Considere um sistema ecológico constituido por uma população $P = P(t)$ de predadores e por uma população $N = N(t)$ de presas. Um modelo simples para a evolução destas populações ao longo do tempo t foi proposto por Vito Volterra em 1926 no âmbito de estudos sobre as variações das capturas piscículas no mar Adriático. As equações diferenciais, actualmente designadas por equações de Lotka–Volterra, são as seguintes

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} & = & \alpha N - \beta NP \\ \\ \dfrac{dP}{dt} & = & -\gamma P + \delta NP \end{cases} \tag{76}$$

onde α, β, γ e δ são constantes positivas. Observe-se que, sendo $N(t)$ e $P(t)$ populações, estamos interessados em soluções não-negativas, i.e., nos casos em que $(N, P) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$.

1.a) Identifique o espaço de fases de (76) e mostre que o primeiro quadrante, $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$, é invariante para (76).

b) Determine os pontos de equilíbrio de (76), estude em que casos é que o método de linearização é aplicável e nos casos em que fôr esboce o retrato de fases do sistema linearizado.

c) Determine as regiões de $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$ onde $P(t)$ e $N(t)$ são crescentes [decrescentes].

2.a) Obtenha, a partir de (76), a seguinte equação diferencial para P considerado como função de N,

$$\frac{dP}{dN} = \frac{(\delta N - \gamma)P}{(\alpha - \beta P)N} \tag{77}$$

esclarecendo a região de $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$ onde esta equação é válida.

b) Mostre que as soluções de (77) em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ são dadas implicitamente por $(\delta N - \gamma \log N) + (\beta P - \alpha \log P) = \text{constante}$

c) Use a expressão obtida na alínea anterior para mostrar que as soluções de (77) em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ são limitadas e estão definidas em intervalos limitados.
(Sugestão: argumente por redução ao absurdo.)

3. Conjugando os resultados obtidos nas alíneas anteriores, esboce o retrato de fase do sistema.

IV.

Considere a função $f(x)$ definida em $[0, 1]$ por $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \chi_{[1/2,1]}(x)$, onde $\chi_A(x)$ é a função característica do conjunto A. Determine uma série de Fourier de senos para a função f de modo a que a série seja *uniformemente* convergente em $\mathbb{R}$ e esboce o gráfico da soma da série. Justifique *detalhadamente.*

Resolução:

I.

1.a) $\mathbf{x}(0) \in L_3 \Longrightarrow x_4(0) = 0 \Longrightarrow x_4(t) = x_4(0)e^t = 0 \Longrightarrow \mathbf{x}(t) \in L_3,\ \forall t.$

b) Se $\mathbf{x} \in L_3$ então

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2' = -x_2 + x_3 \\ x_3' = -x_3 \\ x_4' = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

e portanto, identificando

$$\mathbb{R}^4 \supset L_3 \ni (x_1, x_2, x_3, 0)^{\mathrm{T}} \mapsto (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$$

e designando este último vector por $\mathbf{y}$, vem

$$\mathbf{y}' = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{=:A} \mathbf{y}$$

que é do tipo (74) com $\mathbf{b}(t) = \mathbf{0}$.

c) Sendo a matriz A triangular superior, a solução do sistema pode ser obtida resolvendo sucessivamente as diferentes equações, começando com a última:

$$\begin{aligned}
x_3' = -x_3 \quad &\Leftrightarrow \quad x_3(t) = c_3 e^{-t} \\
x_2' = -x_2 + x_3 \quad &\Leftrightarrow \quad x_2' = -x_2 + c_3 e^{-t} \\
&\Leftrightarrow \quad x_2' + x_2 = c_3 e^{-t} \\
& \quad \text{(multiplicando pelo factor integrante } \mu(t) = e^t) \\
&\Leftrightarrow \quad \left(e^t x_2\right)' = c_3 \\
&\Leftrightarrow \quad e^t x_2(t) = c_3 t + c_2 \\
&\Leftrightarrow \quad x_2(t) = c_2 e^{-t} + c_3 t e^{-t} \\
x_1' = -x_1 + x_2 - x_3 \quad &\Leftrightarrow \quad x_1' = -x_1 + c_3 t e^{-t} + (c_2 - c_3) e^{-t} \\
&\Leftrightarrow \quad x_1' + x_1 = c_3 t e^{-t} + (c_2 - c_3) e^{-t} \\
& \quad \text{(multiplicando pelo factor integrante } \mu(t) = e^t) \\
&\Leftrightarrow \quad \left(e^t x_1\right)' = c_3 t + (c_2 - c_3) \\
&\Leftrightarrow \quad e^t x_1(t) = \frac{1}{2} c_3 t^2 + (c_2 - c_3) t + c_1 \\
&\Leftrightarrow \quad x_1(t) = c_1 e^{-t} + (c_2 - c_3) t e^{-t} + \frac{1}{2} c_3 t^2 e^{-t}
\end{aligned}$$

e portanto a solução geral é

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_1e^{-t} + (c_2 - c_3)te^{-t} + \frac{1}{2}c_3t^2e^{-t} \\ c_2e^{-t} + c_3te^{-t} \\ c_3e^{-t} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & -te^{-t} + \frac{1}{2}t^2e^{-t} \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

onde c_1, c_2 e c_3 são constantes reais arbitrárias.

2.a) Atendendo a que a solução geral de $x_4' = x_4$ é $x_4(t) = c_4e^t$ tem-se

$$\begin{cases} x_1' &= -x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2' &= -x_2 + x_3 \\ x_3' &= -x_3 + c_4e^t \end{cases}$$

e portanto $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + (0, 0, c_4e^t)^{\mathrm{T}}$ como se pretendia.

b) Como conhecemos a solução geral do sistema homogéneo (alínea 1c)), basta determinar uma solução particular do sistema não-homogéneo. O método dos palpites indica-nos que uma solução particular será do tipo $\mathbf{x}_{\text{part}}(t) = \mathbf{q}_0(t)e^t$ onde $\mathbf{q}_0(t)$ é um polinómio vectorial de grau zero: $\mathbf{q}_0(t) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{\mathrm{T}}$. Então

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \mathbf{x}'_{\text{part}} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{part}} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_4e^t \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \\ 2\alpha_2 - \alpha_3 \\ 2\alpha_3 - c_4 \end{bmatrix} e^t
\end{aligned}$$

pelo que se tem $\alpha_3 = c_4/2$, $\alpha_2 = c_4/4$ e $\alpha_1 = -c_1/8$. portanto, a solução geral da equação da alínea anterior é

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & -te^{-t} + \frac{1}{2}t^2e^{-t} \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -c_4/8 \\ c_4/4 \\ c_4/2 \end{bmatrix} e^t.$$

É claro que a solução geral de (73) pode ser obtida a partir da sua projecção em L_3 (que acabámos de determinar) e da expressão $x_4(t) = c_4e^t$ (com a mesma constante c_4 que surge na projecção.) Assim, tem-se a solução geral

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & -te^{-t} + \frac{1}{2}t2e^{-t} & -\frac{1}{8}e^t \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} & \frac{1}{4}e^t \\ 0 & 0 & e^{-t} & \frac{1}{2}e^t \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}.$$

II.

1.a) Atendendo a que

$$x^{(iv)} - x''' + x'' - x' = 0 \Longleftrightarrow \left(D^4 - D^3 + D^2 - D\right) x = 0 \Longleftrightarrow D\,(D-1)\left(D^2+1\right) x = 0,$$

conclui-se que a solução geral complexa da equação será

$$x_C = \alpha_1 + \alpha_2 e^t + \alpha_3 e^{it} + \alpha_4 e^{-it},$$

com $\alpha_1, \ldots, \alpha_4 \in \mathbb{C}$ arbitrários. Utilizando as fórmulas de Euler e sendo $\alpha_{kR} = \mathrm{Re}(\alpha_k)$, $\alpha_{kI} = \mathrm{Im}(\alpha_k)$, tem-se

$$\begin{aligned} x_C &= \left[\alpha_{1R} + \alpha_{2R} e^t + (\alpha_{3R} + \alpha_{4R}) \cos t - (\alpha_{3I} - \alpha_{4I}) \sin t\right] + \\ &\quad + i\left[\alpha_{1I} + \alpha_{2I} e^t + (\alpha_{3I} + \alpha_{4I}) \cos t - (\alpha_{3R} - \alpha_{4R}) \sin t\right] \\ &= x_R(t) + i x_I(t), \end{aligned}$$

onde a última igualdade define as funções reais $x_R(t)$ e $x_I(t)$. Daqui conclui-se que a solução geral real de (75) pode ser dada por

$$x(t) = a_1 + a_2 e^t + a_3 \cos t + a_4 \sin t,$$

onde $a_1, \ldots, a_4$ são constantes reais arbitrárias.

b) Observando que

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1 + a_2 e^t + a_3 \cos t + a_4 \sin t \\ x'(t) &= a_2 e^t - a_3 \sin t + a_4 \cos t \\ x''(t) &= a_2 e^t - a_3 \cos t - a_4 \sin t \\ x'''(t) &= a_2 e^t + a_3 \sin t - a_4 \cos t \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_2 + a_4 = 1 \\ a_2 - a_3 = 2 \\ a_2 - a_4 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -2 \\ a_2 = 2 \\ a_3 = 0 \\ a_4 = -1 \end{cases}$$

concluindo-se que a solução pedida é

$$x(t) = -2 + 2e^t - \sin t.$$

c) Sendo $h(t) = \sqrt{2} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos t \cos \frac{\pi}{4} + \sin t \sin \frac{\pi}{4}\right) = \cos t + \sin t$ e observando que esta função é solução da equação homogénea, o método dos palpites permite escrever uma solução particular na forma

$$x_{\text{part}}(t) = (\alpha_1 + \alpha_2 t) \cos t + (\alpha_3 + \alpha_4 t) \sin t$$

donde se tem

$$\begin{aligned}
x'_{\text{part}}(t) &= -(\alpha_1 - \alpha_4 + \alpha_2 t)\sin t + (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 t)\cos t \\
x''_{\text{part}}(t) &= (2\alpha_4 - \alpha_1 - \alpha_2 t)\cos t - (2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 t)\sin t \\
x'''_{\text{part}}(t) &= -(3\alpha_4 - \alpha_1 - \alpha_2 t)\sin t - (3\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 t)\cos t \\
x^{(iv)}_{\text{part}}(t) &= -(4\alpha_4 - \alpha_1 - \alpha_2 t)\cos t + (4\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 t)\sin t
\end{aligned}$$

e portanto tem-se

$$\begin{aligned}
&[-(4\alpha_4 - \alpha_1 - \alpha_2 t) + (3\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 t) + (2\alpha_4 - \alpha_1 - \alpha_2 t) - (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 t)]\cos t + \\
&\quad + [(4\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 t) + (3\alpha_4 - \alpha_1 - \alpha_2 t) - (2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 t) + (\alpha_1 - \alpha_4 + \alpha_2 t)]\sin t = \\
&\qquad = \cos t + \sin t
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{cases} -2\alpha_4 + 2\alpha_2 = 1 \\ 2\alpha_2 + 2\alpha_4 = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 1/2 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

e α_1 e α_3 quaisquer. Consequentemente, uma solução particular será

$$x_{\text{part}}(t) = \frac{1}{2} t \cos t$$

e a solução geral pode ser escrita na forma

$$x(t) = a_1 + a_2 e^t + a_3 \cos t + a_4 \sin t + \frac{1}{2} t \cos t,$$

onde $a_1, \ldots, a_4$ são constantes reais arbitrárias.

III.

1.a) As soluções de (76) serão funções $N, P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ e portanto o espaço de fases é $\mathbb{R}^2$. Para mostrar que $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$ é invariante, basta observar que o fluxo nos eixos coordenados $N = 0$ e $P = 0$ é o apresentado na Figura 56 e que, portanto, os eixos são invariantes.

Consequentemente, sendo (N_0, P_0) um ponto arbitrário do primeiro quadrante, a órbita que em $t = t_0$ passa por (N_0, P_0) não poderá passar para outro quadrante, uma vez que para tal teria de existir um valor $t_1 > t_0$ tal que $(N(t_1), P(t_1))$ seria um ponto de um dos eixos coordenados, o que não é possível devido à unicidade de solução (a qual é garantida pelo Teorema de Picard-Lindelöf e pelo facto do membro direito de (76) ser uma função vectorial de classe $\mathcal{C}^\infty$).

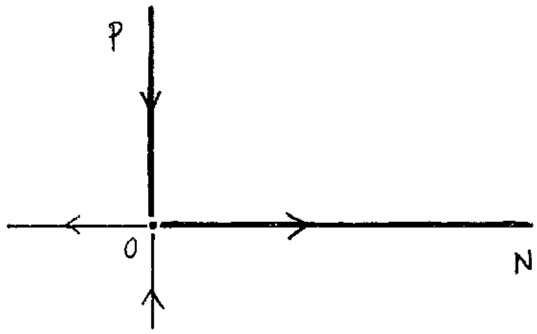


Figura 56: Fluxo de (76) nos eixos coordenados $N = 0$ e $P = 0$.

b)

$$
\begin{aligned}
(N, P) \text{ é ponto de equilíbrio } &\iff \tfrac{dN}{dt} = 0 = \tfrac{dP}{dt} \\
&\iff \begin{cases} \alpha N - \beta NP = 0 \\ -\gamma P + \delta NP = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} N = 0 \quad \text{ou} \quad P = \frac{\alpha}{\beta} \\ N = \frac{\gamma}{\delta} \quad \text{ou} \quad P = 0 \end{cases} \\
&\iff (N, P) = (0, 0) \text{ ou } (N, P) = \left(\tfrac{\gamma}{\delta}, \tfrac{\alpha}{\beta}\right).
\end{aligned}
$$

Considere-se primeiro a linearização em torno de $(0, 0)$: a matriz jacobiana do sistema num ponto arbitrário (N, P) é

$$\begin{bmatrix} \alpha - \beta P & -\beta N \\ \delta P & -\gamma + \delta N \end{bmatrix}$$

e portanto na origem a matriz do sistema linearizado é $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix}$ cujos valores próprios são $\lambda_1 := -\gamma < 0 < \alpha =: \lambda_2$. Sendo a matriz diagonal tem-se imediatamente que os espaços próprios correspondentes a λ_1 e a λ_2 têm por base $\{(0, 1)\}$ e $\{(1, 0)\}$, respectivamente. Isto permite-nos concluir que o retrato de fase da linearização em torno da origem é o apresentado na Figura 57.

No ponto de equilíbrio $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$ a matriz jacobiana é $\begin{bmatrix} 0 & -\gamma\beta/\delta \\ \alpha\delta/\beta & 0 \end{bmatrix}$ cujos valores próprios são os zeros do polinómio característico $p_2(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\gamma$. Como $\alpha\gamma > 0$ os zeros deste polinómio são imaginários puros, $\lambda_\pm = \pm i\sqrt{\alpha\gamma}$, pelo que o método de linearização não é aplicável ao estudo do retrato de fase numa pequena vizinhança do ponto de equilíbrio em questão.

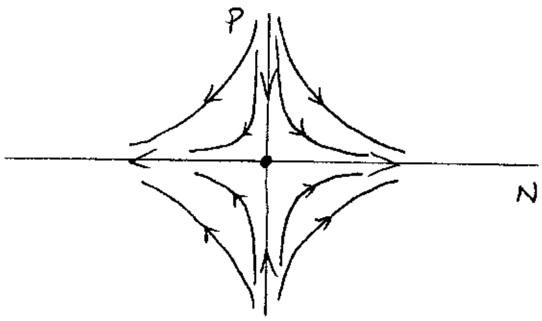


Figura 57: Linearização de (76) em torno de $(0,0)$.

c) No primeiro quadrante $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$ tem-se:

$$\begin{aligned}
N(t) \text{ é crescente [decrescente]} &\iff \tfrac{dN}{dt} > 0 \; [< 0] \\
&\iff (\alpha - \beta P)N > 0 \; [< 0] \\
&\iff N > 0 \wedge P < \alpha/\beta [> \alpha/\beta] \\
P(t) \text{ é crescente [decrescente]} &\iff \tfrac{dP}{dt} > 0 \; [< 0] \\
&\iff (-\gamma + \delta N)P > 0 \; [< 0] \\
&\iff P > 0 \wedge N > \gamma/\delta [< \gamma/\delta].
\end{aligned}$$

A representação gráfica destas regiões é a fornecida pela Figura 58.

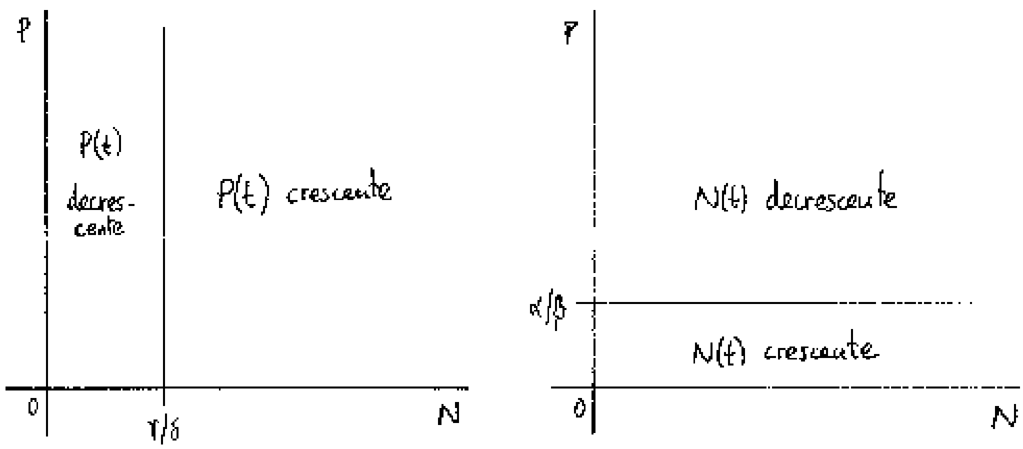


Figura 58: Regiões de monotonia de $t \mapsto P(t)$ e de $t \mapsto N(t)$.

2.a) Se $\alpha N - \beta NP \neq 0$ pode-se garantir que a solução $N = N(t)$ de (76) tem derivada diferente de zero e, portanto, é invertível sendo $\frac{dt}{dN} = \frac{1}{\alpha N - \beta NP}$, onde $P = P(t) = P(t(N))$. A equação para P como função de N será, então,

$$\frac{dP}{dN} = \frac{dP}{dt}\frac{dt}{dN} = \frac{(\delta N - \gamma)P}{(\alpha - \beta P)N},$$

como se pretendia mostrar. As regiões de $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$ onde esta equação é válida são $\Omega_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{(N,P) : N > 0, 0 \leq P < \alpha/\beta\}$ e $\Omega_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{(N,P) : N > 0, P > \alpha/\beta\}$

b) Como a equação (77) é separável tem-se

$$\begin{aligned} & \int \frac{\alpha - \beta P}{P} dP = \int \frac{\delta N - \gamma}{N} dN & \iff \\ \iff \quad & \alpha \log P - \beta P = \delta N - \gamma \log N - \text{const} & \iff \\ \iff \quad & (\delta N - \gamma \log N) + (\beta P - \alpha \log P) = \text{const} & \end{aligned}$$

onde "const" é uma constante real arbitrária.

c) Considere-se a expressão implícita

$$(\delta N - \gamma \log N) + (\beta P - \alpha \log P) = \text{const}$$

para $P = P(N)$. Vejamos que estas soluções são limitadas e estão definidas em intervalos limitados, argumentado por redução ao absurdo. Suponhamos que não estavam definidas em intervalos limitados. Isto significaria que existe uma sucessão crescente (N_j) com $N_j \to +\infty$ e tal que $P(N_j)$ está definido para cada j. Então $\delta N_j - \gamma \log N_j \to +\infty$ quando $j \to \infty$ e portanto, atendendo a que o mínimo da função $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \beta x - \alpha \log x$ é atingido em $x = \alpha/\beta$, conclui-se que

$$\begin{aligned} \text{const} &= \lim_{j\to\infty} (\delta N_j - \gamma \log N_j) + (\beta P(N_j) - \alpha \log P(N_j)) \\ &\geq \lim_{j\to\infty} (\delta N_j - \gamma \log N_j) + (\alpha - \alpha \log \frac{\alpha}{\beta}) = +\infty \end{aligned}$$

o que é absurdo. Supondo agora que o domínio de $P(N)$ contém $N = 0$ na sua aderência tem-se que existe $N_j \to 0$ tal que $P(N_j)$ está definido para cada j. Neste caso também $\delta N_j - \gamma \log N_j \to +\infty$ quando $j \to \infty$ e a conclusão é identica à anterior. De modo análogo tem-se que se existisse (N_j) convergente e tal que $P(N_j) \to +\infty$ ou $P(N_j) \to 0$ quando $j \to \infty$ ter-se-ia $\beta P(N_j) - \alpha \log P(N_j) \to +\infty$ quando $j \to \infty$ e a mesma conclusão seria obtida. Isto permite concluir que as soluções de (77) são limitadas e estão definidas em intervalos limitados e que nem o domínio nem o contradomínio contêm o zero na sua aderência.

3. Pelos resultados obtidos na linearização (alínea 1b)), no estudo das regiões de monotonia do primeiro quadrante (alínea 1c)) e na investigação do domínio e contradomínio das soluções $P = P(N)$ de (77) pode-se concluir o esboço do retrato de fase do sistema (76) apresentado na Figura 59.

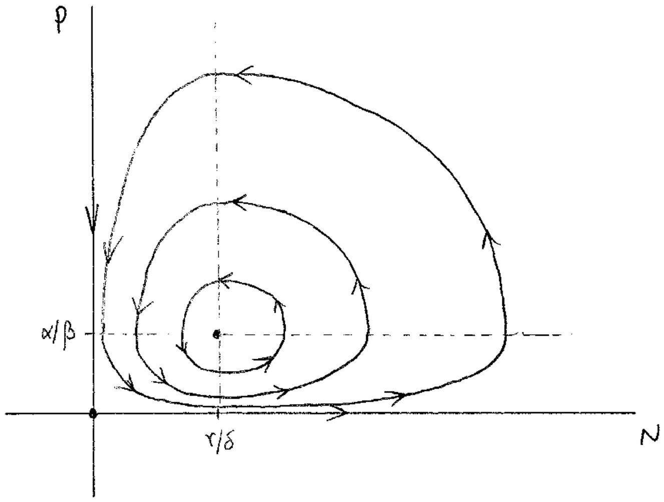


Figura 59: Esboço do retrato de fases do sistema (76).

IV.

Comecemos por esboçar, na Figura 60, o gráfico da função $f(x)$ dada no enunciado,

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \chi_{[1/2,1]}(x), \quad x \in [0,1].$$

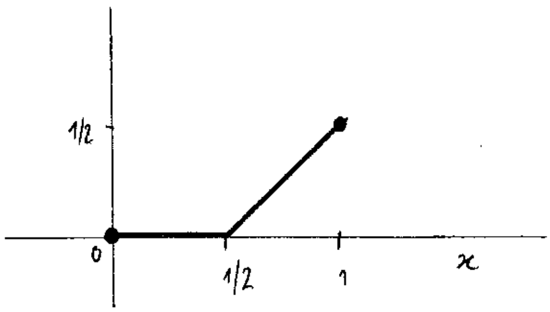


Figura 60: Gráfico de f.

Atendendo aos resultados sobre convergência uniforme de séries de Fourier e às imposições do enunciado, há que prolongar $f(x)$ a $\mathbb{R}$ de modo a que o prolongamento seja uma função

(i) ímpar

(ii) periódica

(iii) contínua e seccionalmente diferenciável

(iv) com primeira derivada integrável e de quadrado integrável num período.

As duas primeiras condições garantem-nos que a série de Fourier é uma série de senos, a terceira condição implica que a série será pontualmente convergente em $\mathbb{R}$ e que a soma da série de Fourier coincide com o prolongamento de f a $\mathbb{R}$, por último a condição (iv) garante que a série será uniformemente convergente em $\mathbb{R}$.

Como exemplo tem-se a função $\tilde{f}(x)$, 4-periódica, com o gráfico dado na Figura 61.

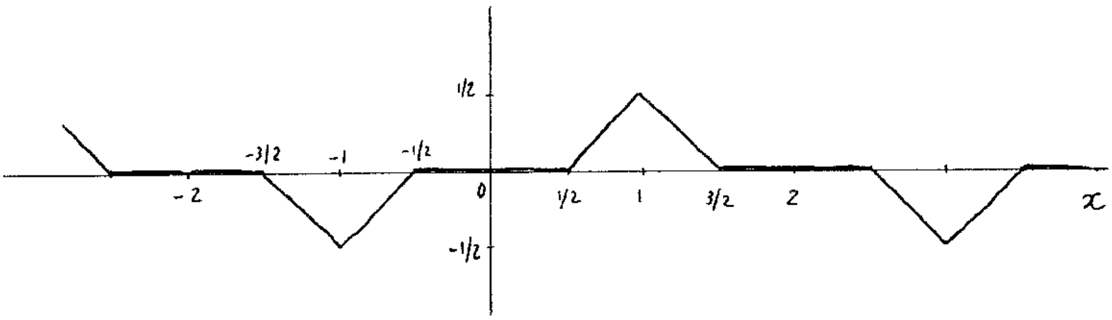


Figura 61: Gráfico de $\tilde{f}$.

Os coeficientes de Fourier são, então, os seguintes

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{2}\int_0^2 \tilde{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx \\
&= \int_{1/2}^{1}\left(x-\frac{1}{2}\right)\sin\frac{n\pi x}{2}dx + \int_1^{3/2}\left(\frac{3}{2}-x\right)\sin\frac{n\pi x}{2}dx \\
&\quad \text{(integrando por partes)} \\
&= \frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2}\left(\sin\frac{3n\pi}{4}+\sin\frac{n\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

e portanto a série de Fourier será

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2}\left(\sin\frac{3n\pi}{4}+\sin\frac{n\pi}{4}\right)\right]\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

Atendendo a que $\tilde{f}$ é ímpar, 4-periódica, contínua com derivada em $[-2,2]$ dada por

$$\tilde{f}' = \begin{cases} -1, & \text{se } x \in]-3/2,-1[\cup]1,3/2[\\ 0, & \text{se } x \in [-2,-3/2[\cup]-1/2,1/2[\cup]3/2,2] \\ 1, & \text{se } x \in]-1,-1/2[\cup]1/2,1[\end{cases}$$

a qual é seccionalmente constante e portanto integrável e de quadrado integrável. Daqui conclui-se que a série de Fourier de $\tilde{f}$ tem as condições exigidas no enunciado e que o seu gráfico coincide com o gráfico de $\tilde{f}$ apresentado anteriormente.

Teste de 3.5.97 e resolução.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

(Engenharia Mecânica, 1ºAno)

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

Data: 3/5/1997
Duração: 1h30.

I.

Considere o sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \mathbf{b}(t) \tag{78}$$

1. Considere que $\mathbf{b}(t) = (1, 1+t, t, 0)^{\mathrm{T}}$.

   a) Determine a solução geral da equação homogénea correspondente a (78).

   b) Determine uma solução particular de (78) e escreva uma expressão para a sua solução geral.

   c) Determine a solução de (78) que satisfaz a condição inicial $\mathbf{x}(0) = (1, 1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.

2. Seja agora $\mathbf{b}(t) \equiv \mathbf{0}$.

   a) Determine *todos* os subespaços de $\mathbb{R}^4$ que são invariantes para o sistema e para os quais o(s) ponto(s) de equilíbrio da restrição de (78) é(são) assimptoticamente estável(eis).

   b) Esboce o retrato de fase da restrição de (78) ao subespaço de maior dimensão que determinou na alínea anterior.

II.

Considere a equação diferencial ordinária de ordem n

$$x^{(n)} + t^{-1}a_{n-1}x^{(n-1)} + t^{-2}a_{n-2}x^{(n-2)} + \cdots + t^{-(n-1)}a_1x' + t^{-n}a_0x = 0, \tag{79}$$

onde a_j, com $j = 0, \ldots, n-1$, são constantes reais e $t > 0$. Considere a nova variável dependente $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}}$ definida por $y_j \stackrel{\text{def}}{=} t^{j-1}x^{(j-1)}$.

1.a) Mostre que na nova variável dependente a equação (79) transforma-se num sistema de primeira ordem do tipo

$$t\mathbf{y}' = A\mathbf{y} \tag{80}$$

e determine explicitamente a matriz A.

b) Mostre que uma matriz fundamental para (80) é $\Phi(t) = t^A$.

c) Conclua que uma base para o espaço das soluções (complexas) de (79) é constituída pelas funções

$$\varphi(t) = t^\lambda (\log t)^m$$

onde os $\lambda\lambda$ são os valores próprios distintos da matriz A e, para cada λ, os mm são inteiros não-negativos inferiores à multiplicidade algébrica de λ.
(*Sugestão: Poderá ser útil utilizar a mudança de variável independente $t \mapsto s = \log t$.*)

2. Mostre que a solução geral da equação diferencial $x''' + t^{-1}x'' - t^{-2}x' = 0$ é dada por $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \log t + \alpha_2 t^2$, onde α_0, α_1 e α_2 são constantes reais arbitrárias.

Resolução:

I.

1.a) Observando que a matriz do sistema, que designaremos por A, é diagonal por blocos, $A = \mathrm{diag}(-2, A_1)$ com $A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, concluímos que uma matriz fundamental é, por exemplo,

$$\Phi(t) = \left[\begin{array}{c|c} e^{-2t} & \\ \hline & \Phi_1(t) \end{array}\right]$$

onde $\Phi_1(t)$ é uma matriz fundamental para o sistema tridimensional obtido da submatriz A_1. Os valores próprios de A_1 são os zeros do seu polinómio característico,

$$\begin{aligned} p_{A_1}(\lambda) &\overset{\text{def}}{=} \det(A_1 - \lambda I_3) \\ &= \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ -2 & -3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 + 4\lambda + 5) \\ &= (1-\lambda)(\lambda - (-2+i))(\lambda - (-2-i)) \end{aligned}$$

ou seja, são $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2+i$ e $\lambda_3 = -2-i$. Os vectores próprios correspondentes ao valor próprio $\lambda_1 = 1$ são os elementos de $\mathcal{N}(A_1 - I_3)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \in \mathcal{N}(A_1 - I_3) &\iff \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \\ &\iff \begin{cases} -2v_1 + v_2 = 0 \\ -2v_1 - 4v_2 + v_3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} v_2 = 2v_1 \\ v_3 = 10v_1 \end{cases} \\ &\iff \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix} v_1, \quad \text{com } v_1 \text{ arbitrário.} \end{aligned}$$

O espaço próprio complexo correspondente a $\lambda_2 = -2+i$ é constituido pelos vectores $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^{\mathrm{T}}$ tais que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} \in \mathcal{N}(A_1 - \lambda_2 I_3) \quad & \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1-i & 1 & 0 \\ -2 & -1-i & 1 \\ 0 & 0 & 3-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (1-i)v_1 + v_2 = 0 \\ -2v_1 + (-1-i)v_2 + v_3 = 0 \\ (3-i)v_3 \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} v_2 = -(1-i)v_1 \\ v_3 = 0 \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1+i \\ 0 \end{bmatrix} v_1,
\end{aligned}
$$

com $v_1 \in \mathbb{C}$ arbitrário. Por exemplo, fazendo $v_1 = 1$ tem-se

$$
\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

e portanto duas soluções reais linearmente independentes são a parte real e a parte imaginária da solução complexa

$$
\begin{aligned}
e^{(-2+i)t}\mathbf{v} &= e^{-2t}(\cos t + i \sin t) \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= e^{-2t} \begin{bmatrix} \cos t \\ -\cos t - \sin t \\ 0 \end{bmatrix} + ie^{-2t} \begin{bmatrix} \sin t \\ -\sin t + \cos t \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

ou seja, $e^{-2t} \begin{bmatrix} \cos t \\ -\cos t - \sin t \\ 0 \end{bmatrix}$ e $e^{-2t} \begin{bmatrix} \sin t \\ -\sin t + \cos t \\ 0 \end{bmatrix}$. Assim, $\Phi_1(t)$ pode ser escrito como se segue

$$
\Phi_1(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t}\cos t & e^{-2t}\sin t & e^t \\ -e^{-2t}\cos t - e^{-2t}\sin t & -e^{-2t}\sin t + e^{-2t}\cos t & 2e^t \\ 0 & 0 & 10e^t \end{bmatrix}
$$

e portanto a solução geral da equação homogénea é

$$
\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t}\cos t & e^{-2t}\sin t & e^t \\ 0 & -e^{-2t}\cos t - e^{-2t}\sin t & -e^{-2t}\sin t + e^{-2t}\cos t & 2e^t \\ 0 & 0 & 0 & 10e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}
$$

onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ são constantes reais arbitrárias.

b) Atendendo a que $\mathbf{b}(t) = (1, 1+t, t, 0)^{\mathrm{T}}$ é do tipo $\mathbf{p}_k(t)e^{\lambda t}$, com o grau k do polinómio vectorial igual a 1 e com $\lambda = 0$ podemos utilizar o método dos palpites: como $\lambda = 0$ não é valor próprio da matriz do sistema tem-se que uma solução particular será do tipo $\mathbf{q}_\ell(t)$ com $\ell \leq k = 1$ e portanto iremos tentar

$$\mathbf{x}_{\text{part}}(t) = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 t \\ a_2 + b_2 t \\ a_3 + b_3 t \\ a_4 + b_4 t \end{bmatrix}.$$

Temos então, substituindo este palpite em (78),

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 + b_1 t \\ a_2 + b_2 t \\ a_3 + b_3 t \\ a_4 + b_4 t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1+t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (b_1 + 2a_1 - 1) + 2b_1 t \\ (b_2 + a_2 - a_3 - 1) + (b_2 - b_3 - 1)t \\ (b_3 + 2a_2 + 3a_3 - a_4) + (2b_2 + 3b_3 - b_4 - 1)t \\ (b_4 - a_4) - b_4 t \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{cases} b_1 + 2a_1 - 1 = 0 \\ 2b_1 = 0 \\ b_2 + a_2 - a_3 - 1 = 0 \\ b_2 - b_3 - 1 = 0 \\ b_3 + 2a_2 + 3a_3 - a_4 = 0 \\ 2b_2 + 3b_3 - b_4 - 1 = 0 \\ b_4 - a_4 = 0 \\ b_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = 1/2 \\ b_1 = 0 \\ a_2 = 4/25 \\ b_2 = 4/5 \\ a_3 = -1/25 \\ b_3 = -1/5 \\ a_4 = 0 \\ b_4 = 0 \end{cases}$$

e portanto uma solução particular da equação não-homogénea é

$$\mathbf{x}_{\text{part}}(t) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ (4 + 20t)/25 \\ -(1 + 5t)/25 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e a solução geral é obtida por

$$x(t) = \mathbf{x}_{\text{hom}}(t) + \mathbf{x}_{\text{part}}(t)$$

onde $\mathbf{x}_{\text{hom}}(t)$ é a solução geral da equação homogénea associada a (78) que foi apresentada no fim da resolução da alínea anterior.

c) A solução pedida tem de satisfazer $\mathbf{x}(0) = (1,1,0,1)^{\mathrm{T}}$ e portanto as constantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ terão de satisfazer

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 4/25 \\ -1/25 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou seja

$$\begin{bmatrix} 1/2 \\ 21/25 \\ 1/25 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 + \alpha_4 \\ -\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 \\ 10\alpha_4 \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 = 1/2 \\ \alpha_2 = 37/50 \\ \alpha_3 = 27/50 \\ \alpha_4 = 1/10 \end{cases} .$$

2.a) Como a matriz do sistema não tem valores próprios nulos, o único ponto de equilíbrio é $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Observando que para que a origem seja assimptoticamente estável é necessário e suficiente que todos os valores próprios da restrição do sistema tenham parte real negativa, e atendendo a que, pela resolução de 1.a), aos valores próprios com parte real negativa correspondem os seguintes subespaços invariantes de $\mathbb{R}^4$,

$$\begin{array}{ll} \lambda = -2 \,, & E = \{(\alpha, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}} : \alpha \in \mathbb{R}\} \\ \lambda = -2 + i \,, & F = \{(0, \beta, \gamma, 0)^{\mathrm{T}} : \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

concluímos que os subespaços invariantes de $\mathbb{R}^4$ para os quais a origem é assimptoticamente estável são

$$\{\mathbf{0}\} \qquad E, \qquad F \quad \text{e} \quad E \oplus F.$$

os quais, exceptuando o caso do primeiro que contém um único ponto, têm dimensão um, dois e três, respectivamente.

b) Os retratos de fase em E e F podem facilmente esboçar-se por observação de (78) e relembrando os cálculos efectuados na alínea 1a):

- em E tem-se o que se apresenta na Figura 62.

Figura 62: Retrato de fases em E.

- em F : atendendo aos cálculos feitos anteriormente, um vector próprio correspondente a $-2+i$ é

$$\mathbf{v}_R + i\mathbf{v}_I = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e a representação de $\mathbf{v}_R$ e $\mathbf{v}_I$ no plano (x_2, x_3) é a dada na Figura 63.

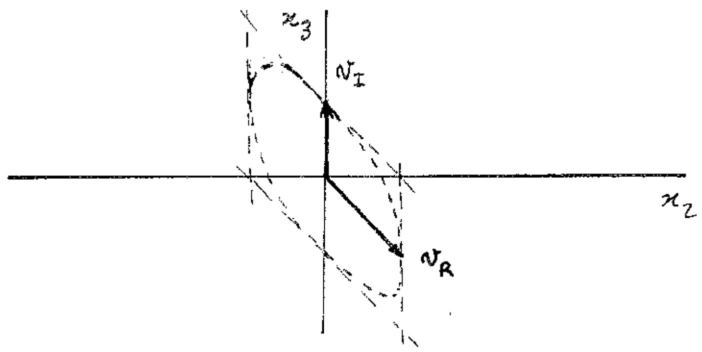


Figura 63: Representação de $\mathbf{v}_R$ e $\mathbf{v}_I$ no plano (x_2, x_3).

No eixo dos x_3x_3 os vectores tangentes às órbitas do sistema são

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 \\ x_3 \\ -3x_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e portanto o retrato de fase do sistema restringido a F é o esboçado na Figura 64.

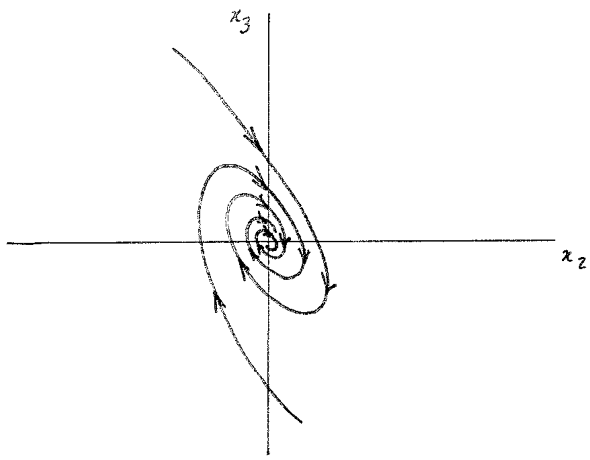


Figura 64: Retrato de fase do sistema restringido a F.

Consequentemente, o retrato de fase em $E \oplus F$ será algo como se esboça na Figura 65.

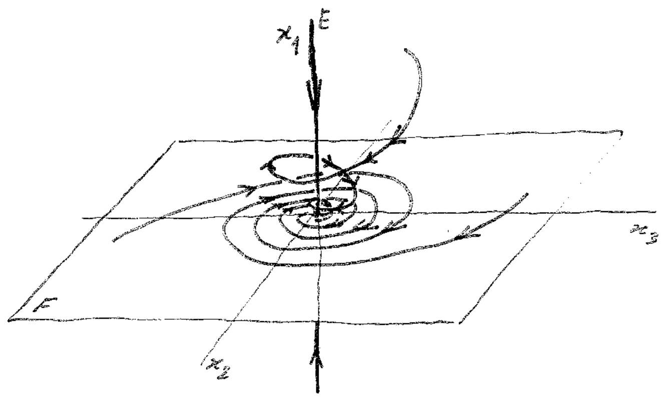


Figura 65: Retrato de fase do sistema em $E \oplus F$.

II.

1.a) Observando que $y_j = t^{j-1}x^{(j-1)}$ e que portanto $x^{(j)} = t^{-j}y_{j+1}$, tem-se, para $j = 1$,

$$y_1' = x' = t^{-1}y_2,$$

para $1 < j < n$,

$$\begin{aligned}
y_j' &= \left(t^{j-1}x^{(j-1)}\right)' = (j-1)t^{(j-2)}x^{(j-1)} + t^{j-1}x^{(j)} \\
&= (j-1)t^{j-2}t^{-(j-1)}y_j + t^{j-1}t^{-j}y_{j+1} \\
&= t^{-1}\left((j-1)y_j + y_{j+1}\right)
\end{aligned}$$

e finalmente para $j = n$,

$$\begin{aligned}
y_n' &= \left(t^{n-1}x^{(n-1)}\right)' = (n-1)t^{-1}y_n + t^{n-1}x^{(n)} \\
&= (n-1)t^{-1}y_n + \\
&\quad + t^{n-1}\left(-t^{-n}a_0x - t^{-(n-1)}a_1x' - \cdots - t^{-2}a_{n-2}x^{(n-2)} - t^{-1}a_{n-1}x^{(n-1)}\right) \\
&= (n-1)t^{-1}y_n - t^{-1}a_0y_1 - t^{-1}a_1y_2 - \cdots - t^{-1}a_{n-2}y_{n-1} - t^{-1}a_{n-1}y_n \\
&= t^{-1}\left(-a_0y_1 - a_1y_2 - \cdots - a_{n-2}y_{n-1} + ((n-1) - a_{n-1})y_n\right)
\end{aligned}$$

Consequentemente a equação (79) é transformada no sistema

$$t\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}' = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-2) & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-2} & (n-1)-a_{n-1} \end{bmatrix}}_{=:A} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}$$

b) Atendendo a que $\Phi(t) = t^A = e^{A\log t}$ tem-se

$$\Phi'(t) = Ae^{A\log t}\frac{1}{t} = A\Phi(t)\frac{1}{t}$$

ou seja $t\Phi'(t) = A\Phi(t)$ e portanto $\Phi(t)$ é uma solução matricial de (80). Como

$$\Phi(t)^{-1} = \left(e^{A\log t}\right)^{-1} = e^{-A\log t} = e^{A(-\log t)} = e^{A\log t^{-1}}$$

está bem definida para todos os valores de $t > 0$, conclui-se que $\Phi(t)$ é invertível para qualquer $t > 0$ e que, portanto, é uma matriz fundamental de (80).

c) Da alínea anterior tem-se que uma matriz fundamental de $t\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ é $\Phi(t) = e^{A\log t}$. Para qualquer matriz A existe uma matriz de Jordan J e uma matriz de mudança de base de $\mathbb{R}^n$, M, tal que $A = M^{-1}JM$ e portanto $e^{As} = M^{-1}e^{Js}M$. Conclui-se assim que os elementos da matriz e^{As}, e em particular os da sua primeira linha, são combinações lineares dos elementos da matriz e^{Js}, os quais são multiplos de funções do tipo $s^m e^{\lambda s}$ com os $\lambda\lambda$ sendo os valores próprios de A e os mm sendo constantes inteiras não-negativas inferiores à multiplicidade algébrica dos $\lambda\lambda$. Atendendo ao que ficou exposto e ao facto de, no presente caso, termos $\log t$ em vez de s, conclui-se o pretendido.

2. Iremos resolver esta questão de dois modos distintos[7] começando com o mais directo: atendendo a que $x(t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$ e tendo em conta que $x'(t) = \alpha_1\frac{1}{t} + 2\alpha_2 t$, $x''(t) = -\alpha_1\frac{1}{t^2} + 2\alpha_2$ e $x'''(t) = 2\alpha_1\frac{1}{t^3}$, conclui-se que

$$\begin{aligned} x'''(t) + t^{-1}x''(t) - t^{-2}x'(t) &= 2\alpha_1\frac{1}{t^3} + t^{-1}\left(-\frac{\alpha_1}{t^2} + 2\alpha_2\right) - t^{-2}\left(\frac{\alpha_1}{t} + 2\alpha_2 t\right) \\ &= 2\alpha_1 t^{-3} - \alpha_1 t^{-3} + 2\alpha_2 t^{-1} - \alpha_1 t^{-3} - 2\alpha_2 t^{-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

e portanto a função dada é solução da equação diferencial. Para concluir que é a solução geral basta mostrar que as funções 1, $\log t$ e t^2 são linearmente independentes em $\mathbb{R}^+$ o que é

[7] Obviamente que no Teste não era necessário apresentar os dois...

facilmente conseguido observando que o determinante da correspondente matriz Wronskiana é diferente de zero para $t > 0$:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & \log t & t^2 \\ 0 & t^{-1} & 2t \\ 0 & -t^{-2} & 2 \end{bmatrix} = 2t^{-1} + 2t^{-1} = 4t^{-1} > 0.$$

A segunda resolução baseia-se na observação de que a equação dada é um caso particular de (79) com $n = 3$, $a_0 = 0$, $a_1 = -1$ e $a_2 = 1$. Consequentemente, pela alínea 1.a) a matriz A é, neste caso

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

cujos valores próprios são os zeros do polinómio característico

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= -\lambda((1-\lambda)(1-\lambda)-1) = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda) = -\lambda^2(\lambda - 2), \end{aligned}$$

ou seja, $\lambda = 0$ (com multiplicidade algébrica igual a 2) e $\lambda = 2$ (com multiplicidade algébrica igual a 1). Assim, usando a alínea 1c) conclui-se que as funções

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= t^0(\log t)^0 = 1 \\ \varphi_2(t) &= t^0(\log t)^1 = \log t \\ \varphi_3(t) &= t^2(\log t)^0 = t^2 \end{aligned}$$

constituem uma base para o espaço das soluções, pelo que a solução geral será a apresentada no enunciado.

Exame de 20.6.97 e resolução.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

(Engenharia Mecânica, 1ºAno)

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

Data: 20/6/1997
Duração: 1h30 + 1h30.

I.

Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \mathbf{b}(t) \tag{81}$$

1. Seja $\mathbf{b}(t) \equiv \mathbf{0}$.
   a) Determine o(s) ponto(s) de equilíbrio de (81) e estude-o(s) quanto à estabilidade.
   b) Determine um subespaço L de $\mathbb{R}^3$ tal que o(s) equilíbrio(s) da restrição de (81) a L seja(m) assimptoticamente estável(eis) e que L tenha a maior dimensão possível.
   c) Esboce o retrato de fase de (81).
2. Considere agora $\mathbf{b}(t) = (0, \cos(2t), 0)^{\mathrm{T}}$.
   a) Determine uma solução particular de (81).
   b) Determine a solução geral de (81).
   c) Determine a solução de (81) que satisfaz $(x(0), y(0), z(0))^{\mathrm{T}} = \mathbf{e}_1$.

II.

Sejam a_0, a_1, a_2 e a_3 constantes reais e $a_3 \neq 0$. Considere a equação de Euler de terceira ordem

$$a_3 t^3 x''' + a_2 t^2 x'' + a_1 t x' + a_0 x = 0. \tag{82}$$

1. Definindo uma nova variável independente s pela relação $t = e^s$ e usando a notação $\dot{f} = \frac{d}{ds} f$,
   a) Mostre que $x' = e^{-s}\dot{x}$, $x'' = e^{-2s}(\ddot{x} - \dot{x})$ e $x''' = e^{-3s}(\dddot{x} - 3\ddot{x} + 2\dot{x})$.
   b) Escreva a equação diferencial ordinária resultante da aplicação da mudança de variável $t \mapsto s$ à equação (82).
2. Sejam $a_0 = a_1 = a_2 - 2 = a_3 = 1$. Determine a solução geral *real* de (82).

III.

Considere a equação diferencial ordinária

$$\left(\frac{3}{w}+\frac{w}{x^2}\right)+\left(\frac{3}{x}+\frac{x}{w^2}\right)\frac{dw}{dx}=0. \tag{83}$$

a) Mostre que (83) tem um factor integrante do tipo $\mu=\mu(xw)$.

b) Mostre que a solução de (83) com condição inicial $w(1)=1$ é dada implicitamente por $x^3w+xw^3-2=0$.

c) Determine o polinómio de Taylor de segunda ordem, no ponto 1, da solução dada implicitamente na alínea anterior.

IV.

Sejam $a(t)\in\mathcal{C}^1$ e $b(t)\in\mathcal{C}^0$ duas funções reais definidas em $\mathbb{R}^+$. Suponha que $a(t)>0$ e considere a equação diferencial ordinária de segunda ordem

$$(a(t)x')'+b(t)x=0 \tag{84}$$

A mudança de variáveis $(ax',x)\mapsto(\rho,\theta)$ dada por $ax'=\rho\cos\theta$ e $x=\rho\sin\theta$, usualmente designada por *transformação de Prüfer,* transforma a equação (84) no sistema de primeira ordem

$$\left\{\begin{array}{l}\theta'=\frac{1}{a(t)}\cos^2\theta+b(t)\sin^2\theta\\ \rho'=\left(\frac{1}{a(t)}-b(t)\right)\rho\cos\theta\sin\theta\end{array}\right. \tag{85}$$

a) Justifique que os problemas de Cauchy para o sistema (85) têm solução local única e mostre que os respectivos intervalos máximos de existência são ilimitados à direita.
(*Sugestão: Poderá ser útil observar que a primeira equação de* (85) *não depende de* $\rho(t)$.)

b) Considere $a(t)=1/t$ e $b(t)=t$. Determine a solução de (84) que satisfaz a condição inicial $x(\sqrt{2})=\sqrt{3}$ e $x'(\sqrt{2})=\sqrt{2}$.

V.

A posição de equilíbrio de uma membrana que cobre um domínio limitado Ω é descrita por uma função $u=u(x,y)\in\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})\cap\mathcal{C}^2(\Omega)$ que é a solução da equação de Laplace $u_{xx}+u_{yy}=0$ em Ω e que satisfaz condições apropriadas em $\partial\Omega$.
Seja $\Omega=]0,1[\times]0,1[$ e considere a seguinte condição na fronteira $\partial\Omega$

$$u\,|_{\partial\Omega}\,(x,y)=\left\{\begin{array}{ll}f(x) & \text{se } y=0,\\ 0 & \text{caso contrário,}\end{array}\right.$$

onde $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ satisfaz $f(0)=f(1)=0$.

a) Determine uma expressão formal para $u(x,y)$.

b) Mostre que se $f\in\mathcal{C}^4([0,1])$, então a solução formal é uma solução clássica (i.e., no sentido indicado acima) da equação de Laplace.
(*Sugestão: Mostre que sendo* f *de classe* $\mathcal{C}^k([0,1])$ *então os coeficientes de Fourier de* f *convergem para* 0 *pelo menos como* $1/n^k$.)

Resolução:

I.

1.a) Os pontos de equilíbrio de (81) são os elementos do espaço nulo da matriz do sistema, ou seja, são os pontos $(x, y, z)^{\mathrm{T}}$ tais que

$$\begin{cases} -x+z=0 \\ -y=0 \\ x-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrário. A estabilidade dos pontos de equilíbrio é determinada pelo comportamento dos valores próprios da matriz do sistema, os quais são os zeros do polinómio característico

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (-1-\lambda)((-1-\lambda)(-1-\lambda)-1) \\ &= -(1+\lambda)(\lambda^2+2\lambda) \\ &= -\lambda(\lambda+1)(\lambda+2) \end{aligned}$$

ou seja, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = -2$ são os valores próprios da matriz do sistema. Como a multiplicidade algébrica de $\lambda_1 = 0$ é $m_a = 1$ e portanto a multiplicidade geométrica m_g, satisfazendo $1 \leq m_g \leq m_a$, é também igual a 1, concluimos que os pontos de equilíbrio são todos estáveis (porque a parte real de todos os valores próprios é não-positiva e aquele com parte real nula tem multiplicidades algébrica e geométrica iguais) mas não assimptoticamente estáveis (porque existe um valor próprio com parte real nula).

b) Sabendo que os espaços próprios correspondentes a valores próprios reais são subespaços reais invariantes e atendendo a que se pretende determinar L de modo a que os pontos de equilíbrio do sistema restringido a L sejam assimptoticamente estáveis, há que tomar os espaços próprios correspondentes aos valores próprios negativos:

$$\begin{aligned} E_{-1} &= \left\{ \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^{\mathrm{T}} : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \right\} \\ &= \{\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^{\mathrm{T}} : v_1 = 0, v_3 = 0\} \\ &= \{(0, \alpha, 0)^{\mathrm{T}} : \alpha \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{-2} &= \left\{ \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^{\mathrm{T}} : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \right\} \\ &= \{\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^{\mathrm{T}} : v_1 + v_3 = 0,\ v_2 = 0\} \\ &= \{(\beta, 0, -\beta)^{\mathrm{T}} : \beta \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

e portanto o subespaço L pretendido é

$$L = E_{-1} \oplus E_{-2} = \{\mathbf{v} = (\beta, \alpha, -\beta)^{\mathrm{T}} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}\,.$$

c) O retrato de fase de (81) restringido a L é, atendendo às alíneas anteriores, o esboçado na Figura 66.

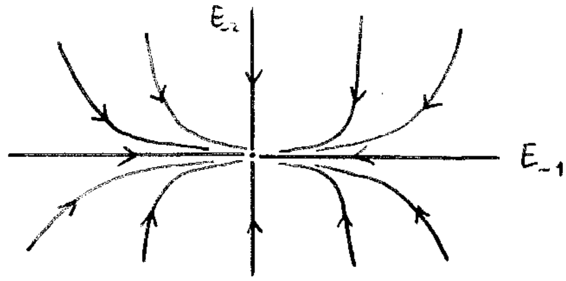


Figura 66: Retrato de fase de (81) restringido a L.

e portanto, atendendo a que o outro subespaço invariante para (81) é o espaço próprio correspondente a $\lambda_1 = 0$, ou seja, é o espaço nulo da matriz do sistema, o qual, como foi calculado na alínea a), é

$$E_0 = \{\mathbf{v} = (\gamma, 0, \gamma)^{\mathrm{T}} : \gamma \in \mathbb{R}\}$$

e atendendo a que $E_0 \perp L$ tem-se o retrato de fase de (81) que se exibe na Figura 67.

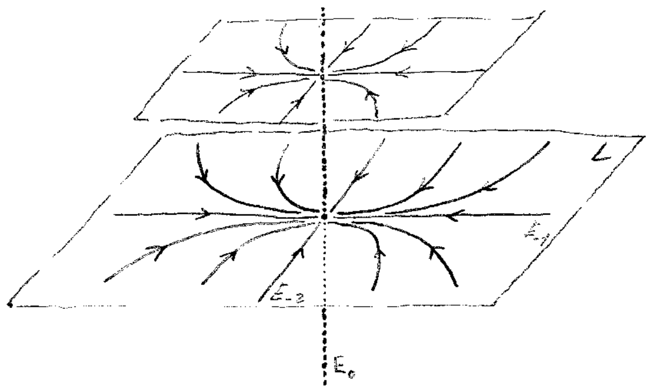


Figura 67: Retrato de fase de (81).

2.a) Observe-se que com o $\mathbf{b}(t)$ dado o sistema (81) pode-se escrever na forma

$$\begin{cases} x' = -x + z \\ z' = x - z \\ y' = -y + \cos 2t \end{cases}$$

e portanto uma solução particular pode ser conseguida tendo em conta que o subsistema para (x, z) é homogéneo, pelo que *uma* solução particular é $x(t) = z(t) = 0$, e, utilizando o método dos palpites para a equação para y, tem-se o seguinte: como $\cos 2t = \mathrm{Re}\left(e^{i2t}\right)$ e $2i \neq -1$ tem-se que uma solução particular da equação para y será do tipo $y_{\text{part}}(t) = \alpha \cos 2t + \beta \sin 2t$, onde α e β são reais que terão de satisfazer

$$\begin{aligned} 0 &= y'_{\text{part}} + y_{\text{part}} - \cos 2t \\ &= -2\alpha \sin 2t + 2\beta \cos 2t + \alpha \cos 2t + \beta \sin 2t - \cos 2t \\ &= (2\beta + \alpha - 1) \cos 2t + (\beta - 2\alpha) \sin 2t \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{cases} 2\beta + \alpha - 1 = 0 \\ \beta - 2\alpha = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 1/5 \\ \beta = 2/5 \end{cases}$$

e uma solução particular de (81) é

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\text{part}} (t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \cos 2t + \frac{2}{5} \sin 2t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) Atendendo à alínea anterior a solução geral de (81) pode ser escrita na forma

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} (t) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\text{hom}} (t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \cos 2t + \frac{2}{5} \sin 2t \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde $(x, y, z)^{\mathrm{T}}_{\text{hom}}$ é a solução geral da equação homogénea, a qual, atendendo às alíneas 1.a) e 1.b) pode ser imediatamente escrita pelo método dos valores e vectores próprios:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\text{hom}} (t) = \begin{bmatrix} \gamma \\ 0 \\ \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ -\beta \end{bmatrix} e^{-2t}.$$

c) As constantes α, β e γ têm de ser tais que a igualdade seguinte seja válida

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma \\ 0 \\ \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ -\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma + \beta \\ \alpha + 1/5 \\ \gamma - \beta \end{bmatrix}$$

ou seja

$$\begin{cases} \gamma + \beta = 1 \\ \alpha + 1/5 = 0 \\ \gamma - \beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\beta = 1 \\ \alpha = -1/5 \\ \gamma = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -1/5 \\ \beta = 1/2 \\ \gamma = 1/2 \end{cases}$$

e a solução pretendida é

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} (t) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/5 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \cos 2t + \frac{2}{5} \sin 2t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

II.

1.a) Observe-se que $t = e^s \Leftrightarrow s = \log t$. Pelo teorema de derivação das funções compostas tem-se

$$\begin{aligned} x' &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}\dot{x} = \frac{1}{t}\dot{x} = e^{-s}\dot{x} \\ x'' &= \frac{d}{dt}x' = \frac{d}{dt}(e^{-s}\dot{x}) = \frac{d}{ds}(e^{-s}\dot{x})\frac{ds}{dt} \\ &= (-e^{-s}\dot{x} + e^{-s}\ddot{x})e^{-s} = e^{-2s}(\ddot{x} - \dot{x}) \\ x''' &= \frac{d}{dt}x'' = \frac{d}{dt}\left(e^{-2s}(\ddot{x} - \dot{x})\right) = \frac{d}{ds}\left(e^{-2s}(\ddot{x} - \dot{x})\right)\frac{ds}{dt} \\ &= \left(-2e^{-2s}\ddot{x} + 2e^{-2s}\dot{x} + e^{-2s}\dddot{x} - e^{-2s}\ddot{x}\right)e^{-s} = e^{-3s}(\dddot{x} - 3\ddot{x} + 2\dot{x}) \end{aligned}$$

como se pretendia obter

b) Substituindo o resultado da alínea anterior e a definição de s na equação (82) obtem-se

$$\begin{aligned} 0 &= a_3 e^{3s} e^{-3s}(\dddot{x} - 3\ddot{x} + 2\dot{x}) + a_2 e^{2s} e^{-2s}(\ddot{x} - \dot{x}) + a_1 e^s e^{-s}\dot{x} + a_0 x \\ &= a_3 \dddot{x} + (a_2 - 3a_3)\ddot{x} + (a_1 - a_2 + 2a_3)\dot{x} + a_0 x \end{aligned}$$

que é a equação pretendida.

2. Com $a_0 = a_1 = a_2 - 2 = a_3 = 1$ e a transformação de variáveis fornecida, a equação da alínea anterior é

$$1 \cdot \dddot{x} + (3 - 3 \cdot 1)\ddot{x} + (1 - 3 + 2 \cdot 1)\dot{x} + 1 \cdot x = 0,$$

ou seja, $\dddot{x} + x = 0$. Denotando $\dot{x}$ por Dx a equação escreve-se $(D^3 + 1)x = 0$. Para factorizar o polinómio diferencial $D^3 + 1$ observe-se que $\lambda = -1$ é um zero de $p(\lambda) := \lambda^3 + 1$ e dividindo $p(\lambda)$ por $\lambda + 1$ obtém-se $\lambda^2 - \lambda + 1$, cujos zeros são $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Consequentemente a solução geral *real* da equação $(D^3 + 1)x = 0$ é

$$x(s) = c_1 e^{-s} + c_2 e^{\frac{1}{2}s} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) + c_3 e^{\frac{1}{2}s} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right)$$

com c_1, c_2 e c_3 constantes reais arbitrárias. Portanto, na variável independente original, t, obtém-se a solução

$$x(t) = c_1\frac{1}{t} + c_2\sqrt{t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log t\right) + c_3\sqrt{t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log t\right).$$

III.

a) Seja $v = xy$. Procuremos um factor integrante do tipo $\mu = \mu(v)$. Se existir a equação obtida por multiplicação de (83) por $\mu(v)$ será exacta, ou seja, verificar-se-à

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial w}\left(\mu(v)\left(\frac{3}{w}+\frac{w}{x^2}\right)\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(v)\left(\frac{3}{x}+\frac{x}{w^2}\right)\right) \iff \\
\mu' x\left(\frac{3}{w}+\frac{w}{x^2}\right)+\left(-\frac{3}{w^2}+\frac{1}{x^2}\right)\mu &= \mu' w\left(\frac{3}{x}+\frac{x}{w^2}\right)+\left(-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{w^2}\right)\mu \iff \\
\left(\frac{x^2-w^2}{wx}\right)\mu' &= -2\left(\frac{w^2-x^2}{w^2x^2}\right)\mu \iff \\
\mu' &= \frac{2}{xw}\mu \iff \\
\mu' &= \frac{2}{v}\mu
\end{aligned}$$

e uma solução desta equação linear escalar de primeira ordem é $\mu(v) = v^2$ pelo que um factor integrante para (83) é $\mu(xw) = (xw)^2$.

b) Pela alínea anterior sabe-se que a equação

$$(xw)^2\left(\frac{3}{w}+\frac{w}{x^2}\right)+(xw)^2\left(\frac{3}{x}+\frac{x}{w^2}\right)\frac{dw}{dx} = 0$$

é exacta. Escrevendo esta equação na forma mais simplificada

$$(3x^2w+w^3)+(3xw^2+x^3)\frac{dw}{dx} = 0$$

sabe-se que existe uma função Φ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\Phi(x,w) = 3x^2w+w^3 \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial w}\Phi(x,w) = 3xw^2+x^3 \end{cases} \iff \begin{cases} \Phi(x,w) = x^3w+xw^3+h_1(w) \\ \\ \Phi(x,w) = xw^3+x^3w+h_2(x) \end{cases}$$

e portanto pode-se escolher $h_1(w) = h_2(x) = 0$ e as soluções de (83) são dadas implicitamente por $x^3w+w^3x = C$, onde C é uma constante real arbitrária. Para a condição inicial dada, a saber $w(1) = 1$, tem-se $1^3\cdot 1+1^3\cdot 1 = C \Leftrightarrow C = 2$ provando -se o pretendido.

c) Seja $P_2(x)$ o polinómio da Taylor da solução em $x = 1$, ou seja

$$P_2(x) = w(1)+w'(1)(x-1)+\frac{1}{2!}w''(1)(x-1)^2.$$

Sabe-se da condição inicial que $w(1) = 1$. Da equação (83) calculada em $x = 1, w = 1$, vem

$$\left(\frac{3}{1}+\frac{1}{1^2}\right)+\left(\frac{3}{1}+\frac{1}{1^2}\right)\frac{dw}{dx}(1) = 0$$

ou seja, $4 + 4w'(1) = 0$ e portanto $w'(1) = -1$. Finalmente, para calcular $w''(1)$ derive-se (derivada total) a equação (83) em relação a x e calcule-se o resultado em $x = w = 1$. Derivando a equação tem-se

$$\left(-\frac{3}{w^2}\frac{dw}{dx} + \frac{1}{x^2}\frac{dw}{dx} - 2\frac{w}{x^3} \right) + \left(-\frac{3}{x^2} + \frac{1}{w^2} - \frac{2x}{w^3}\frac{dw}{dx} \right) \frac{dw}{dx} + \left(\frac{3}{x} + \frac{x}{w^2} \right) \frac{d^2w}{dx^2} = 0,$$

pelo que substituindo os valores vem $(3 - 1 - 2) + (-3 + 1 + 2)(-1) + 4w''(1) = 0$, ou seja $w''(1) = 0$. Assim, a expressão pretendida é

$$P_2(x) = 1 - (x - 1) = 2 - x.$$

IV.

a) Atendendo a que a equação para $\theta(t)$ não depende de $\rho(t)$, podemos começar por analizar esta equação. Como $a(t)$ é continuamente diferenciável e positivo em $\mathbb{R}^+$ e $b(t)$ é contínuo, conclui-se que o membro direiro da equação para θ é contínuo em relação a t. É imediato que é de classe $\mathcal{C}^\infty$ em relação a θ com derivada parcial em ordem a esta variável igual a $2(b(t) - 1/a(t)) \cos\theta \sin\theta$. Consequentemente, em regiões compactas $\Omega \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ a quantidade

$$L = \sup_{(t,\theta)\in\Omega} \left| 2 \left(b(t) - \frac{1}{a(t)} \right) \cos\theta \sin\theta \right| = \sup_{(t,\theta)\in\Omega} \left| b(t) - \frac{1}{a(t)} \right|$$

é um número real, pelo que a função do membro direito da equação para θ em (85) é localmente Lipschitz em relação a θ e o teorema de Picard-Lindelöf permite afirmar que existe uma solução local única $\theta(t)$ para os problemas de valores iniciais associados a esta equação. Obtida a garantia de existência da função $\theta(t)$ pode-se substituir esta na equação para $\rho(t)$ obtendo-se a equação diferencial *linear* de primeira ordem

$$\rho' = \left[\left(\frac{1}{a(t)} - b(t) \right) \cos\theta(t) \sin\theta(t) \right] \rho \tag{86}$$

e, como a função entre parentesis rectos é contínua, conclui-se que os problemas de Cauchy para esta equação têm solução local única.

Para concluir que os intervalos máximos de existência das soluções de problemas de valores iniciais são ilimitados à direita comecemos também por estudar a componente $\theta(t)$. Suponha-se que é dada uma condição inicial arbitrária $\theta(t_0) = \theta_0$. Observando que o valor absoluto do membro direito da equação para $\theta(t)$ pode ser majorado por $|b(t)| + 1/a(t)$, sabemos que $|\theta(t)| \leq u(t)$ onde $u(t)$ é a solução da equação diferencial $u' = |b(t)| + 1/a(t)$ com condição inicial $u(t_0) = \theta_0$, e portanto

$$|\theta(t)| \leq \theta_0 + \int_{t_0}^{t} (|b(s)| + 1/a(s))\, ds.$$

Como a função integranda está definida e é contínua em todos os valores de t satisfazendo $t \geq t_0 > 0$, concluimos que o integral é finito para todos os valores reais positivos de t. Isto implica que a única maneira da solução $\theta(t)$ deixar de existir para algum valor de $t < \infty$ é existir um β tal que não exista $\lim_{t\uparrow\beta} \theta'(t)$, o que não é possível acontecer uma vez que a derivada de $\theta(t)$, a qual é dada pelo membro direito da equação para θ, está definida para todos os valores reais de θ e para todos os valores de $t > 0$. Isto permite concluir que o intervalo máximo para $\theta(t)$ é ilimitado à direita. Quanto ao intervalo máximo para a componente $\rho(t)$ observe-se que podemos obter uma expressão para esta função resolvendo a equação (86) com uma condição inicial $\rho(t_0) = \rho_0$, vindo

$$\rho(t) = \rho_0 \exp\left[\int_{t_0}^{t} \left(\left(\frac{1}{a(t)} - b(t)\right)\cos\theta(s)\sin\theta(s)\right) ds\right].$$

Como, atendendo às hipóteses sobre $a(t)$ e $b(t)$ e ao resultado do estudo do intervalo máximo para $\theta(t)$, a função integranda está definida e é contínua em, pelo menos, $[t_0, +\infty)$, então podemos concluir que $\rho(t)$ estará também definido neste intervalo, o que mostra o pretendido.

b) Usando a transformação de Prüfer para estes valores de $a(t)$ e $b(t)$ o sistema (85) toma a seguinte forma

$$\begin{cases} \theta' = t\cos^2\theta + t\sin^2\theta \\ \rho' = (t-t)\rho\cos\theta\sin\theta \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \theta' = t \\ \rho' = 0 \end{cases}$$

cuja solução geral é

$$\begin{cases} \theta(t) = \frac{t^2}{2} + \beta \\ \rho(t) = \gamma \end{cases}$$

onde β e γ são constantes reais arbitrárias. Consequentemente, a solução geral do problema dado é $x(t) = \rho(t)\sin\theta(t) = \gamma\sin\left(\frac{t^2}{2} + \beta\right)$ e como $x'(t) = t\gamma\sin\left(\frac{t^2}{2} + \beta\right)$, a condição inicial dada implica que se tem de ter

$$\begin{cases} \sqrt{3} = \gamma\sin\left(\frac{(\sqrt{2})^2}{2} + \beta\right) \\ \sqrt{2} = \sqrt{2}\gamma\sin\left(\frac{(\sqrt{2})^2}{2} + \beta\right) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3} = \gamma\sin(\beta+1) \\ 1 = \gamma\sin(\beta+1) \end{cases}.$$

Dividindo a primeira equação pela segunda tem-se $\tan(\beta+1) = \sqrt{3}$ e portanto $\beta + 1 = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{N}_0$, ou seja, $\beta = \frac{\pi}{3} - 1 + k\pi$. Consequentemente, $1 = \gamma\cos\left(\frac{\pi}{3} - 1 + k\pi + 1\right) = \gamma\cos\left(\frac{\pi}{3} + k\pi\right)$ ou seja $\gamma = 2(-1)^k,\ k \in \mathbb{N}_0$. Observando que todas as expressões, com todos os possíveis diferentes valores de k, são iguais, podemos, sem perda de generalidade, considerar $k = 0$ e a solução pretendida vem dada por

$$x(t) = 2\sin\left(\frac{t^2}{2} + \frac{\pi}{3} - 1\right).$$

V.

a) Iremos recorrer ao método de Fourier. Fazendo $u(x,y) = X(x)Y(y)$ tem-se $u_{xx} = X''(x)Y(y)$ e $u_{yy} = X(x)Y''(y)$ pelo que a equação de Laplace no quadrado $]0,1[^2$ pode ser escrita como $X''Y + XY'' = 0$. Supondo que $u = XY$ não se anula em $]0,1[^2$ podemos dividir esta equação por u e separar variáveis obtendo-se

$$\frac{X''}{X}(x) = -\frac{Y''}{Y}(y), \qquad (x,y) \in]0,1[^2$$

e portanto terá de existir pelo menos uma constante real σ tal que

$$\frac{X''}{X}(x) = \sigma = -\frac{Y''}{Y}(y), \qquad (x,y) \in]0,1[^2$$

o que resulta no seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias lineares

$$\begin{aligned} X'' - \sigma X &= 0 \\ Y'' + \sigma Y &= 0. \end{aligned}$$

A condição na fronteira para $u(x,y)$ dada no enunciado pode escrever-se do seguinte modo: $u(1,y) = 0, u(0,y) = 0, u(x,1) = 0$, e $u(x,0) = f(x)$ (cf. Figura 68).

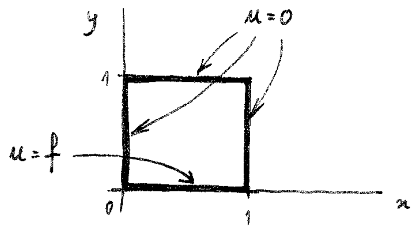


Figura 68: Esquema das condições na fronteira dadas no enunciado.

Assim, nas novas variáveis tem-se $X(1) = X(0) = Y(1) = 0$ pelo que é conveniente começarmos por considerar o problema de valores na fronteira para a equação para $X(x)$:

$$\begin{cases} X'' - \sigma X = 0 \\ X(0) = X(1) = 0. \end{cases}$$

Estudaremos de seguida a possibilidade de obtenção de soluções *não-triviais* (não identicamente nulas) deste problema:

- Considere-se $\sigma = 0$. A equação diferencial fica reduzida a $X'' = 0$ cujas soluções são $X(x) = ax + b$ e atendendo às condições na fronteira $0 = X(0) = b$ e $0 = X(1) = a + b$ conclui-se imediatamente que $a = b = 0$ e portanto a única solução do problema é a solução trivial $X(x) \equiv 0$.

- Seja agora $\sigma > 0$. A solução geral da equação é $X(x) = ae^{\sqrt{\sigma}x} + be^{-\sqrt{\sigma}x}$. Atendendo às condições na fronteira tem-se $0 = X(0) = a + b$ e $0 = X(1) = ae^{\sqrt{\sigma}} + be^{\sqrt{\sigma}}$ cuja única solução é $a = b = 0$ fornecendo como única solução da equação a função identicamente nula $X(x) \equiv 0$.
- Finalmente tome-se $\sigma < 0$. A solução geral real da equação diferencial é agora $X(x) = a\cos(\sqrt{|\sigma|}x) + b\sin(\sqrt{|\sigma|}x)$. Atendendo às condições na fronteira tem-se $0 = X(0) = a\cos 0 + b\sin 0 = a$ e portanto $0 = X(1) = 0\cos\sqrt{|\sigma|} + b\sin\sqrt{|\sigma|} = b\sin\sqrt{|\sigma|}$ concluindo-se que, ou $b = 0$ e obtemos a solução $X(x) \equiv 0$, ou $\sin\sqrt{|\sigma|} = 0$, isto é, $\sqrt{|\sigma|} = \sqrt{|\sigma_k|} = k\pi, k \in \mathbb{N}_1$, obtendo-se assim infinitas soluções do problema de valores na fronteira, em particular as funções $X_k(x) = \sin(k\pi x), \quad \forall k \in \mathbb{N}_1$, e todas as combinações lineares de um número finito destas funções.

Para a equação para $Y(y)$ já sabemos que $\sigma = -k^2\pi^2$ e portanto a equação pode ser escrita como $Y'' - k^2\pi^2 Y = 0$ cuja solução geral é $Y(y) = a_k e^{k\pi y} + b_k e^{-k\pi y}$ com a_k e b_k constantes reais arbitrárias (eventualmente diferentes para diferentes valores de k) que terão de ser escolhidas atendendo às condições na fronteira. Assim, a solução formal da equação de Laplace em Ω será dada por

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k e^{k\pi y} + b_k e^{-k\pi y}\right) \sin(k\pi x)$$

em que a_k e b_k têm de ser tais que se verifiquem as condições na fronteira

$$\begin{aligned} f(x) = u(x,0) &= \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)\sin(k\pi x) \\ 0 = u(x,1) &= \sum_{k=1}^{\infty} (a_k e^{k\pi} + b_k e^{-k\pi})\sin(k\pi x). \end{aligned}$$

Da segunda igualdade tem-se $a_k = -b_k e^{-2k\pi}$ e substituindo esta expressão na primeira vem

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-2k\pi}) b_k \sin k\pi x$$

concluindo-se assim que $(1 - e^{-2k\pi})b_k$ são os coeficientes da série de Fourier de senos da função $f(x)$, ou seja

$$b_k = \frac{2}{1 - e^{-2k\pi}} \int_0^1 f(x)\sin(k\pi x)dx.$$

Designando por f_k o valor do integral $\int_0^1 f(x)\sin(k\pi x)dx$ pode-se escrever $b_k = 2f_k/(1 - e^{-2k\pi}) = 2f_k e^{k\pi}/(e^{k\pi} - e^{-k\pi})$ e $a_k = -2f_k e^{-k\pi}/(e^{k\pi} - e^{-k\pi})$ pelo que a solução formal do problema dado é

$$u(x,y) = 2\sum_{k=1}^{\infty} f_k \frac{e^{k\pi(1-y)} - e^{-k\pi(1-y)}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} \sin(k\pi x).$$

b) Comecemos por verificar que a solução formal $u(x,y)$ dada na alínea anterior é contínua em $[0,1]^2$. Observando que todos os termos da série de $u(x,y)$ são funções de classe $\mathcal{C}^\infty$, e portanto são contínuas, é suficiente verificar se a série é uniformemente convergente. Usaremos o teste-M de Weierstrass. Para majorar os termos da série formal em $(x,y) \in [0,1]^2$ observe-se que é obvio que se tem $|\sin(k\pi y)| \leq 1$ e que a função

$$\varphi(y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{k\pi(1-y)} - e^{-k\pi(1-y)}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}}$$

tem a seguinte derivada

$$\varphi'(y) = -k\pi \frac{e^{-k\pi(1-y)} + e^{k\pi(1-y)}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}},$$

a qual é sempre negativa e portanto $\varphi(y)$ é estritamente decrescente, sendo o seu máximo em $[0,1]$ atingido quando $y=0$ e o seu mínimo quando $y=1$:

$$-1 = \varphi(1) < \varphi(y) < \varphi(0) = 1.$$

Consequentemente tem-se $|\varphi(y)| \leq 1$ em $[0,1]$ e pode-se majorar o termo geral da série em $[0,1]^2$ como se segue

$$\left| f_k \frac{e^{k\pi(1-y)} - e^{-k\pi(1-y)}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} \sin(k\pi x) \right| \leq |f_k|.$$

Para determinar a variação de $|f_k|$ com k temos de ter em atenção que , por hipótese, $f \in \mathcal{C}^4([0,1])$ e $f(0) = f(1) = 0$. Integrando por partes a expressão de f_k tem-se

$$\begin{aligned}
f_k &= \int_0^1 f(x) \sin(k\pi x) dx \\
&= \frac{1}{k\pi} \int_0^1 f'(x) \cos(k\pi x) dx \\
&= -\frac{1}{k^2\pi^2} \int_0^1 f''(x) \sin(k\pi x) dx \\
&= -\frac{1}{k^3\pi^3} \int_0^1 f'''(x) \cos(k\pi x) dx \\
&= \frac{1}{k^4\pi^4} \int_0^1 f^{(iv)}(x) \sin(k\pi x) dx
\end{aligned}$$

e portanto

$$|f_k| \leq \frac{1}{k^4\pi^4} M$$

onde $M = \displaystyle\int_0^1 |f^{(iv)}(x)| dx < \infty$ visto que a função integranda é contínua. Como a série $\sum_k \frac{1}{k^4}$ é convergente conclui-se, pelo teste-M de Weierstrass, que a série é uniformemente convergente e que, portanto, a função $u(x,y)$ é (pelo menos) contínua.

Para verificar se u é de classe $\mathcal{C}^2$ prosseguiremos de modo análogo. Comecemos pelas derivadas em ordem a x :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(f_k\frac{e^{k\pi(1-y)}-e^{-k\pi(1-y)}}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}}\sin(k\pi x)\right)\right| &= \left|k\pi f_k\frac{e^{k\pi(1-y)}-e^{-k\pi(1-y)}}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}}\cos(k\pi x)\right| \\
&\leq k\pi|f_k| \leq \frac{M}{k^3\pi^3} \\
\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(f_k\frac{e^{k\pi(1-y)}-e^{-k\pi(1-y)}}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}}\sin(k\pi x)\right)\right| &= \left|-k^2\pi^2 f_k\frac{e^{k\pi(1-y)}-e^{-k\pi(1-y)}}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}}\sin(k\pi x)\right| \\
&\leq k^2\pi^2|f_k| \leq \frac{M}{k^2\pi^2}
\end{aligned}$$

Para as derivadas em ordem a y tem-se

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial}{\partial y}\left(f_k\frac{e^{k\pi(1-y)}-e^{-k\pi(1-y)}}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}}\sin(k\pi x)\right)\right| &= \left|-k\pi f_k\frac{e^{k\pi(1-y)}+e^{-k\pi(1-y)}}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}}\sin(k\pi x)\right| \\
&\leq \frac{M}{k^3\pi^3}\frac{e^{k\pi(1-y)}+e^{-k\pi(1-y)}}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}} \\
\left|\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(f_k\frac{e^{k\pi(1-y)}-e^{-k\pi(1-y)}}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}}\sin(k\pi x)\right)\right| &= \left|k^2\pi^2 f_k\frac{e^{k\pi(1-y)}-e^{-k\pi(1-y)}}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}}\sin(k\pi x)\right| \\
&\leq k^2\pi^2|f_k| \leq \frac{M}{k^2\pi^2}
\end{aligned}$$

Para estimar o comportamento da primeira derivada em ordem a y temos de estudar o comportamento de $\psi(y) = e^{k\pi(1-y)} + e^{-k\pi(1-y)}$. Observe-se que, para $0 \leq y < 1$, tem-se $\psi'(y) = -k\pi(e^{k\pi(1-y)} - e^{-k\pi(1-y)}) < 0$ e portanto $\psi(y)$ é estritamente decrescente, ou seja, para qualquer $y \in [0,1]$ verifica-se

$$2 = \psi(1) \leq \psi(y) \leq \psi(0) = e^{k\pi} + e^{-k\pi}.$$

Conclui-se daqui que

$$\frac{e^{k\pi(1-y)}+e^{-k\pi(1-y)}}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}} = \frac{\psi(y)}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}} \leq \frac{e^{k\pi}+e^{-k\pi}}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}}$$

e como

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e^{k\pi}+e^{-k\pi}}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}} = 1$$

concluimos que esta sucessão é majorada por alguma constante real $N > 1$ e portanto um majorante para o módulo da primeira derivada em ordem a y é $\frac{MN}{k^3\pi^3}$.

Finalmente, para a derivada cruzada tem-se

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(f_k \frac{e^{k\pi(1-y)} - e^{-k\pi(1-y)}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} \sin(k\pi x)\right)\right| &= \left|-k^2\pi^2 f_k \frac{e^{k\pi(1-y)} + e^{-k\pi(1-y)}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} \cos(k\pi x)\right| \\
&\leq k^2\pi^2 |f_k| N \leq \frac{MN}{k^2\pi^2}
\end{aligned}$$

Estes resultados e o teste-M de Weierstrass permitem concluir que as séries das primeiras e das segundas derivadas parciais são uniformemente convergentes, o que permite concluir que $u(x, y)$ tem segundas derivadas parcias contínuas e que, portanto, é uma solução clássica do problema posto.

Exame de 18.7.97 e resolução.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

(Mecânica)

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

Data: 18/7/1997
Duração: 3h00.

I.

Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias lineares

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \tag{87}$$

a) Determine os valores e os vectores próprios da matriz do sistema (87).

b) Determine a solução geral real de (87).

c) Identifique os dois subespaços bidimensionais de $\mathbb{R}^4$ que são invariantes para (87).

d) Esboce os retratos de fase da restrição de (87) aos subespaços bidimensionais que determinou na alínea anterior.

II.

Considere a equação diferencial linear

$$w^{(iv)} - w''' + 8w' - 8w = t^2 + 1 \tag{88}$$

a) Determine a solução geral real da equação homogénea correspondente a (88).

b) Determine uma solução particular de (88) e escreva uma expressão para a solução geral real da equação dada.

III.

Determine a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+y}{1-x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

indicando explicitamente o seu intervalo máximo $I_{\max}$ e qual a razão por que a solução não pode ser prolongada a intervalos $J \supset I_{\max}$.

IV.

Os movimentos vibratórios de uma molécula diatómica podem ser modelados, em primeira aproximação, pela equação diferencial

$$x'' + \frac{1}{\mu}\frac{dV}{dx}(x) = 0 \tag{89}$$

onde $x = x(t) > 0$ é a distância interatómica, $V = V(x)$ é o potencial interatómico e $\mu > 0$ é a massa reduzida do sistema. Considere as novas variáveis dependentes $x_1 \stackrel{\text{def}}{=} x$ e $x_2 \stackrel{\text{def}}{=} x'$.

a) Usando a mudança de variáveis dada, escreva o sistema de primeira ordem correspondente a (89).

b) Mostre que a função $E(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\mu x_2^2 + V(x_1)$ é uma constante do movimento para o sistema que obteve na alínea anterior.

c) Esboce o retrato de fases do sistema quando o potencial interatómico é o potencial de Lennard-Jones definido em $\mathbb{R}^+$ por

$$V(x) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{a}{x}\right)^{12} - \left(\frac{a}{x}\right)^{6}\right],$$

onde ε e a são constantes positivas.

d) Identifique no retrato de fases da alínea anterior as regiões correspondentes a órbitas limitadas e a órbitas ilimitadas. Interprete fisicamente os resultados.

V.

Seja Ω uma placa rectangular disposta paralelamente aos eixos coordenados e feita de um material anisotrópico tal que os coeficientes de condução térmica na direcção do eixo dos xx, D_1, e na direcção do eixo dos yy, D_2, são diferentes. A evolução da distribuição de temperatura na placa é modelada pela equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D_2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad (t, x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \tag{90}$$

onde $u = u(t, x, y)$ é a temperatura, no instante t, do ponto (x, y) da placa Ω.

1. Mostre que a mudança de variáveis $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$ definida por $\xi \stackrel{\text{def}}{=} D_1^{-1/2}x$ e $\eta \stackrel{\text{def}}{=} D_2^{-1/2}y$ transforma a equação (90) na equação seguinte

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}, \qquad (t, \xi, \eta) \in \mathbb{R}^+ \times \tilde{\Omega} \tag{91}$$

onde $v(t, \xi, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} u(t, x(\xi), y(\eta))$. Relacione $\tilde{\Omega}$ com Ω.

2. Seja $\Omega =]0, L_1[\times]0, L_2[$ e considere $L_1 D_1^{-1/2} = L_2 D_2^{-1/2} = \pi$.

   a) Suponha que na fronteira $\partial\Omega$ da placa Ω são impostas condições de Dirichlet homogéneas. Utilizando o método de separação de variáveis, obtenha uma expressão para a solução geral formal do problema (91) correspondente.

   b) Suponha que a distribuição inicial ($t = 0$) da temperatura na placa Ω é representada por uma função real dada $f(x, y)$. Forneça uma expressão formal para a distribuição de temperaturas na placa em qualquer instante subsequente $t > 0$.

Resolução:

I.

a) Designemos por A a matriz do sistema. Os valores próprios da matriz são os zeros do seu polinómio característico,

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -2-\lambda & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 & 0 \\ -2 & -2-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda(\lambda+1)[(\lambda-2)(\lambda+2)+6] \\ &= \lambda(\lambda+1)(\lambda^2+2) \end{aligned}$$

ou seja, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = i\sqrt{2}$ e $\lambda_4 = -i\sqrt{2}$. Os vectores próprios são os seguintes:

- Correspondentes ao valor próprio $\lambda_1 = 0$:

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2v_1+3v_2 \\ -2v_1-2v_2-2v_3-2v_4 \\ 0 \\ v_3-v_4 \end{bmatrix}$$

e portanto os vectores próprios são $\mathbf{v} = \alpha(-6, 4, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ onde α é um escalar arbitrário.

- Correspondentes ao valor próprio $\lambda_2 = -1$:

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3w_1+3w_2 \\ -2w_1-w_2-2w_3-2w_4 \\ w_3 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

pelo que $\mathbf{w} = \beta(2, -2, 0, -1)^{\mathrm{T}}$ com β um escalar arbitrário.

- Correspondentes ao valor próprio $\lambda_3 = i\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \begin{bmatrix} 2-i\sqrt{2} & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -2-i\sqrt{2} & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1-i\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (2-i\sqrt{2})u_1+3u_2 \\ -2u_1-(2+i\sqrt{2})u_2-2u_3-2u_4 \\ -i\sqrt{2}u_3 \\ u_3-(1+i\sqrt{2})u_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e então $\mathbf{w} = \gamma(-3, 2-i\sqrt{2}, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ com γ qualquer escalar.

- Correspondentes ao valor próprio $\lambda_4 = -i\sqrt{2}$, o qual é conjugado do valor próprio λ_3, tem-se como vectores próprios os vectores $\mathbf{z} = \delta(-3, 2 + i\sqrt{2}, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ com δ constante.

b) Uma solução complexa correspondente ao valor próprio $i\sqrt{2}$ é

$$\left(\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)(\cos(\sqrt{2}t) + i\sin(\sqrt{2}t)) =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\cos(\sqrt{2}t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\sin(\sqrt{2}t)\right) + i\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\cos(\sqrt{2}t) + \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\sin(\sqrt{2}t)\right)$$

$$= \begin{bmatrix} -3\cos(\sqrt{2}t) \\ 2\cos(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -3\sin(\sqrt{2}t) \\ 2\sin(\sqrt{2}t) - \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente, o método dos valores e vectores próprios fornece a seguinte solução geral real do sistema (87)

$$\mathbf{x}(t) =$$

$$= a\begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}e^{-t} + c\begin{bmatrix} -3\cos(\sqrt{2}t) \\ 2\cos(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} -3\sin(\sqrt{2}t) \\ 2\sin(\sqrt{2}t) - \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde a, b, c e d são constantes reais arbitrárias.

c) Atendendo aos resultados sobre valores e vectores próprios obtidos na alínea a), ou à expressão da solução geral real da alínea anterior, conclui-se imediatamente que os subespaços bidimensionais de $\mathbb{R}^4$ que são invariantes para o sistema são

$$\begin{aligned} E &= L\left\{(-6, 4, 1, 1)^{\mathrm{T}}, (2, -2, 0, -1)^{\mathrm{T}}\right\} = E_0 + E_{-1} \\ F &= L\left\{(-3, 2, 0, 0)^{\mathrm{T}}, (0, -\sqrt{2}, 0, 0)^{\mathrm{T}}\right\} = L\left\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\right\}, \end{aligned}$$

onde E_λ é o espaço próprio correspondente ao valor próprio λ.

d) Como $E = E_0 + E_{-1}$ e E_0 é o espaço nulo da matriz A conclui-se que o esboço do retrato de fase do sistema restringido a E é indicado na Figura 69.

Para a restrição do sistema a F tem-se o seguinte: representando apenas as componentes não-nulas, as órbitas do sistema são elipses com a posição indicada na Figura 70, onde $\mathbf{v}_R = (-3, 2, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ e $\mathbf{v}_I = (0, -\sqrt{2}, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. Para decidir o sentido das órbitas observe-se que no eixo $\mathbf{e}_2$ os vectores tangentes às órbitas são $\mathbf{x}' = A \cdot (0, \beta, 0, 0)^{\mathrm{T}} = \beta(3, -2, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ e portanto o esboço do retrato de fase é apresentado na Figura 71.

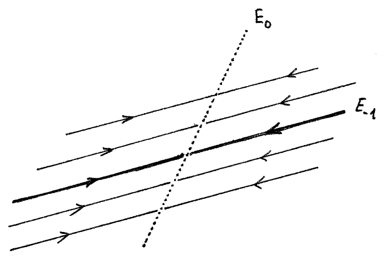


Figura 69: Retrato de fase do sistema (87) restringido a E.

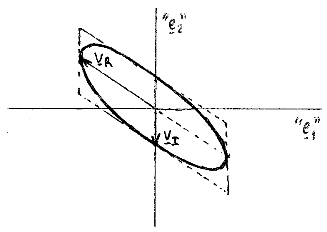


Figura 70: Posição das elipses que constituem as órbitas do sistema restringido a F.

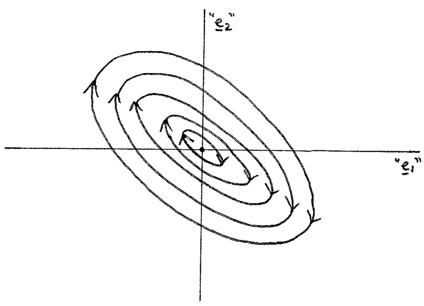


Figura 71: Retrato de fase do sistema (87) restringido a F.

II.

a) Sendo (88) uma equação linear de quarta ordem, de coeficientes constantes, tem-se, escrevendo $D = \frac{d}{dt}$,

$$(D^4 - D^3 + 8D - 8)w = t^2 + 1.$$

Seja $p(\lambda) \overset{\text{def}}{=} \lambda^4 - \lambda^3 + 8\lambda - 8$. Um zero de $p(\lambda)$ obtem-se facilmente e é igual a 1. Dividindo $p(\lambda)$ por $\lambda - 1$ tem-se $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^3 + 8)$. Como $\lambda = -2$ é um zero de $\lambda^3 + 8$ tem-se, dividindo este polinómio por $\lambda + 2$, a factorização $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 4)$. Usando a fórmula resolvente dos polinómios de segundo grau obtem-se $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - (1 + i\sqrt{3}))(\lambda - (1 - i\sqrt{3}))$. A solução geral real da equação homogénea correspondente à equação (88) é, então,

$$w(t) = ae^t + be^{-2t} + ce^t \cos(\sqrt{3}t) + de^t \sin(\sqrt{3}t),$$

onde a, b, c e d são constantes reais arbitrárias.

b) Usando o método dos palpites, como $\lambda = 0$ não é uma raiz do polinómio $p(\lambda)$ conclui-se que uma solução particular de (88) pode ser da seguinte forma

$$w_{\text{part}}(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma.$$

Consequentemente, substituindo na equação (88), tem-se $(0) - (0) + 8(2\alpha t + \beta) - 8(\alpha t^2 + \beta t + \gamma) = t^2 + 1$, ou seja

$$\begin{cases} -8\alpha = 1 \\ 16\alpha - 8\beta = 0 \\ 8\beta - 8\gamma = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -1/8 \\ \beta = -1/4 \\ \gamma = -3/8 \end{cases}$$

pelo que uma solução particular é $w_{\text{part}}(t) = -\frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{4}t - \frac{3}{8}$ e a solução geral de (88) pode ser dada por

$$w(t) = ae^t + be^{-2t} + ce^t \cos(\sqrt{3}t) + de^t \sin(\sqrt{3}t) - \frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{4}t - \frac{3}{8}.$$

III.

A equação diferencial dada é separável e portanto a solução é facilmente calculada por integração directa, usando a condição inicial,

$$\begin{aligned}
& \int_0^x \frac{1}{1+y}\frac{dy}{dx}dx = \int_0^x \frac{1}{1-x}dx \iff \\
\iff\ & \int_0^{y(x)} \frac{1}{1+y}dy = \int_0^x \frac{1}{1-x}dx \\
\iff\ & \log|1 + y(x)| - 0 = -\log|1 - x| + 0 \\
\iff\ & \log|1 + y(x)| + \log|1 - x| = 0 \\
\iff\ & \log|(1 + y(x))(1 - x)| = 0 \\
\iff\ & (1 + y(x))(1 - x) = 1 \quad \text{(atendendo a que quando } x = 0 \text{ vem } y(0) = 0) \\
\iff\ & y(x) = \frac{x}{1-x}
\end{aligned}$$

É evidente desta expressão que o intervalo máximo de existência da solução é $I_{\max} =]-\infty, 1[$ visto que 0 está neste intervalo, o qual é o maior intervalo de $\mathbb{R}$ onde a expressão acima define uma função de classe $\mathcal{C}^1$. Não é possível estender a solução para intervalos J contendo $I_{\max}$ porque $\lim_{x \to 1^-} y(x) = +\infty$ e portanto qualquer prolongamento real de $y(x)$ a $x = 1$ terá de resultar numa função descontínua, a qual, de acordo com a definição de solução por nós adoptada, não poderá ser solução.

IV.

a) Da mudança de variáveis dada tem-se imediatamente $x_1' = x' = x_2$ e $x_2' = x'' = -\frac{1}{\mu}\frac{dV}{dx}(x) = -\frac{1}{\mu}\frac{dV}{dx_1}(x_1)$. Portanto o sistema de primeira ordem é

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\dfrac{1}{\mu}\dfrac{dV}{dx_1}(x_1). \end{cases} \tag{92}$$

b) Seja $x_1 = x_1(t)$ e $x_2 = x_2(t)$ uma solução do sistema (92). Calculando a derivada de E ao longo da órbita $(x_1(t), x_2(t))$ tem-se, para todo o t,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(x_1(t), x_2(t)) &= \frac{\partial E}{\partial x_1}x_1' + \frac{\partial E}{\partial x_2}x_2' \\ &= \frac{dV}{dx_1}x_1' + \mu x_2 x_2' \\ &= \frac{dV}{dx_1}x_2 + \mu x_2 \cdot \left(-\frac{1}{\mu}\frac{dV}{dx_1}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

pelo que E é constante ao longo das órbitas de (92), ou seja, é uma constante do movimento.

c) Sendo $V(x) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{a}{x}\right)^{12} - \left(\frac{a}{x}\right)^6\right]$ os pontos de equilíbrio de (92) são os pontos de $\mathbb{R}^2$ da forma $(\hat{x}_1, 0)$, onde $\hat{x}_1$ é um zero de $\frac{dV}{dx_1}(x_1)$. Como

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} &= -4\varepsilon\left[12\left(\frac{a}{x}\right)^{12}\frac{1}{x} - 6\left(\frac{a}{x}\right)^6\frac{1}{x}\right] \\ &= -\frac{48\varepsilon}{x}\left(\frac{a}{x}\right)^6\left[\left(\frac{a}{x}\right)^6 - \frac{1}{2}\right] \end{aligned}$$

pelo que se observa imediatamente que o único zero é $\hat{x}_1 = a\sqrt[6]{2}$. Da expressão acima para a derivada de V é também evidente que $V(x)$ é estritamente decrescente para $0 < x < a\sqrt[6]{2}$ e estritamente crescente para $x > a\sqrt[6]{2}$. Por outro lado, da definição de V conclui-se facilmente que $V(x) \to +\infty$ quando $x \to 0^+$ e que $V(x) \to 0$ quando $x \to +\infty$. Esta informação permite-nos já traçar o gráfico de $V(x_1)$ com $x_1 > 0$. Este é apresentado na Figura 72,

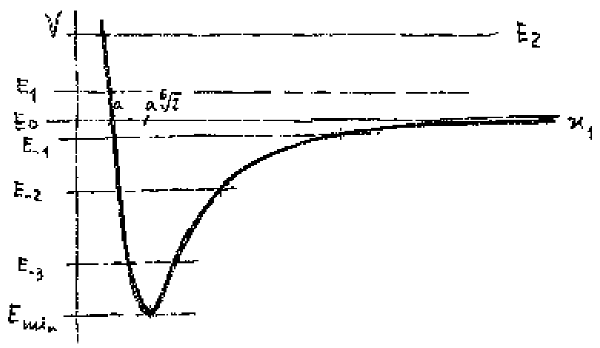


Figura 72: Gráfico de V em $\mathbb{R}^+$.

juntamente com os "níveis de energia" que usaremos para traçar o retrato de fase do sistema, $E_{\min} < E_{-3} < E_{-2} < E_{-1} < E_0 = 0 < E_1 < E_2$, onde $E_{\min} \stackrel{\text{def}}{=} \min\limits_{x_1 \in \mathbb{R}^+} V(x_1) = V(a\sqrt[6]{2})$.

Como, pela alínea anterior, a função $\frac{1}{2}\mu x_2^2 + V(x_1)$ é uma constante do movimento, conclui-se que o retrato do sistema (92) é que se apresenta na Figura 73, onde C_{E_j} é definido por $C_{E_j} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} : E(x_1, x_2) = E_j\}$, ou seja, é o conjunto de nível E_j da função "energia total" $E(x_1, x_2)$,

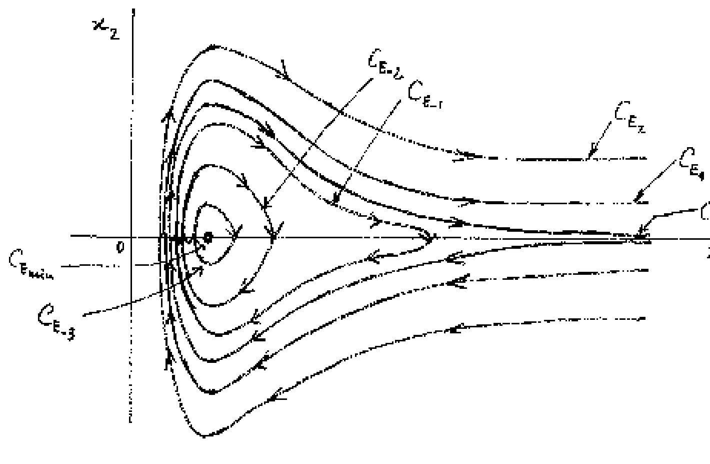


Figura 73: Retrato de fases de (92).

O sentido das órbitas, indicado na figura acima, pode ser obtido atendendo a que, no semi-eixo positivo dos x_1s, os vectores tangentes às órbitas são $(x_1', x_2')^{\mathrm{T}} = \left(0, -\frac{1}{\mu}\frac{dV}{dx_1}(x_1)\right)^{\mathrm{T}}$. Como V é decrescente em $]0, a\sqrt[6]{2}[$ tem-se $x_2' > 0$ para essa região do espaço de fases, como se apresentou acima.

d) Pelo retrato de fase da alínea anterior observa-se imediatamente que a separatriz entre órbitas limitadas e ilimitadas é a órbita assente na curva de nível C_{E_0} (ela própria uma órbita ilimitada) e conclui-se ainda o que se apresenta na Figura 74.

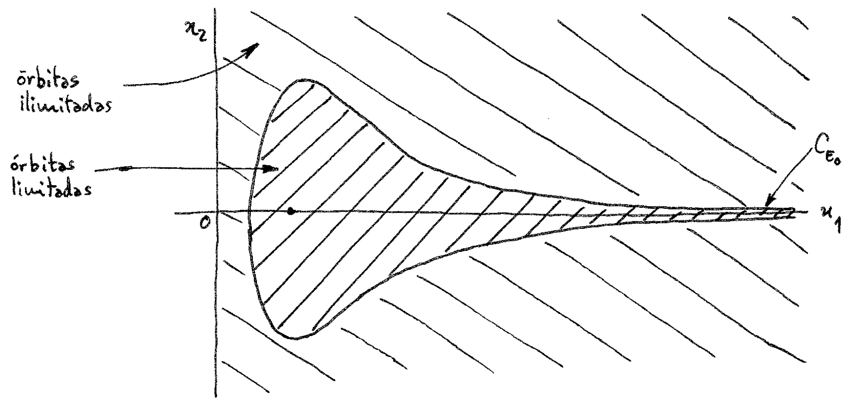


Figura 74: Solução da alínea d).

As órbitas limitadas são periódicas e correspondem a verdadeiros movimentos oscilatórios dos dois átomos em torno de uma distância interatómica de equilíbrio (a qual é igual a $a\sqrt[6]{2}$). São as órbitas de "baixa" energia $E < E_0$. As órbitas de "alta" energia, com energias totais $E > E_0$, correspondem a movimentos não-periódicos em que a distância x_1 entre os dois átomos tende para infinito quando $t \to +\infty$: a "molécula" diatómica é demasiado energética para ser estável e os seus átomos constituintes separam-se irreversivelmente (a menor energia que é necessário fornecer ao sistema para que este comportamento ocorra é igual a $E_0 - E_{\min} = -V(a\sqrt[6]{2}) > 0$ e designa-se por energia de dissociação da molécula em causa).

V.

1. Observando que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dx}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right) D_1^{-1/2} = D_1^{-1/2}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)\frac{d\xi}{dx} = D_1^{-1}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}$$

e analogamente, trocando x por y e ξ por η,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = D_2^{-1}\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}.$$

Conclui-se assim que $D_1 u_{xx} + D_2 u_{yy} = v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta}$. Como $v = u$ e t não é alterado pela mudança de variáveis, os membros esquerdos de (90) e de (91) são claramente iguais, concluindo-se que as equações são equivalentes, como se pretendia. A relação entre $\tilde{\Omega}$ e Ω é facilmente conseguida uma vez que Ω é um rectângulo de lados paralelos aos eixos coordenados, ou seja, do tipo $\Omega =]a,b[\times]c,d[$. Portanto, como $a < x < b \Leftrightarrow a < D_1^{1/2}\xi < b \Leftrightarrow D_1^{-1/2}a < \xi < D_1^{-1/2}b$ e analogamente para o intervalo de variação da variável y, tem-se

$$\tilde{\Omega} = \Big]D_1^{-1/2}a, D_1^{-1/2}b\Big[\times\Big]D_2^{-1/2}c, D_2^{-1/2}d\Big[.$$

2.a) Atendendo ao enunciado, o problema a resolver nesta alínea é determinar uma expressão para a solução geral formal de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}, & (t,\xi,\eta) \in \mathbb{R}^+\times]0,\pi[^2 \\ v(t,0,\eta) = v(t,\pi,\eta) = 0, & t \geq 0, \eta \in [0,\pi] \\ v(t,\xi,0) = v(t,\xi,\pi) = 0, & t \geq 0, \xi \in [0,\pi] \end{cases} \tag{93}$$

Procurando soluções do tipo $v(t,\xi,\eta) = T(t)X(\xi)Y(\eta)$, a equação diferencial em (93) pode ser escrita como $T'XY = TX''Y + TXY''$ e supondo que $v(t,\xi,\eta) \neq 0$ para todos os pontos (t,ξ,η) de $\mathbb{R}^+\times]0,\pi[^2$, tem-se, dividindo a equação anterior por $v = TXY$,

$$\frac{T'}{T}(t) = \frac{X''}{X}(\xi) + \frac{Y''}{Y}(\eta), \qquad \forall (t,\xi,\eta) \in \mathbb{R}^+\times]0,\pi[^2.$$

Como o membro direito é independente de t e o esquerdo é independente de (ξ,η) terá de existir pelo menos uma constante $\sigma \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{T'}{T}(t) = \sigma = \frac{X''}{X}(\xi) + \frac{Y''}{Y}(\eta).$$

Observe-se agora que, na segunda equação,

$$\sigma = \frac{X''}{X}(\xi) + \frac{Y''}{Y}(\eta),$$

pode-se novamente separar variáveis: escrevendo a equação como

$$\frac{X''}{X}(\xi) = -\frac{Y''}{Y}(\eta) + \sigma, \qquad (\xi,\eta) \in]0,\pi[^2$$

e notando que o membro esquerdo é independente de η e o direito é independente de ξ conclui-se que tem de existir pelo menos um número real λ tal que

$$\frac{X''}{X}(\xi) = \lambda = -\frac{Y''}{Y}(\eta) + \sigma.$$

As condições na fronteira são transformadas do seguinte modo: uma vez que, por hipótese, $v(t,\xi,\eta) \neq 0$ em $\mathbb{R}^+\times]0,\pi[^2$, conclui-se que

$$\begin{array}{lcl} 0 = v(t,0,\eta) = T(t)X(0)Y(\eta) & \Longrightarrow & X(0) = 0 \\ 0 = v(t,\pi,\eta) = T(t)X(\pi)Y(\eta) & \Longrightarrow & X(\pi) = 0 \\ 0 = v(t,\xi,0) = T(t)X(\xi)Y(0) & \Longrightarrow & Y(0) = 0 \\ 0 = v(t,\xi,\pi) = T(t)X(\xi)Y(\pi) & \Longrightarrow & Y(\pi) = 0 \end{array}$$

e portanto o sistema (93) fica transformado em

$$\begin{cases} T' = \sigma T \\ X'' - \lambda X = 0, \qquad X(0) = 0 = X(\pi) \\ Y'' - (\sigma - \lambda)Y = 0, \qquad Y(0) = 0 = Y(\pi) \end{cases}$$

Comecemos por estudar a possibilidade de obtenção de soluções *não-triviais* (não identicamente nulas) da equação para $X(\xi)$:

- Considere-se $\lambda = 0$. A equação diferencial fica reduzida a $X'' = 0$ cujas soluções são $X(\xi) = a\xi + b$ e atendendo às condições na fronteira $0 = X(0) = b$ e $0 = X(\pi) = a\pi + b$ conclui-se imediatamente que $a = b = 0$ e portanto a única solução do problema é a solução trivial $X(\xi) \equiv 0$.
- Seja agora $\sigma > 0$. A solução geral da equação é $X(\xi) = ae^{\sqrt{\lambda}\xi} + be^{-\sqrt{\lambda}\xi}$. Atendendo às condições na fronteira tem-se $0 = X(0) = a + b$ e $0 = X(\pi) = ae^{\sqrt{\lambda}\pi} + be^{-\sqrt{\lambda}\pi}$ cuja única solução é $a = b = 0$ fornecendo como única solução da equação a função identicamente nula $X(\xi) \equiv 0$.
- Finalmente tome-se $\sigma < 0$. A solução geral real da equação diferencial é agora $X(\xi) = a\cos(\sqrt{|\lambda|}\xi) + b\sin(\sqrt{|\lambda|}\xi)$. Atendendo às condições na fronteira tem-se $0 = X(0) = a\cos 0 + b\sin 0 = a$ e portanto $0 = X(\pi) = 0\cos(\sqrt{|\lambda|}\pi) + b\sin(\sqrt{|\lambda|}\pi) = b\sin(\sqrt{|\lambda|}\pi)$ concluindo-se que, ou $b = 0$ e obtemos a solução $X(\xi) \equiv 0$, ou $\sin(\sqrt{|\lambda|}\pi) = 0$, isto é, $\sqrt{|\lambda|} = \sqrt{|\lambda_k|} = k, k \in \mathbb{N}_1$, obtendo-se assim infinitas soluções do problema de valores na fronteira, em particular as funções $X_k(\xi) = \sin(k\xi), \quad \forall k \in \mathbb{N}_1$, e todas as combinações lineares de um número finito destas funções.

Vejamos agora a equação para $Y(\eta)$. Sabemos já que $\lambda = \lambda_k = -k^2$, ou seja, para cada $k \in \mathbb{N}_1$ fixo, temos que resolver o problema de valores na fronteira

$$\begin{cases} Y'' - (\sigma + k^2)Y = 0 \\ Y(0) = 0 = Y(\pi). \end{cases}$$

Chamemos μ a $\sigma + k^2$. A equação e a condição na fronteira são precisamente iguais às que estudámos acima substituindo X por Y e λ por μ. Assim, sabemos que este problema só tem soluções não-triviais quando $\mu = \mu_\ell = -\ell^2$, para qualquer $\ell \in \mathbb{N}_1$, e, nestes casos, uma base do espaço das soluções é constituida por $Y_\ell(\eta) = \sin(\ell\eta)$. Naturalmente que daqui se obtém $\sigma = -k^2 - \ell^2$ com $(k, \ell) \in \mathbb{N}_1^2$ e portanto uma base para o espaço de soluções de $T' = \sigma T$ é constituida pela função $T(t) = e^{-(k^2+\ell^2)t}$.

Atendendo aos resultados acima, a solução geral formal do problema (93) é dada por

$$v(t, \xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \alpha_{k,\ell} \sin(k\xi) \sin(\ell\eta) e^{-(k^2+\ell^2)t}. \tag{94}$$

b) Sendo a condição inicial igual a $f(x,y)$ e definindo $F(\xi,\eta)$ por $F(\xi,\eta) \stackrel{\text{def}}{=} f(x(\xi),y(\eta))$, tem-se, atendendo ao resultado da alínea anterior,

$$F(\xi,\eta) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\infty} \alpha_{k,\ell} \sin(k\xi)\sin(\ell\eta). \tag{95}$$

Para determinar uma expressão para os coeficientes $\alpha_{k,\ell}$ comecemos por fixar uma das variáveis, por exemplo, a variável η. Então, fixe-se η, escreva-se a igualdade (95) na forma

$$F(\xi,\eta) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{\ell=1}^{\infty} \alpha_{k,\ell} \sin(\ell\eta)\right)\sin(k\xi)$$

e chame-se $A_k(\eta)$ à função de η entre parentesis. Como η está, por hipótese, fixo, os números reais $A_k(\eta)$ são os coeficientes da série de Fourier de senos da função 2π-periódica $F(\cdot,\eta)$ e portanto são dados por

$$A_k(\eta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(\xi,\eta)\sin(k\xi)d\xi. \tag{96}$$

Por outro lado, observe-se da definição de $A_k(\eta)$, a saber

$$A_k(\eta) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \alpha_{k,\ell} \sin(\ell\eta),$$

que, para cada $k \in \mathbb{N}_1$ fixo, $\alpha_{k,\ell}$ são os coeficientes da série de Fourier de senos da função 2π-periódica $A_k(\eta)$, pelo que se tem

$$\alpha_{k,\ell} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} A_k(\eta)\sin(\ell\eta)d\eta \tag{97}$$

e substituindo (96) em (97) obtém-se a seguinte expressão para os coeficientes $\alpha_{k,\ell}$ da solução formal geral (95):

$$\alpha_{k,\ell} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_0^{\pi}\left(\int_0^{\pi} F(\xi,\eta)\sin(k\xi)d\xi\right)\sin(\ell\eta)d\eta.$$

A substituição desta expressão em (94) fornece a solução formal pretendida.

Teste de 9.5.98 e resolução.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

(Engenharia Aeroespacial, Engenharia do Ambiente, Química, 1ºAno)

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

Data: 9/5/1998
Duração: 1h30.

I.

Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias lineares

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \tag{98}$$

1. Seja $\varepsilon = 0$.

   a) Determine todos os vectores próprios e vectores próprios generalizados da matriz do sistema.

   b) Determine a solução geral real de (98).

   c) Identifique *todos* os subespaços de $\mathbb{R}^4$ que são invariantes para o sistema (98).

   d) Seja L_s o maior subespaço invariante de $\mathbb{R}^4$ tal que o(s) ponto(s) de equilíbrio da restrição de (98) a L_s é(são) estável(eis). Esboce o retrato de fase dessa restrição.

2. Considere agora $\varepsilon = 1$.

   a) Atendendo à estrutura da matriz do sistema (98), obtenha dois sistemas bidimensionais (não necessariamente homogéneos) que sejam "equivalentes" ao sistema quadridimensional dado; estabeleça com precisão o que deve ser entendido por "equivalentes" na frase anterior.

   b) Calcule a solução de (98) que satisfaz a condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{e}_4$.
   (*Sugestão: poderão ser úteis as seguintes primitivas:* $\int e^{-t} \sin t \, dt = -\frac{1}{2}e^{-t}(\sin t + \cos t)$ *e* $\int e^{-t} \cos t \, dt = -\frac{1}{2}e^{-t}(\sin t - \cos t)$)

II.

Considere a seguinte equação diferencial linear de segunda ordem

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0, \tag{99}$$

onde $p(t)$ e $q(t)$ são funções contínuas definidas em $\mathbb{R}$.

a) Usando uma mudança de variáveis adequada transforme (99) num sistema linear de primeira ordem

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}, \tag{100}$$

e identifique explicitamente a matriz $A(t)$.

b) Sendo $W(t)$ uma matriz wronskiana de (100), mostre que $(\det W(t))' = -p(t)\det W(t)$.

c) Conclua que se todas as soluções $x(t)$ de (99) satisfazem $(x(t), x'(t)) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} (0,0)$, então

$$\int_0^{+\infty} p(t)dt = +\infty.$$

Resolução:

I.

1.a) Designemos por A a matriz do sistema. Repare-se que no caso $\varepsilon - 0$ a matriz A é diagonal por blocos $A = \text{diag}(A_1, A_2)$, com

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Comecemos por estudar a submatriz A_1. Os valores próprios de A_1 são os zeros do seu polinómio característico

$$p_{A_1}(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 4 \\ -1 & -2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda) + 4 = \lambda^2,$$

ou seja $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Os vectores próprios correspondentes são os elementos do espaço nulo de $A_1 - 0I_2$, ou seja

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{cases} v_1 = -2v_2 \\ v_2 \, \text{arbitrário} \end{cases}.$$

Assim, escolhendo $v_2 = 1$, uma base para os vectores próprios de A_1 correspondentes a $\lambda = 0$ tem como único elemento o vector $(-2, 1)^{\mathrm{T}}$ e a base para os vectores próprios de A conterá o vector correspondente, a saber $(-2, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. Pelo que foi feito conclui-se que a multiplicidade geométrica do valor próprio duplo 0 é igual a 1. Há, portanto, que determinar um vector próprio generalizado correspondente a este valor próprio, o qual pode ser feito por resolução de $(A_1 - 0I_2)\mathbf{w} = \mathbf{v}$, onde $\mathbf{v}$ é um vector próprio (por exemplo: o calculado anteriormente). Assim, tem-se

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} w_1 = -1 - 2w_2 \\ w_2 \, \text{arbitrário} \end{cases},$$

e um possível vector próprio generalizado é obtido fazendo $w_2 = 0$, a saber $(-1, 0)^{\mathrm{T}}$, pelo que o correspondente vector próprio generalizado da matriz A é $(-1, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$.

Quanto aos valores próprios de A_2 tem-se:

$$p_{A_2}(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -2-\lambda \end{bmatrix} = (-\lambda)(-2-\lambda) + 2 = \lambda^2 + 2\lambda + 2,$$

cujos zeros são $\lambda_3 = -1 + i$ e $\lambda_4 = -1 - i$. Os vectores próprios correspondentes a λ_3 são os elementos $\mathbf{u}$ de $\mathcal{N}(A_2 - \lambda_3 I_2)$:

$$\mathbf{0} = (A_2 - \lambda_3 I_2)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1-i & 1 \\ -2 & -1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-i)u_1 & u_2 \\ -2u_1 & -(1+i)u_2 \end{bmatrix}$$

ou seja, $\mathbf{u} = u_1 \, (1, -1+i)^{\mathrm{T}}$, com $u_1 \in \mathbb{C}$ arbitrário. Consequentemente, os vectores próprios de A correspondentes são gerados por $(0, 0, 1, -1+i)^{\mathrm{T}}$. Como $\lambda_4 = \overline{\lambda_3}$ e A_2 é uma matriz real, sabe-se que os vectores próprios associados a λ_4 são os complexos conjugados dos vectores próprios associados a λ_3. Conclui-se, portanto, que os vectores próprios de A associados a λ_4 são vectores de $\mathbb{C}^4$ gerados por $(0, 0, 1, -1-i)^{\mathrm{T}}$.

b) Utilizando o método dos valores e vectores próprios pode-se concluir que uma matriz fundamental para o sistema associado à submatriz A_1 é

$$\Phi_1(t) = e^{0t} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{array} \right] \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1-2t \\ 1 & t \end{bmatrix}$$

Para o sistema associado à submatriz A_2 tem-se o seguinte: uma solução complexa é

$$\begin{aligned} e^{(-1+i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1+i \end{bmatrix} &= e^{-t}(\cos t + i \sin t) \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t \\ -\cos t - \sin t \end{bmatrix} + i e^{-t} \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t - \sin t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e portanto uma base para as soluções *reais* do subsistema correspondente a A_2 é

$$\left\{ e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t \\ -\cos t - \sin t \end{bmatrix}, \; e^{-t} \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t - \sin t \end{bmatrix} \right\}$$

concluindo-se que uma matriz fundamental é, por exemplo,

$$\Phi_2(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\cos t - \sin t & \cos t - \sin t \end{bmatrix}$$

Atendendo à estrutura da matriz A tem-se que a solução geral real de (98), quando $\varepsilon = 0$, é

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & -1-2t & 0 & 0 \\ 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \cos t & e^{-t} \sin t \\ 0 & 0 & -e^{-t}(\cos t + \sin t) & e^{-t}(\cos t - \sin t) \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}$$

onde $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^4$ é uma constante arbitrária.

c) Comecemos por notar que os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$ são obviamente invariantes:

$\{0\}$, o espaço trivial constituído por um único ponto.

$\mathbb{R}^4$, o espaço todo.

Como subespaços invariantes temos ainda os espaços próprios correspondentes a valores próprios reais, ou seja

$$L_1 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : \mathbf{x} = \alpha(-2, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

e o espaço gerado por u_R e u_I onde $\mathbf{u} = u_\mathrm{R} + iu_\mathrm{I}$ é um vector próprio complexo de A. No presente caso tem-se

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e portanto o subespaço

$$L_2 = \mathcal{L}\,\{(0,0,1,-1)^\mathrm{T},\ (0,0,0,1)^\mathrm{T}\}$$

é invariante. Consequentemente, é também invariante o espaço $L_3 = L_1 \oplus L_2$.

d) Para que os pontos de equilíbrio da restrição de (98) sejam todos estáveis é necessário e suficiente que os valores próprios do sistema restringido tenham parte real não-positiva e que aqueles com parte real nula tenham multiplicidades algébrica e geométrica iguais. Atendendo a isto, o espaço pedido é $L_s = L_3$ com o L_3 dado na alínea anterior: trata-se de um subespaço tridimensional definido por L_2 (o espaço associado ao par de valores próprios $-1 \pm i$) e por L_1 (o espaço próprio associado ao valor próprio 0, o qual tem dimensão 1 e a restrição do sistema a L_1 terá dimensão 1, pelo que as multiplicidades geométrica e algébrica do valor próprio da restrição de (98) a L_1 não poderá deixar de ser também igual a 1).

O esboço do retrato de fases da restrição de (98) a L_s é imediata atendendo à decomposição $L_s = L_1 \oplus L_2$: em L_1 todos os pontos são pontos de equilíbrio visto que $L_1 = \mathcal{N}(A)$ (Figura 75).

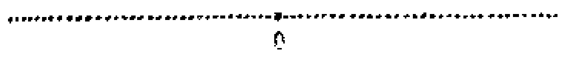


Figura 75: Retrato de fases da restrição de (98) a L_1.

Em L_2 tem-se a elipse definida, pelos vectores u_R e u_I apresentados acima, que é apresentada na Figura 76.

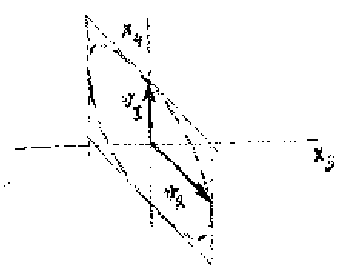


Figura 76: Elipse definida pelos vectores u_R e u_I.

Atendendo a que a orientação das órbitas no eixo x_4 é a definida pelos vectores tangentes dados por

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ -2x_4 \end{bmatrix}.$$

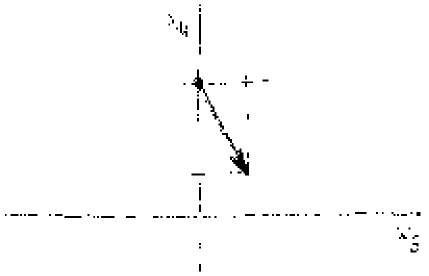


Figura 77: Vector tangente à órbita num ponto do eixo x_4.

Atendendo também ao facto de que $\mathrm{Re}(-1+i) = -1 < 0$ implica que todas as soluções em L_2 convergem para $\mathbf{0}$ quando $t \to +\infty$, pode-se esboçar o retrato de fase para a restrição de (98) a L_2 como se faz na Figura 78.

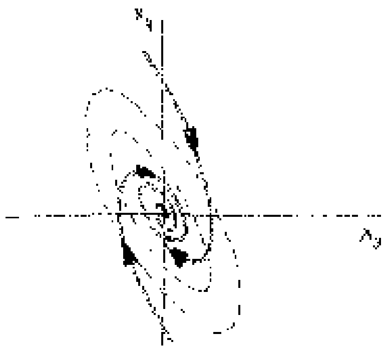


Figura 78: Retrato de fase para a restrição de (98) a L_2

Consequentemente, em $L_s = L_1 \oplus L_2$ tem-se o esboço de retrato de fase apresentado na Figura 79.

2.a) Sendo agora o parâmetro ε igual a 1, podemos começar por observar que as equações para as variáveis x_3 e x_4 são independentes das restantes equações:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}. \tag{101}$$

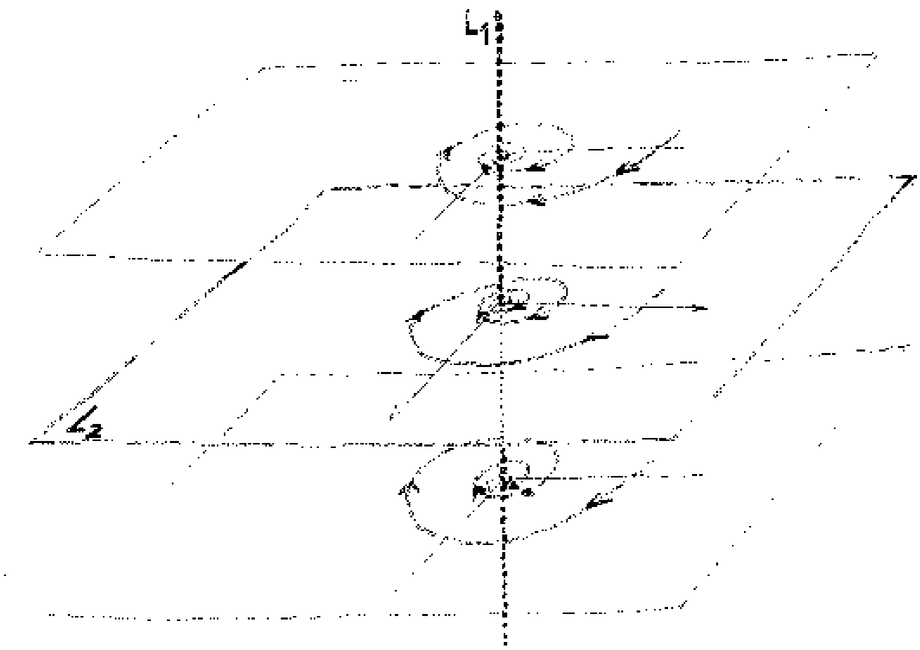


Figura 79: Retrato de fase para a restrição de (98) a $L_1 \oplus L_2$

Por outro lado, as equações para as variáveis x_1 e x_2 dependem, de facto, do comportamento da função $x_3(t)$ uma vez que a equação para x_2 é $x_2' = -x_1 - 2x_2 + x_3$. No entanto, como (101) pode ser resolvido independentemente do que se passa com x_1 e x_2, o sistema para estas últimas funções é

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_3(t) \end{bmatrix}, \qquad (102)$$

onde $x_3(t)$ terá de ser previamente calculado resolvendo (101). Assim, o sistema (98) foi "decomposto" em dois sistemas bidimensionais (101) e (102), com este último não-homogéneo, e as soluções de (98) são obtidas da maneira natural: $(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))^{\mathrm{T}}$ é solução de (98) se e só se $(x_3(t), x_4(t))^{\mathrm{T}}$ é solução de (101) e $(x_1(t), x_2(t))^{\mathrm{T}}$ é solução de (102), e isto constitui a "equivalência" referida no enunciado.

b) Usando a ideia apresentada na alínea anterior e os resultados da alínea 1.b) conclui-se que

$$\begin{bmatrix} x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}\cos t & e^{-t}\sin t \\ -e^{-t}(\cos t + \sin t) & e^{-t}(\cos t - \sin t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}$$

com

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ -\alpha_3 + \alpha_4 \end{bmatrix},$$

ou seja, $\alpha_3 = 0$ e $\alpha_4 = 1$. Tem-se, então,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e^{-t}\cos t & e^{-t}\sin t \\ -e^{-t}(\cos t + \sin t) & e^{-t}(\cos t - \sin t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{-t}\sin t \\ e^{-t}(\cos t - \sin t) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

O sistema (102) fica agora

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t}\sin t \end{bmatrix}$$

e, pela fórmula de variação das constantes, pelos resultados de 1.b) e usando a condição inicial $x_1(0) = x_2(0) = 0$, tem-se

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & -1-2t \\ 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \\
&\quad + \begin{bmatrix} -2 & -1-2t \\ 1 & t \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} -2 & -1-2s \\ 1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-s}\sin s \end{bmatrix} ds \\
&= \begin{bmatrix} -2 & -1-2t \\ 1 & t \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} s & 1+2s \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-s}\sin s \end{bmatrix} ds \\
&= \begin{bmatrix} -2 & -1-2t \\ 1 & t \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} (1+2s)e^{-s}\sin s \\ -2e^{-s}\sin s \end{bmatrix} ds \\
&= \begin{bmatrix} -2 & -1-2t \\ 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (t+\frac{3}{2})(\sin t + \cos t)e^{-t} - (\sin t - \cos t)e^{-t} + \frac{1}{2} \\ (\sin t + \cos t)e^{-t} - 1 \end{bmatrix}. \\
&= \begin{bmatrix} -4(1+t)(\sin t + \cos t)e^{-t} + 2(\sin t - \cos t)e^{-t} + 2t \\ (2t+\frac{3}{2})(\sin t + \cos t)e^{-t} - (\sin t - \cos t)e^{-t} + (\frac{1}{2} - t) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

A solução de (98) é obtida como indicado na alínea anterior.

II.

a) Seja $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^{\mathrm{T}}$ com $y_1 = x$ e $y_2 = x'$. Então $y_1' = x' = y_2$ e $y_2' = x'' = -px' - qx = -py_2 - qy_1$, pelo que o sistema para $\mathbf{y}$ é

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

o qual é um sistema do tipo (100) com

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{bmatrix}.$$

b) Sendo $W(t)$ uma matriz wronskiana de (100) tem-se que

$$W(t) = \begin{bmatrix} u & v \\ u' & v' \end{bmatrix}$$

onde $u = u(t)$ e $v = v(t)$ são soluções linearmente independentes de (99). Consequentemente $\det W(t) = u(t)v'(t) - u'(t)v(t)$ e tem-se

$$\begin{aligned}
(\det W(t))' &= \big(uv' - u'v\big)' \\
&= u'v' + uv'' - u''v - u'v' \\
&= uv'' - u''v \\
&= u\left(-p(t)v' - q(t)v\right) - \left(-p(t)u' - q(t)u\right)v \\
&= -p(t)uv' - q(t)uv + p(t)u'v + q(t)uv \\
&= -p(t)\left(uv' - u'v\right) \\
&= -p(t)\det W(t)
\end{aligned}$$

o que mostra o pretendido.

c) Se todas as soluções de (99) satisfazem $(x(t), x'(t)) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} (0,0)$ então, pela mudança de variáveis introduzida em a), todas as soluções de (100) satisfazem $(y_1(t), y_2(t))^{\mathrm{T}} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} (0,0)^{\mathrm{T}}$, ou seja

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = W(t) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbf{0},$$

com α_1 e α_2 constantes reais arbitrarias. Isto naturalmente implica que $W(t)$ tem de convergir para a matriz nula, O, quando $t \to +\infty$, ou seja, que todas as componentes da matriz $W(t)$ convirjam para a função identicamente nula, e portanto $\det W(t) = u(t)v'(t) - u'(t)v(t)$ também convergirá para 0 quando $t \to +\infty$. Como sabemos que $(\det W(t))' = -p(t)\det W(t)$, ou seja $\det W(t) = \det W(0) \exp\left(-\int_0^t p(s)ds\right)$, conclui-se que se tem de ter

$$\lim_{t \to +\infty} \exp\left(-\int_0^t p(s)ds\right) = 0$$

e portanto $\lim_{t \to +\infty} \int_0^t p(s)ds = +\infty$, ou seja

$$\int_0^{+\infty} p(s)ds = +\infty,$$

como se pretendia.

Exame de 1.7.98 e resolução.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

(Engenharia Aeroespacial, Engenharia do Ambiente, Química, 1ºAno)

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

Data: 1/7/1998 **Duração:** 3h00.

I.

Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias lineares $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$, onde

$$A = \operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

1. Seja $\mathbf{b}(t) \equiv \mathbf{0}$.
   a) Determine todos os pontos de equilíbrio do sistema e estude-os quanto à estabilidade.
   b) Identifique o maior subespaço invariante L de $\mathbb{R}^5$ tal que a restrição do sistema a L tenha um único ponto de equilíbrio.
   c) Esboce o retrato de fases da restrição do sistema ao subespaço L referido na alínea anterior[a].
2. Seja $\mathbf{b}(t) = t\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_5$.
   a) Determine uma solução particular do sistema não-homogéneo.
   b) Calcule a solução do sistema não-homogéneo que satisfaz a condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{e}_4$.

II.

Determine a solução geral real da equação $x''' + 2x'' + 2x' = \sin(2t)$.

III.

Considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} 2xy + (3y^2 + x^2)y' = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases} \tag{103}$$

a) Justifique que (103) tem solução local única.

b) Determine uma expressão implícita para a solução de (103).

c) Determine o intervalo máximo de existência da solução de (103).

IV.

Para um dado sistema físico, considere a lei de Newton escrita na forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dV}{dx}(x), \tag{104}$$

onde $V(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a energia potencial do sistema.

[a] Se não resolveu a alínea anterior, considere $L = \mathcal{L}\{\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_5\}$.

a) Mostre que a função $E(x, x') = \frac{1}{2}(x')^2 + V(x)$ é uma constante do movimento para (104).

b) Usando uma mudança de variáveis adequada, escreva um sistema linear de primeira ordem correspondente a (104).

c) Esboce o retrato de fase do sistema de primeira ordem quando a energia potencial é dada por $V(x) = -\frac{1}{4}(x^2 - 1)^2$. Identifique no retrato de fases que obteve as regiões correspondentes a órbitas ilimitadas, limitadas periódicas e limitadas não-periódicas.

V.

Considere um fio metálico isolado, de comprimento 4. A temperatura, no instante $t > 0$, de um ponto do fio com coordenada x é representada por uma função $u(t, x) \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}_x^2(\Omega) \cap \mathcal{C}_t^1(\Omega)$, onde $\Omega = \mathbb{R}^+ \times]0, 4[$ e $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, e que satisfaz o problema de valores iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} u_t = \mathcal{D}u_{xx}, & (t, x) \in \Omega \\ u_x(t, 0) = u_x(t, 4) = 0, & t > 0 \\ u(0, x) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq 4, \end{cases} \tag{105}$$

onde $\mathcal{D} > 0$ é uma constante e $\varphi(x) \in \mathcal{C}^0([0, 4])$ é a distribuição inicial da temperatura no fio.

a) Determine a solução formal geral de (105).

b) Determine a solução formal de (105) quando $\varphi(x) = 4 - x$.

c) Investigue se a solução formal da alínea anterior é, ou não, uma solução clássica de (105).

VI.

O estudo de sistemas lineares autónomos é em geral muito mais simples que o de sistemas não-autónomos. Em muitos casos é importante conseguir relacionar propriedades das soluções de sistemas não-autónomos com o mesmo tipo de propriedades das soluções de sistemas autónomos correspondentes. Iremos neste grupo investigar a limitação de soluções em $\mathbb{R}^+$.

1. Comecemos pelo caso escalar:

   a) Seja $a \in \mathbb{R}$ uma constante e $b(t)$ uma função real, contínua, definida em $\mathbb{R}_0^+$. Mostre que, se todas as soluções de $y' = ay$ são limitadas quando $t \to +\infty$, então o mesmo sucede com as soluções de $z' = (a + b(t))z$, desde que $\int_0^{+\infty} |b(t)|dt < +\infty$.

2. Agora estenderemos o resultado acima para o caso de sistemas de dimensão $n > 1$. Para tal necessitamos de um resultado auxiliar que será o objecto da alínea a).

   a) Mostre o seguinte resultado (desigualdade de Gronwall): Sejam $u(t), v(t) \geq 0$ duas funções contínuas definidas para $t \geq 0$ e tais que

   $$u(t) \leq \alpha + \int_0^t u(s)v(s)ds \tag{106}$$

   para alguma constante positiva α. Então, $u(t)$ satisfaz a desigualdade

   $$u(t) \leq \alpha \exp\left(\int_0^t v(s)ds\right).$$

   (Sugestão: divida (106) pelo seu segundo membro, multiplique o resultado por $v(t)$ e integre.)

   b) Seja $A \in M_n$, e seja $B(t) : \mathbb{R}_0^+ \to M_n$ contínua. Mostre que, se todas as soluções de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ são limitadas quando $t \to +\infty$, então o mesmo sucede com as soluções de $\mathbf{z}' = (A + B(t))\mathbf{z}$, desde que $\int_0^{+\infty} \|B(t)\|dt < +\infty$.
   (Sugestão: Encare $\mathbf{z}' = (A + B(t))\mathbf{z}$ como um sistema não-homogéneo com termo não-homogéneo igual a $B(t)\mathbf{z}(t)$ e tenha presente a desigualdade de Gronwall.)

Resolução:

I.

1.a) Atendendo a que a matriz A do sistema é diagonal por blocos podemos investigar os pontos de equilíbrio de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ estudando os espaços nulos das submatrizes na diagonal principal de A. Vejamos: O espaço nulo de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ é constituido pelos vectores

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrário. Para a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ o espaço nulo é formado pelos vectores

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

com $\beta \in \mathbb{R}$ arbitrário. Isto permite concluir que o espaço nulo da matriz A é bidimensional e é dado por $\mathcal{N}(A) = \mathcal{L}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_5)$ onde os $\mathbf{e}_j$ são os versores da base canónica de $\mathbb{R}^5$.

Quanto à estabilidade dos pontos de equilíbrio do sistema, ela será determinada pelo sinal da parte real dos valores próprios da matriz A. Novamente usando a estrutura em blocos da matriz A conclui-se que os valores próprios podem ser conhecidos a partir da determinação dos valores próprios das matrizes (2×2) e (3×3) indicadas acima. No caso da matriz (2×2), trata-se de uma matriz triangular (superior) e portanto os valores próprios são os elementos da diagonal principal: 0 e -3. Para a matriz (3×3) tem-se o polinómio característico

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(\lambda^2 + 1),$$

cujos zeros são 0, i e $-i$. Assim, como todos os valores próprios têm partes reais não-positivas e aqueles com partes reais nulas têm multiplicidade algébrica igual à multiplicidade geométrica (iguais a 1 no caso de $\lambda = i$ e de $\lambda = -i$ e igual a 2 no caso do valor próprio nulo) conclui-se que todos os pontos de equilíbrio do sistema são estáveis, mas não assimptoticamente estáveis.

b) É claro que para que a restrição do sistema a um subespaço invariante L só tenha um ponto de equilíbrio é necessário e suficiente que L não contenha nenhum vector próprio da matriz do sistema A correspondente ao valor próprio nulo. Assim, como os subespaços invariantes de $\mathbb{R}^5$ que não contêm elementos não nulos de $\mathcal{N}(A)$ são

o espaço próprio associado ao valor próprio -3: $\quad E_1 = \{\gamma(\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2) : \gamma \in \mathbb{R}\}$
o espaço invariante associado ao par de valores próprios $\lambda_\pm = \pm i$:
$E_2 = \mathcal{L}(\mathbf{v}_{\mathrm{R}}, \mathbf{v}_{\mathrm{I}})$ tal que $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\mathrm{R}} + i\mathbf{v}_{\mathrm{I}}$ é um vector próprio associado a i
o espaço invariante obtido por soma directa dos anteriores: $\quad E_3 = E_1 \oplus E_2$

É agora imediato que o espaço invariante procurado é $L = E_3$.

c) Atendendo a que $L = E_1 \oplus E_2$ com E_1 e E_2 especificados na alínea anterior tem-se que o retrato de fases em L pode ser obtido atravez dos retratos de fases em cada um dos subespaços de dimensão inferior E_1 e E_2. Vejamos:

Em E_1 o sistema é unidimensional, o valor próprio associado é igual a -3 e portanto o retrato de fases é o indicado na Figura 80.

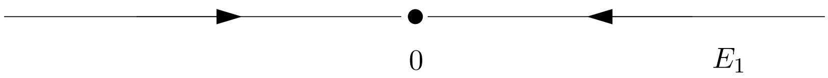


Figura 80: Retrato de fases da restrição do sistema a E_1.

Para a restrição a E_2 observe-se que os valores próprios são $\pm i$ e portanto as órbitas vão ser periódicas, sabendo-se que as elipses que as descrevem vão ser determinadas pelo paralelogramo gerado por $\mathbf{v}_{\mathrm{R}}$ e $\mathbf{v}_{\mathrm{I}}$, onde $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\mathrm{R}} + i\mathbf{v}_{\mathrm{I}}$ é um vector próprio associado ao valor próprio i (ou a $-i$, é indiferente). Os vectores próprios em causa são

$$\begin{bmatrix} -i & 1 & -1 \\ 0 & -i & 0 \\ 1 & 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \mathbf{v} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + i\alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

com α arbitrário. Fazendo $\alpha = 1$ tem-se $\mathbf{v}_{\mathrm{R}} = \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{v}_{\mathrm{I}} = -\mathbf{e}_5$. Assim o paralelogramo que determina a orientação as elipses é o apresentado na Figura 81 e conclui-se que o retrato de fase do sistema restringido a E_2 é o apresentado na Figura 82, onde a orientação das órbitas pode ser facilmente obtido atendendo a que a equação para x_5 é $x_5' = x_3$ e portanto $x_5(t)$ é crescente no semi-eixo positivo da componente x_3.

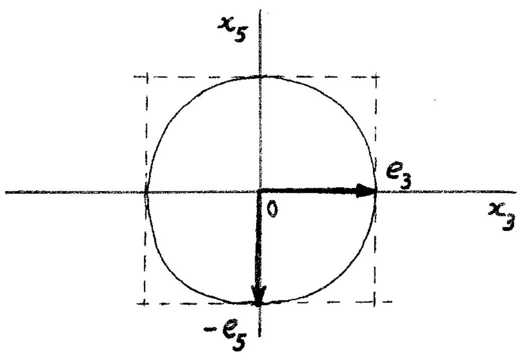


Figura 81: Paralelogramo que determina a posição das elipses e uma dessas elipses.

Atendendo à análise feita, podemos esboçar o retrato de fases em L apresentado na Figura 83.

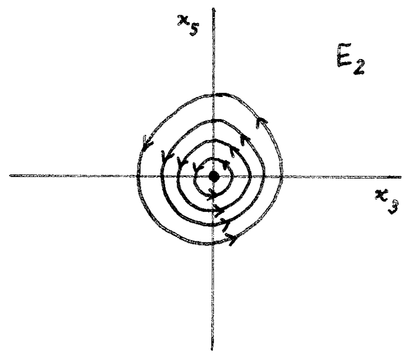


Figura 82: Retrato de fases do sistema restringido a E_2.

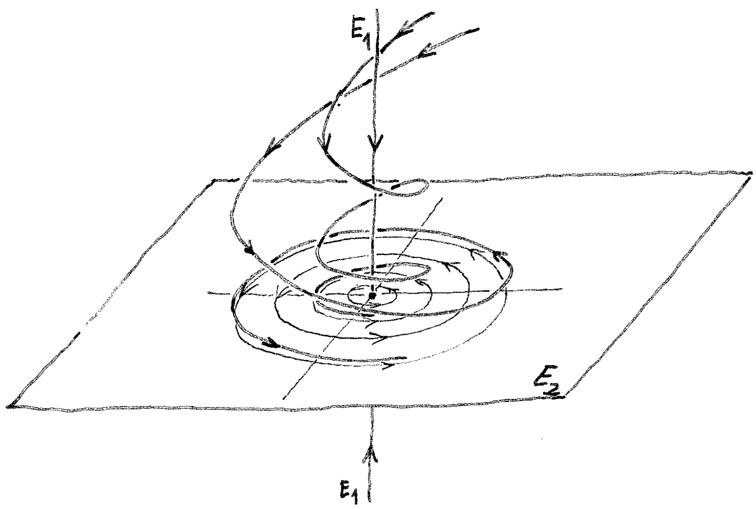


Figura 83: Retrato de fases do sistema em L.

2.a) Atendendo à estrutura da matriz do sistema e ao facto do termo não-homogéneo $\mathbf{b}(t) = t\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_5$ ter primeira e segunda componentes nulas, concluimos que uma solução particular do sistema pode ser escrita como $\mathbf{x}_{\text{part}}(t) = (0, 0, x_3(t), x_4(t), x_5(t))^{\mathrm{T}}$ onde $(x_3(t), x_4(t), x_5(t))^{\mathrm{T}}$ é uma solução particular do sistema não-homogéneo tridimensional

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Além desta observação, que permite reduzir o problema à resolução de uma questão para um sistema de dimensão inferior, podemos ainda notar que a segunda equação, para a variável x_4, do sistema tridimensional anterior pode ser resolvida independentemente das restantes: a equação é $x_4' = 0$, cuja solução geral é $x_4(t) = \alpha_4$. Substituindo este resultado nas equações para as restantes variáveis x_3 e x_5 obtem-se o sistema

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t + \alpha_4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para obter uma solução particular deste sistema bidimensional podemos utilizar o método dos palpites: o termo não-homogéneo é um polinómio de grau 1 e portanto é do tipo $\mathbf{p}_1(t)e^{0t}$. Como 0 não é valor próprio da matriz do sistema bidimensional (os quais são $\pm i$) conclui-se que uma solução particular também será um polinómio de grau 1, podendo assim tentar-se funções do tipo

$$\begin{bmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \end{bmatrix}.$$

Para que estas funções sejam soluções terão de satisfazer

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t + \alpha_4 \\ 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \\ b_1 = 0 \\ b_2 = \alpha_4 \end{cases}$$

e portanto uma solução particular do sistema tridimensional acima pode ser obtida tomando $\alpha_4 = 0$, do que resulta $(0, 0, t)^{\mathrm{T}}$ e portanto uma solução particular do sistema original será

$$\mathbf{x}_{\text{part}}(t) = (0, 0, 0, 0, t)^{\mathrm{T}}.$$

b) Já possuindo uma solução particular do sistema, podemos escrever a solução do sistema na forma $\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{x}_{\text{part}}(t)$ onde o vector $\boldsymbol{\alpha}$ é determinado atendendo a que $\mathbf{e}_4 = \Phi(0)\boldsymbol{\alpha}$, onde se usou a condição inicial dada e o facto de $\mathbf{x}_{\text{part}}(0) = \mathbf{0}$. Consequentemente tem-se $\boldsymbol{\alpha} = \Phi^{-1}(0)\mathbf{e}_4$. Atendendo à estrutura em blocos da matriz A do sistema, pode-se concluir que as matrizes fundamentais vão também ter o mesmo tipo de estrutura e como as duas primeiras componentes de $\mathbf{e}_4$ são nulas, conclui-se que as duas primeiras componentes de $\boldsymbol{\alpha}$ e portanto da solução $\mathbf{x}(t)$ serão também nulas. Portanto, basta-nos considerar o que se passa com o segundo bloco, correspondente às componentes x_3, x_4 e x_5 do sistema. Já temos, pelos resultados das alíneas 1.a), 1.b) e 1.c), os valores e vectores próprios da matriz e, portanto, concluímos que três soluções reais linearmente independentes do sistema tridimensional correspondente ao segundo bloco são

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\varphi}_1(t) = (0,1,1)^{\mathrm{T}}\\
&\boldsymbol{\varphi}_2(t) = \mathrm{Re}\left((\mathbf{v}_{\mathrm{R}} + i\mathbf{v}_{\mathrm{I}})e^{it}\right) = (\cos t, 0, \sin t)^{\mathrm{T}}\\
&\boldsymbol{\varphi}_3(t) = \mathrm{Im}\left((\mathbf{v}_{\mathrm{R}} + i\mathbf{v}_{\mathrm{I}})e^{it}\right) = (\sin t, 0, \ -\cos t)^{\mathrm{T}}
\end{aligned}$$

Assim, uma matriz fundamental para o sistema tridimensional será

$$\Phi_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & \cos t & \sin t \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sin t & -\cos t \end{bmatrix}$$

e portanto a solução do sistema tridimensional pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \cos t & \sin t \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sin t & -\cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \cos t & \sin t \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sin t & -\cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sin t \\ 1 \\ 1 - \cos t + t \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

pelo que se conclui que a solução pedida é

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin t \\ 1 \\ 1 - \cos t + t \end{bmatrix}.$$

II.

A solução geral da equação $x''' + 2x'' + 2x' = \sin(2t)$ pode ser escrita como $x(t) = x_{\mathrm{hom}}(t) + x_{\mathrm{part}}(t)$, onde $x_{\mathrm{hom}}(t)$ é a solução geral da equação homogénea associada e $x_{\mathrm{part}}(t)$ é uma solução (particular) da equação (não-homogénea) dada. Para o cálculo de x_{hom} comecemos por escrever $(\cdot)' = D(\cdot)$. A equação homogénea vem então dada como $(D^3 + 2D^2 + 2D)x = 0$. Considere-se o polinómio característico $p(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 2) = \lambda(\lambda - (-1+i))(\lambda - (-1-i))$. Consequentemente, a equação diferencial pode ser escrita como

$$D(D - (-1+i))(D - (-1-i))x = 0$$

que tem como solução geral real

$$x_{\text{hom}}(t) = a_1 + a_2 e^{-t}\cos t + a_3 e^{-t}\sin t.$$

Para a solução particular $x_{\text{part}}(t)$ observe-se que o termo não-homogéneo pode ser escrito como $\sin(2t) = \operatorname{Im}\left(e^{2it}\right)$ e podemos assim obter uma solução particular da equação dada tomando a parte imaginária de uma solução particular da equação complexificada

$$D(D-(-1+i))(D-(-1-i))z = e^{2it}.$$

Como $p(2i) = -8-4i \neq 0$, o método dos palpites permite-nos afirmar que a equação complexificada tem solução particular da forma $z_{\text{part}}(t) = \alpha e^{2it}$ para algum $\alpha \in \mathbb{C}$ conveniente. Como $z'_{\text{part}}(t) = 2\alpha i e^{2it}$, $z''_{\text{part}} = -4\alpha e^{2it}$ e $z'''_{\text{part}} = -8\alpha i e^{2it}$, a equação complexificada resulta em $-8\alpha i e^{2it} - 8\alpha e^{2it} + 4\alpha i e^{2it} = e^{2it}$, ou seja $-8\alpha - 4\alpha i = 1 \iff \alpha(-8-4i) = 1 \iff \alpha = -\frac{1}{8+4i} \iff \alpha = -\frac{1}{10} + \frac{1}{20}i$. Consequentemente, tem-se como solução particular da equação complexificada a função

$$\begin{aligned} z_{\text{part}}(t) &= \left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{20}i\right)e^{2it} \\ &= \left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{20}i\right)(\cos(2t) + i\sin(2t)) \\ &= -\frac{2\cos 2t + \sin 2t}{20} + \frac{\cos 2t - 2\sin 2t}{20}i \end{aligned}$$

e portanto a solução particular pretendida é $x_{\text{part}}(t) = \operatorname{Im}(z_{\text{part}}(t)) = \frac{1}{20}\cos 2t - \frac{1}{10}\sin 2t$. A solução geral da equação dada será, então,

$$x(t) = a_1 + a_2 e^{-t}\cos t + a_3 e^{-t}\sin t + \frac{1}{20}\cos 2t - \frac{1}{10}\sin 2t.$$

III.

a) Escrevendo a equação na forma $y' = -\frac{2xy}{3y^2+x^2}$ tem-se que $f(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{2xy}{3y^2+x^2}$ é uma função contínua definida em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e é de classe $\mathcal{C}^1$ em relação a y (e também em relação a x). Consequentemente, numa vizinhança suficientemente pequena do ponto inicial $(1,1)$ a função é localmente Lipschitziana em relação à variável y e o teorema de Picard-Lindelöf permite concluir que (103) tem solução local única.

b) Como a equação dada pode ser escrita na forma $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ com $M(x,y) = 2xy$ e $N(x,y) = 3y^2 + x^2$ é natural observarmos se poderá ser escrita na forma $\frac{d}{dx}\Phi(x,y(x)) = 0$ para alguma função $\Phi(x,y)$ conveniente. Como $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$ em todo o $\mathbb{R}^2$ conclui-se que a equação dada é exacta e portanto existe Φ nas condições indicadas acima. Isto permite-nos determinar Φ sem dificuldade:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= M(x,y) = 2xy \iff \Phi(x,y) = x^2 y + h_1(y) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= N(x,y) = 3y^2 + x^2 \iff \Phi(x,y) = x^2 y + y^3 + h_2(x) \end{aligned}$$

Conclui-se, então, que se podem escolher $h_1(y) = y^3$ e $h_2(x) = 0$, obtendo-se $\Phi(x,y) = x^2y + y^3$. A solução de (103) será $\Phi(x,y) = \mathcal{C}$, com a constante real $\mathcal{C}$ dada por $\mathcal{C} = \Phi(1,1) = 1^2 1 + 1^3 = 2$. A expressão implícita pretendida é $y^3 + x^2y - 2 = 0$.

c) Observando que $y^3 + x^2y - 2 = 0$ é facilmente resolvida para x como função de y obtém-se, atendendo a que $x(1) = 1 > 0$,

$$x = x(y) = \sqrt{\frac{2-y^3}{y}}.$$

O domínio de $x(y)$ é $\left]0, \sqrt[3]{2}\right]$. Como $x'(y) = -\frac{1+y^2}{y^2}\sqrt{\frac{y}{2-y^3}} < 0$ em $\left]0, \sqrt[3]{2}\right[$ conclui-se que $x(y)$ é estritamente decrescente e é, portanto, invertível. Consequentemente, o intervalo máximo de existência da solução será $]\alpha, \beta[$ com $\alpha = x\left(\sqrt[3]{2}\right) = 0$ e $\beta = \lim_{y\to 0} x(y) = +\infty$.

IV.

a) Observe-se que $\frac{d}{dt}E(x,x') = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(x')^2 + V(x)\right) = x'x'' + V'(x)x' = (x'' + V'(x))\,x' = 0$, onde a última igualdade é devida à equação diferencial (104). Isto conclui o pretendido.

b) Definindo $y_1 = x$ e $y_2 = x'$ tem-se

$$\begin{aligned} y_1' &= x' = y_2 \\ y_2' &= x'' = -V'(x) = -V'(y_1) \end{aligned}$$

e portanto o sistema não-linear de primeira ordem é

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -V'(y_1) \end{cases}$$

c) Comecemos por determinar os pontos de equilíbrio e estudar a linearização do sistema em torno destes. Os pontos de equilíbrio são os pontos (y_1, y_2) que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} 0 = y_2 \\ 0 = -V'(y_1) \end{cases} \iff \begin{cases} y_2 = 0 \\ y_1(y_1^2 - 1) = 0 \end{cases} \iff (y_1, y_2) = (-1, 0), \;\; (0,0), \;\; (1,0).$$

A matriz Jacobiana do sistema num ponto arbitrário $(\hat{y}_1, \hat{y}_2)$ é

$$J(\hat{y}_1, \hat{y}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3\hat{y}_1^2 - 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e portanto em trono de cada um dos pontos de equilíbrio determinados acima têm-se as seguintes Jacobianas e respectivos valores próprios

$$(\hat{y}_1, \hat{y}_2) = (0,0): \qquad J(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_{\pm} = \pm i$$

$$(\hat{y}_1, \hat{y}_2) = (-1,0), (1,0): \quad J(-1,0) = J(1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{\pm} = \pm\sqrt{2}.$$

Conclui-se, assim, que o método de linearização em torno dos pontos de equilíbrio não é válido para o equilíbrio $(0,0)$ visto que as parte reais dos valores próprios da matriz Jacobiana correspondente são iguais a zero neste caso. A linearização é válida em torno de $(-1,0)$ e de $(1,0)$ com a mesma matriz Jacobiana e, portanto, o mesmo sistema linear associado:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix},$$

em que $(z_1, z_2) = (y_1, y_2) - (\hat{y}_1, \hat{y}_2)$ e $(\hat{y}_1, \hat{y}_2)$ é o ponto de equilíbrio em causa. Os vectores próprios desta matriz Jacobiana são

$$\lambda_+ = \sqrt{2}, \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 1 \\ 2 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_+ = -\sqrt{2}, \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 2 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix},$$

com α e β constantes reais arbitrárias. Atendendo a isto os retratos de fases das linearizações são o indicado na Figura 84.

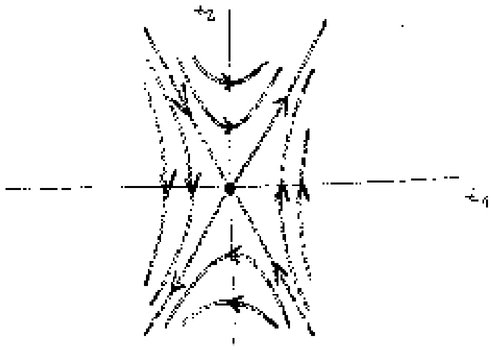


Figura 84: Retrato de fases das linearizações em torno de $(-1,0)$ e de $(1,0)$.

Para prosseguir e estudar o retrato de fase em zonas onde a linearização acima apresentada não é válida utilizamos o facto de $E(y_1, y_2) = E(x, x')$ ser uma constante do movimento para o sistema de primeira ordem, já que $E(x, x')$ era uma constante do movimento para a equação (104) a qual é equivalente ao sistema de primeira ordem.

Escrevendo

$$E(y_1, y_2) = \underbrace{\frac{1}{2} y_2^2}_{=:E_c(y_2)} + \underbrace{\left(-\frac{1}{4}\left(y_1^2 - 1\right)^2\right)}_{=:E_p(y_1)},$$

atendendo a que $E_c(y_2) \geq 0$ e a que as órbitas do sistema estão contidas nos conjuntos de nível de E, conclui-se que para um dado valor (ou nível) de E, digamos E_j, a região do espaço de fases para a qual poderá haver alguma órbita com esse valor da função E terá de estar contida no subconjunto de $\mathbb{R}^2$ no qual é satisfeita a desigualdade $E_p(y_1) \leq E_j$. Atendendo a estes factos, os conjuntos de nível de E são facilmente obtidos a partir do gráfico de $E_p(y_1)$, como se indica seguidamente.

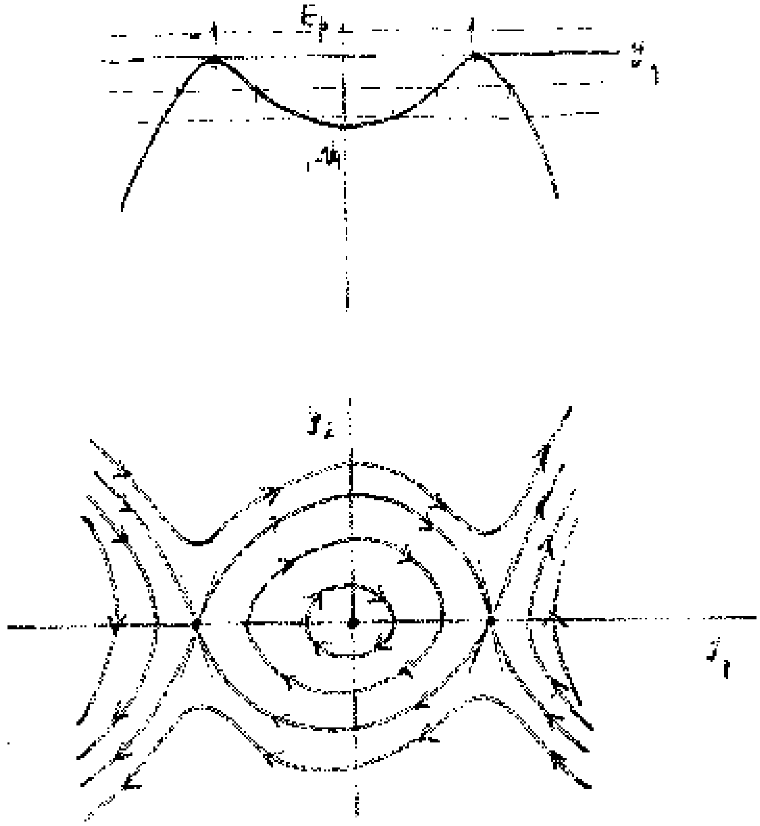


Figura 85: Gráfico de E_p e conjuntos de nível de E.

O sentido das órbitas, que já se indicou na figura anterior, é obtido imediatamente da primeira equação do sistema de primeira ordem: $y_1' = y_2$ diz-nos que a função $y_1(t)$ tem derivada positiva e é, portanto, estritamente crescente, se e só se $y_2 > 0$, pelo que as orbitas são orientadas no sentido de valores maiores de y_1 sempre que permanecerem em regiões onde $y_2 > 0$. Do retrato de fases esboçado acima conclui-se também imediatamente a informação quanto à limitação das órbitas do sistema indicada na Figura 86.

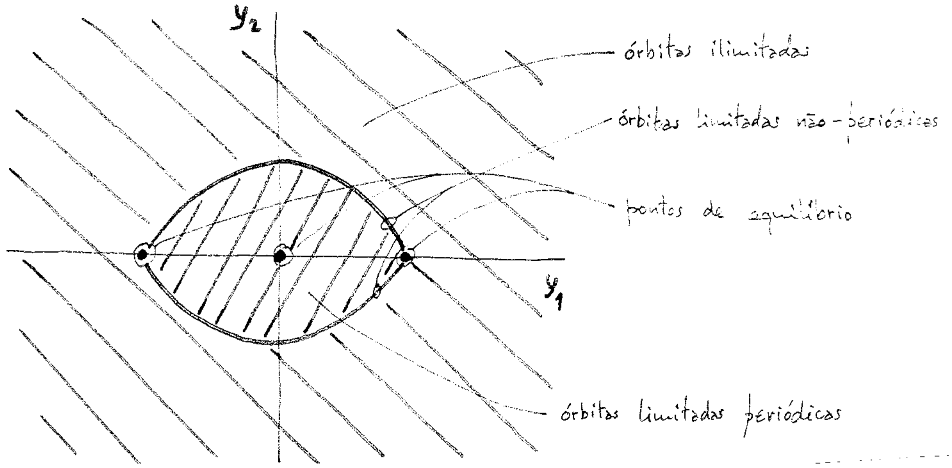


Figura 86: Informação quanto às propriedades de limitação das órbitas do sistema.

V.

a) Considerando $u(t,x) = T(t)X(x)$, a equação do calor vem escrita como $T'X = \mathcal{D}TX''$. Assumindo que $T(t)X(x) \neq 0$, a equação pode ser escrita como $T'/T = \mathcal{D}X''/X$, e portanto existe pelo menos uma constante real σ tal que, para quaisquer $(t,x) \in \Omega$, são válidas as igualdades

$$\frac{1}{\mathcal{D}}\frac{T'}{T}(t) = \sigma = \frac{X''}{X}(x).$$

As condições na fronteira podem ser escritas utilizando a hipótese $u(t,x) = T(t)X(x)$:

$$0 = u_x(t,0) = T(t)X'(0) \iff X'(0) = 0 \quad \text{porque, por hipótese,} \quad T(t) \neq 0$$
$$0 = u_x(t,4) = T(t)X'(4) \iff X'(4) = 0 \quad \text{pela mesma razão.}$$

Temos, assim, o seguinte problema de valores na fronteira para $X(x)$:

$$\begin{cases} X'' - \sigma X = 0 \\ X'(0) = 0 = X'(4). \end{cases}$$

Estudemos a possibilidade de obtenção de soluções não identicamente nulas para este problema:

- Considere-se $\sigma = 0$. A equação fica $X'' = 0$, cujas soluções são $X(x) = ax + b$. Atendendo às condições na fronteira e a que $X'(x) = a$ para qualquer x tem-se $a = 0$ e b arbitrário, pelo que as soluções do problema são as funções constantes $X(x) = b, \forall x$

- Se $\sigma > 0$ a solução geral da equação é $X(x) = ae^{\sqrt{\sigma}x} + be^{-\sqrt{\sigma}x}$. Atendendo às condições na fronteira tem-se o seguinte sistema para a e b :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ e^{\sqrt{\sigma}4} & -e^{-\sqrt{\sigma}4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a\sqrt{\sigma} \\ b\sqrt{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  e como o determinante desta matriz é $-e^{-\sqrt{\sigma}4} + e^{\sqrt{\sigma}4} > 0$ $(\neq 0)$ conclui-se que a única solução do sistema é $a = b = 0$ do que resulta a solução trivial $X(x) \equiv 0$.

- Finalmente tome-se $\sigma < 0$. A solução geral real da equação diferencial é agora $X(x) = a\cos(\sqrt{|\sigma|}x) + b\sin(\sqrt{|\sigma|}x)$. Como $X'(x) = -a\sqrt{|\sigma|}\sin(\sqrt{|\sigma|}x) + b\sqrt{|\sigma|}\cos(\sqrt{|\sigma|}x)$ tem-se, atendendo às condições na fronteira, $0 = X'(0) = b\sqrt{|\sigma|} \Rightarrow b = 0$ e $0 = X'(4) = -a\sqrt{|\sigma|}\sin(4\sqrt{|\sigma|}) \Rightarrow 4\sqrt{|\sigma|} = k\pi, \forall k \in \mathbb{N}_1$. As soluções correspondentes são, então,

$$X_k(x) = \cos\left(\frac{k\pi x}{4}\right), \ \forall k \in \mathbb{N}_1,$$

  e todas as combinações lineares finitas destas funções.

Dos resultados acima resulta que $\sigma = \sigma_k = -\frac{k^2\pi^2}{16}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Atendendo a isto a equação para $T(t)$ é

$$T' = -\frac{k^2\pi^2\mathcal{D}}{16}T, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

cuja solução geral é

$$T_k(t) = a_k \exp\left(-\frac{k^2\pi^2\mathcal{D}t}{16}\right), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

onde a_k são constantes reais arbitrárias. Assim, a solução geral formal do problema é

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{4}\right) \exp\left(-\frac{k^2\pi^2\mathcal{D}t}{16}\right).$$

b) Usando a condição inicial e a solução geral formal obtida na alínea anterior tem-se

$$4 - x = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{4}\right), \qquad 0 \leq x \leq 4$$

e portanto as constantes $a_k, k > 0$, são as constantes de Fourier da série de Fourier de cosenos da função 8−periódica cuja restrição a $[0,\pi]$ é igual a $\varphi(x)=4-x$. Portanto, se $k>0$,

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{4}\int_0^4 (4-x)\cos\left(\frac{k\pi x}{4}\right)dx \\
&= 2\int_0^4 \cos\left(\frac{k\pi x}{4}\right)dx - \frac{1}{2}\int_0^4 x\cos\left(\frac{k\pi x}{4}\right)dx \\
&= \frac{8}{k\pi}\sin(k\pi) - \frac{1}{2}\frac{4}{k\pi}4\sin(k\pi) - \frac{1}{2}\frac{16}{k^2\pi^2}\cos(k\pi) + \frac{1}{2}\frac{16}{k^2\pi^2} \\
&= \frac{8}{k^2\pi^2}(1-\cos(k\pi)) \\
&= \frac{8}{k^2\pi^2}\left(1-(-1)^k\right).
\end{aligned}$$

Se $k=0$ tem-se $a_k = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{4}\int_0^4(4-x)dx\right) = 2$ e portanto a solução formal é dada por

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= 2 + 8\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^k}{k^2\pi^2}\cos\left(\frac{k\pi x}{4}\right)\exp\left(-\frac{k^2\pi^2\mathcal{D}t}{16}\right) \\
&= 2 + 16\sum_{\ell=1}^{+\infty}\frac{1}{(2\ell-1)^2\pi^2}\cos\left(\frac{(2\ell-1)\pi x}{4}\right)\exp\left(-\frac{(2\ell-1)^2\pi^2\mathcal{D}t}{16}\right) \qquad (107)
\end{aligned}$$

c) Comecemos por estudar (107) quanto à continuidade. Designemos por $u_\ell(t,x)$ o termo geral da série (107). Observe-se que

$$|u_\ell(t,x)| \le \frac{1}{(2\ell-1)^2\pi^2}, \qquad \forall (t,x)\in\overline{\Omega} = \mathbb{R}_0^+\times[0,4].$$

Consequentemente, sabendo que $\sum_\ell \ell^{-2}$ é convergente e utilizando o teste de Weierstrass, conclui-se que a série do membro direito de (107) é absolutamente e uniformemente convergente e como, para cada $\ell\ge 1$, as funções $u_\ell(t,x)$ são contínuas em $\overline{\Omega}$, pode-se concluir que $u(t,x)$ é uma função contínua em $\overline{\Omega}$. Para investigar se $u(t,x)\in\mathcal{C}_t^1(\Omega)\cap\mathcal{C}_x^2(\Omega)$ observe-se primeiro o que se passa com as séries de termos gerais $\partial u_\ell/\partial t$, $\partial u_\ell/\partial x$ e $\partial^2 u_\ell/\partial x^2$. Como, para qualquer $(t,x)\in\Omega_{t_0} \overset{\text{def}}{=} [t_0,+\infty[\times]0,4[$, com $t_0>0$, se tem

$$\left|\frac{\partial u_\ell}{\partial t}(t,x)\right| \le \frac{\mathcal{D}}{16}\exp\left(-\frac{(2\ell-1)^2\pi^2\mathcal{D}t_0}{16}\right) =: M_\ell,$$

e como a série $\sum_\ell M_\ell$ é convergente, conclui-se, pelo teste de Weierstrass, que a série $\sum_\ell \partial u_\ell/\partial t$ é absolutamente e uniformemente convergente em Ω_{t_0} e, como $u_\ell\in\mathcal{C}_t^1$ e $\sum_\ell u_\ell$ é convergente, podemos concluir que $u\in\mathcal{C}_t^1(\Omega_{t_0})$, para qualquer $t_0>0$. Consequentemente u é também de classe $\mathcal{C}_t^1$ em $\cup_{t_0>0}\Omega_{t_0}=\Omega$. Agora quanto à diferenciabilidade de u em ordem a x tem-se, para todos os pontos $(t,x)\in\Omega_{t_0}, t_0>0$,

$$\left|\frac{\partial u_\ell}{\partial x}(t,x)\right| \le \frac{1}{4(2\ell-1)\pi}\exp\left(-\frac{(2\ell-1)^2\pi^2\mathcal{D}t_0}{16}\right) =: N_\ell,$$

e portanto o teste de Weierstrass permite concluir que $\sum_\ell \partial u_\ell/\partial x$ é absolutamente e uniformemente convergente, visto que $\sum_\ell N_\ell < +\infty$. O argumento apresentado acima pode ser agora de novo aplicado a este caso para concluir que $u \in \mathcal{C}^1_x(\Omega)$. Analogamente, tem-se, em Ω_{t_0} com $t_0 > 0$,

$$\left|\frac{\partial^2 u_\ell}{\partial x^2}(t,x)\right| \leq \frac{1}{16}\exp\left(-\frac{(2\ell-1)^2\pi^2\mathcal{D}t_0}{16}\right) =: \tilde{N}_\ell,$$

e como $\sum_\ell \tilde{N}_\ell < \infty$ tem-se a convergência uniforme da série $\sum_\ell \partial^2 u_\ell/\partial x^2$ e, como a série $\sum_\ell \partial u_\ell/\partial x$ é convergente em Ω_{t_0} e $u_\ell \in \mathcal{C}^2_x(\Omega)$, conclui-se que $u \in \mathcal{C}^2_x(\Omega_{t_0})$ para qualquer $t_0 > 0$, e portanto conclui-se que $u \in \mathcal{C}^2_x(\Omega)$.

Isto permite concluir que a solução formal apresentada em (107) é, de facto, uma solução clássica de (105).

VI.

1.a) A equação $z' = (a + b(t))z$ tem como solução geral

$$\begin{aligned}
z(t) &= z(0)\exp\left(\int_0^t (a+b(s))ds\right)\\
&= z(0)\exp\left(at + \int_0^t b(s)ds\right)\\
&= z(0)e^{at} + z(0)\exp\left(\int_0^t b(s)ds\right).
\end{aligned}$$

Como $z(0)e^{at}$ é a solução de $y' = ay$ com condição inicial em $t = 0$ igual a $z(0)$ e como, pelo enunciado, todas as soluções desta equação são limitadas, conclui-se que $z(t)$ será uma função limitada, quando $t \to +\infty$, se $\exp\left(\int_0^t b(s)ds\right)$ for limitada quando $t \to +\infty$, ou seja, se $\int_0^{+\infty} b(s)ds < +\infty$ e portanto, como $b(s) \leq |b(s)|$, se $\int_0^{+\infty} |b(s)|ds < +\infty$, como se pretendia.

2.a) Pelas hipóteses apresentadas no enunciado tem-se, para todos os $t \geq 0$, $\alpha + \int_0^t u(s)v(s)ds \geq \alpha > 0$ e portanto pode-se dividir a desigualdade (106) pelo seu membro direito. Obtem-se, assim,

$$\frac{u(t)}{\alpha + \int_0^t u(s)v(s)ds} \leq 1.$$

Multiplicando esta desigualdade por $v(t)$ tem-se

$$\frac{u(t)v(t)}{\alpha + \int_0^t u(s)v(s)ds} \leq v(t). \tag{108}$$

Atendendo a que o membro esquerdo de (108) é igual a

$$\frac{d}{dt}\log\left|\alpha + \int_0^t u(s)v(s)ds\right|$$

tem-se, integrando ambos os membros de (108) entre 0 e $t \geq 0$ e atendendo à monotonia do integral,

$$\log\left(\alpha + \int_0^t u(s)v(s)ds\right) - \log\alpha \leq \int_0^t v(s)ds$$

ou seja, usando (106),

$$\log u(t) \leq \log\left(\alpha + \int_0^t u(s)v(s)ds\right) \leq \log\alpha + \int_0^t v(s)ds$$

pelo que $\log(u(t)/\alpha) \leq \int_0^t v(s)ds$, e portanto conclui-se que

$$u(t) \leq \alpha \exp\left(\int_0^t v(s)ds\right),$$

como se pretendia.

2.b) Considerando $\mathbf{z}' = (A + B(t))\mathbf{z}$ como sendo um sistema não-homogéneo $\mathbf{z}' = A\mathbf{z} + B(t)\mathbf{z}(t)$ e usando a fórmula de variação das constantes para este sistema tem-se

$$\mathbf{z}(t) = e^{At}\mathbf{z}(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}B(s)\mathbf{z}(s)ds. \tag{109}$$

Como, por hipótese, todas as soluções de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ são limitadas em $\mathbb{R}^+$, conclui-se que todos os valores próprios de A têm parte real não positiva e aqueles com parte real nula têm multiplicidades algébrica e geométrica iguais. Em particular, sabemos que nestas circunstâncias existe uma constante M, independente de $\theta \geq 0$ tal que, para estes valores de θ, se verifica $\|\!|e^{A\theta}|\!\| \leq M$. Consequentemente, aplicando normas a (109) e usando as propriedades elementares das normas vectoriais e matriciais tem-se

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{z}(t)\| &\leq a\|\!|e^{At}|\!\| \cdot \|\mathbf{z}(0)\| + a\int_0^t \|\!|e^{A(t-s)}|\!\| \cdot \|B(s)\mathbf{z}(s)\|ds \\
&\leq aM\|\mathbf{z}(0)\| + a^2M\int_0^t \|\!|B(s)|\!\| \cdot \|\mathbf{z}(s)\|ds \\
&= \alpha + \int_0^t v(s)\|\mathbf{z}(s)\|ds
\end{aligned}$$

onde se definiu $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} aM\|\mathbf{z}(0)\| > 0$ e $v(s) \stackrel{\text{def}}{=} a^2M\|\!|B(s)|\!\| \geq 0$, e onde a é uma constante positiva tal que, para qualquer matriz $X \in M_n$ e qualquer vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, é válida a desigualdade $\|X\mathbf{x}\| \leq a\|\!|X|\!\| \cdot \|\mathbf{x}\|$ (por exemplo: $a = 1$ se $\|\!|\cdot|\!\|$ for a norma matricial induzida pela norma vectorial $\|\cdot\|$). Aplicando a desigualdade de Gronwall (com $\|\mathbf{z}(t)\|$ em vez de $u(t)$) à última desigualdade acima conclui-se que

$$\|\mathbf{z}(t)\| \leq \alpha\exp\left(\int_0^t v(s)ds\right) = \alpha\exp\left(a^2M\int_0^t \|\!|B(s)|\!\|ds\right)$$

e portanto $\mathbf{z}(t)$ será limitado quando $t \to +\infty$ desde que $\int_0^{+\infty} \|\!|B(s)|\!\|ds < +\infty$.

Exame de 17.7.98 e resolução.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

(Engenharia Aeroespacial, Engenharia do Ambiente, Química, 1ºAno)

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

Data: 17/7/1998 **Duração:** 3h00.

I.

1. Considere um sistema tridimensional de equações diferenciais ordinárias, lineares, autónomas e homogéneas, para o qual se sabe que $\lambda = 0$ e $\lambda = -1$ são os únicos valores próprios *distintos* da matriz do sistema e que os correspondentes espaços próprios são ortogonais.

   a) Quantos retratos de fase qualitativamente distintos existem correspondentes a esta situação?

   b) Estude a estabilidade da solução nula em todas as situações identificadas.

   c) Esboce todos os possíveis retratos de fase qualitativamente distintos.

2. Considere o sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + e^{-t}\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \tag{110}$$

   a) Determine uma expressão para a solução geral de (110).

   b) Determine a solução de (110) que satisfaz a condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

II.

Considere a equação diferencial $x'' + px' + qx = \cos(\omega t)$, onde p, q e ω são constantes reais.

a) Determine para que valores de p e de q é que *todas* as soluções da equação homogénea correspondente são limitadas em todo o $\mathbb{R}$.

b) Determine para que valores de (p, q, ω) é que *todas* as soluções da equação dada são limitadas em todo o $\mathbb{R}$.

III.

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = t(1 + x^2)f(x) \\ x(1) = 0. \end{cases} \tag{111}$$

1. Considere $f(x) = \pi/4$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Resolva o problema de Cauchy (111), indicando o intervalo máximo de existência da solução.

2. Considere agora $f(x) = \arctan\left(1 + x^2\right)$.

   a) Justifique, sem tentar resolver explicitamente (111), que, também neste caso, o problema de Cauchy tem localmente uma e uma só solução.

   b) Mostre que o intervalo máximo de existência da solução referida em a) é limitado à direita.

IV.

Em determinados fenómenos de transferência de energia térmica é importante considerarem-se simultaneamente mecanismos de difusão e de convecção. Um modelo unidimensional muito simples é constituido pela equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (1-\varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad (t,x) \in \Omega = \mathbb{R}^+ \times]0,1[\tag{112}$$

onde $\varepsilon \in]0,1[$ é um parâmetro que mede a importância relativa da contribuição difusiva (u_{xx}) e convectiva (u_x). Considere (112) com condições de Dirichlet homogéneas.

1.a) Utilizando o método de separação de variáveis, determine uma expressão para a solução geral formal, $u(t,x;\varepsilon)$, deste problema.

b) Sendo dada uma condição inicial $u(0,x;\varepsilon) = f(x)$ indique como calcularia os coeficientes da solução geral formal do problema.

2.a) Considere agora a condição inicial $f(x) = 1$, $\forall x \in]0,1[$. Estude o comportamento dos coeficientes de Fourier da solução formal obtida acima quando $\varepsilon \to 0^+$ e quando $\varepsilon \to 1^-$.
(Sugestão: poderá ser útil recordar que $\int e^{\alpha x}\sin(\beta x)dx = \left(e^{\alpha x}(\alpha\sin(\beta x) - \beta\cos(\beta x))\right)/(\alpha^2+\beta^2)$*)*

b) Mostre que a solução formal é contínua em Ω.

c) Mostre que, para cada $(t,x) \in \Omega$ fixo, o limite $\lim_{\varepsilon\to 0^+} u(t,x;\varepsilon)$ existe e a função limite é uma solução formal contínua em Ω do problema limite (112) com $\varepsilon = 0$. Estude o que se passa quando $\varepsilon \to 1^-$.

3. Considere (112) com $\varepsilon = 1$. Utilize a mudança de variáveis $(t,x) \mapsto (\xi,\eta)$ definida por $\xi = x+t, \eta = x-t$, para mostrar que todas as soluções da equação são da forma $u(t,x;1) = \varphi(x+t)$ e relacione φ com a condição inicial do problema.

Resolução:

I.

1.a) Tendo em conta que a matriz do sistema tem dimensão 3 e que os seus valores próprios distintos são $\lambda = 0$ e $\lambda = -1$ conclui-se que ou um, ou o outro, mas não os dois simultaneamente, tem de ter multiplicidade algébrica igual a 2. Há, então, duas hipóteses:

$$A)\left\{\begin{array}{lll}\lambda=0 & \text{com} & m_a=2\\ \lambda=-1 & \text{com} & m_a=1\end{array}\right. \quad \text{e} \quad B)\left\{\begin{array}{lll}\lambda=0 & \text{com} & m_a=1\\ \lambda=-1 & \text{com} & m_a=2\end{array}\right. ,$$

onde m_a é a multiplicidade algébrica do correspondente valor próprio. Seja m_g a multiplicidade geométrica (=dimensão do espaço próprio) do valor próprio λ. Como se sabe que $1 \leq m_g \leq m_a$, existem duas situações distintas para cada um dos casos acima, a saber

$$A.1)\quad \left\{\begin{array}{lllll}\lambda=0 & \text{com} & m_a=2 & \text{e} & m_g=2\\ \lambda=-1 & \text{com} & m_a=1 & \text{e} & m_g=1\end{array}\right.$$

$$A.2)\quad \left\{\begin{array}{lllll}\lambda=0 & \text{com} & m_a=2 & \text{e} & m_g=1\\ \lambda=-1 & \text{com} & m_a=1 & \text{e} & m_g=1\end{array}\right.$$

$$B.1)\quad \left\{\begin{array}{lllll}\lambda=0 & \text{com} & m_a=1 & \text{e} & m_g=1\\ \lambda=-1 & \text{com} & m_a=2 & \text{e} & m_g=2\end{array}\right.$$

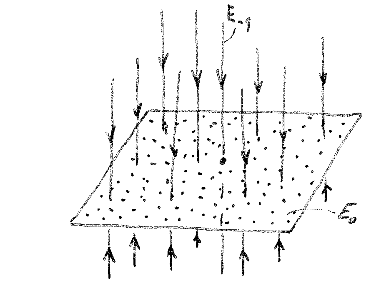
$$B.2)\quad \left\{\begin{array}{lllll}\lambda=0 & \text{com} & m_a=1 & \text{e} & m_g=1\\ \lambda=-1 & \text{com} & m_a=2 & \text{e} & m_g=1\end{array}\right. .$$

A cada uma destes casos está associada uma única forma canónica de Jordan (a menos da ordenação dos blocos) e a casos diferentes correspondem matrizes de Jordan diferentes e não-semelhantes. Portanto estes quatro casos constituem as quatro possibilidades distintas correspondentes à presente situação.

b) Atendendo à classificação dos quatro casos possíveis dada acima e ao resultado de caracterização da estabilidade dos pontos de equilíbrio de sistemas lineares, podemos afirmar que a solução nula não será, em qualquer dos casos, assimptoticamente estável, já que existe sempre um valor próprio nulo. Nos casos A.1), B.1) e B.2) em que o valor próprio nulo tem multiplicidades algébrica e geométrica iguais, conclui-se que a solução nula é estável. No caso A.2), tem-se $m_a = 2 > 1 = m_g$ para o valor próprio nulo, e a solução nula é instável.

c) Nos casos A.1) e B.1) a matriz do sistema é diagonalizável. Usando o facto do conjunto dos pontos de equilíbrio constituirem o espaço nulo da matriz, o qual é igual ao espaço próprio do valor próprio nulo e atendendo à ortogonalidade entre os espaços próprios fornecida no enunciado, conclui-se que os retratos de fase nestes casos são os apresentados na Figura 87.

A.1)



B.1)

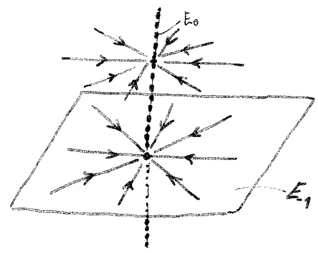


Figura 87: Retratos de fase nos casos A.1) e B.1).

Nos casos A.2) e B.2) a matriz do sistema não é diagonalizável. No espaço invariante gerado pelo vector próprio e pelo vector próprio generalizado correspondentes ao valor próprio com $m_g \neq m_a$ têm-se os retratos de fase indicados na Figura 88.

Os retratos de fase são agora fáceis de obter já que os comportamentos dos sistemas nos espaços próprios correspondentes aos valores próprios com $m_g = m_a$ são o que se apresenta na Figura 89. Tem-se, portanto, os retratos de fase apresentados na Figura 90.

2.a) Sabendo que a solução geral de (110) pode ser escrita como $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\text{hom}}(t) + \mathbf{x}_{\text{part}}(t)$, onde $\mathbf{x}_{\text{hom}}(t)$ é a solução geral da equação homogénea e $\mathbf{x}_{\text{part}}(t)$ é uma solução particular da equação não-homogénea, comecemos por determinar $\mathbf{x}_{\text{hom}}(t)$. A matriz do sistema é triangular superior, pelo que podemos resolver o sistema sucessivamente começando na última equação:

$$\begin{array}{lll} x_3' = 0 & \Rightarrow \quad x_3(t) = \alpha_3 & \\ x_2' = -x_2 & \Rightarrow \quad x_2(t) = \alpha_2 e^{-t} & \\ x_1' = x_3 & \Rightarrow \quad x_1'(t) = \alpha_3 & \Rightarrow \quad x_1(t) = \alpha_3 t + \alpha_1 \end{array}$$

pelo que a solução geral da equação homogénea é

$$\mathbf{x}_{\text{hom}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}.$$

Uma solução particular da equação não-homogénea pode ser obtida utilizando o método dos palpites, a linearidade da equação e a estrutura da matriz do sistema: o termo não-homogéneo

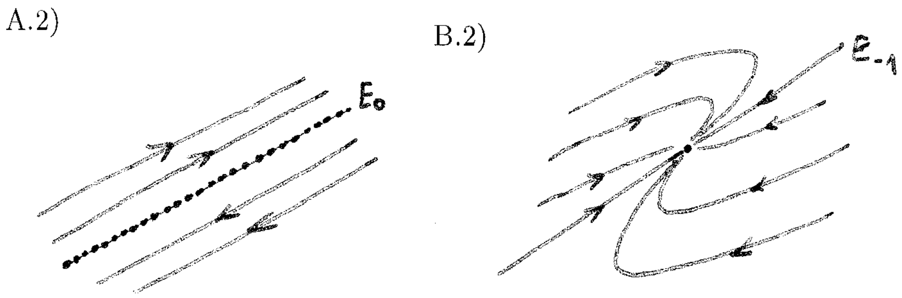


Figura 88: Retratos de fase nos casos A.2) e B.2).

Figura 89: Comportamento nos espaços próprios com $m_g = m_a$, nos casos A.2) e B.2).

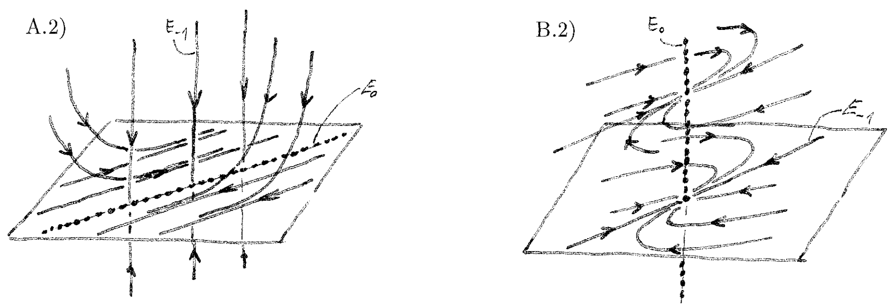


Figura 90: Comportamento nos nos casos A.2) e B.2).

é $\mathbf{h}(t) = \mathbf{h}_1(t) + \mathbf{h}_2(t)$ com $\mathbf{h}_1(t) = e^{-t}\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{h}_2(t) = \mathbf{e}_3$. Atendendo a que os valores próprios da matriz do sistema são $\lambda = 0$ com $m_a = 2$ e $m_g = 1$ e $\lambda = -1$ com $m_a = m_b = 1$, concluímos que uma solução particular do sistema será do tipo $\mathbf{x}_{\text{part}}(t) = \mathbf{u}_{\text{part}}(t) + \mathbf{v}_{\text{part}}(t)$, em que $\mathbf{u}_{\text{part}}(t) = (a_1t + a_2)e^{-t}\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{v}_{\text{part}}(t) = (a_3t^2 + a_4t + a_5, 0, a_6t^2 + a_7t + a_8)^{\mathrm{T}}$, onde foi explicitamente usado o facto da estrutura da matriz do sistema implicar que a equação para $x_2(t)$, por um lado, e o sistema para $(x_1(t), x_3(t))$, por outro, estarem desacoplados no sistema homogéneo, e assim permanecerem no caso não homogéneo. Substituindo este palpite no sistema tem-se

$$\begin{bmatrix} 2a_3t + a_4 \\ a_1e^{-t} - a_1te^{-t} - a_2e^{-t} \\ 2a_6t + a_7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3t^2 + a_4t + a_5 \\ a_1te^{-t} + a_2e^{-t} \\ a_6t^2 + a_7t + a_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ 1 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} -a_6t^2 + (2a_3 - a_7)t + (a_4 - a_8) \\ a_1e^{-t} \\ 2a_6t + a_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ 1 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a_6 = 0 \\ 2a_3 - a_7 = 0 \\ a_4 - a_8 = 0 \\ a_1 = 1 \\ 2a_6 = 0 \\ a_7 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_3 = 1/2 \\ a_4 = a_8 \\ a_6 = 0 \\ a_7 = 1 \end{cases}$$

e a_2, a_5 e a_8 são arbitrários. Fazendo-os iguais a zero tem-se a solução particular $\mathbf{x}_{\text{part}}(t) = \big(t^2/2, te^{-t}, t\big)^{\mathrm{T}}$, pelo que uma expressão para a solução geral será

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ te^{-t} \\ t \end{bmatrix}.$$

b) Usando a condição inicial dada tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

pelo que se conclui imediatamente que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ e portanto a solução pretendida é

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t^2 + t + 1 \\ te^{-t} + e^{-t} \\ t + 1 \end{bmatrix}.$$

II.

a) Considerando a equação homogénea $x'' + px' + q = 0$, as suas soluções podem ser determinadas escrevendo-a na forma $(D^2 + pD + q)x = 0$ e factorizando o polinómio diferencial $P(D) \stackrel{\text{def}}{=} D^2 + pD + q$. Para que todas as soluções sejam limitadas em $\mathbb{R}$ é necessário e suficiente que os zeros de $P(\lambda)$ tenham parte real nula e sejam simples. Usando a fórmula resolvente para as equações algébricas do segundo grau, os zeros de $P(\lambda)$ são

$$\lambda_{\pm} = \frac{-\,p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Analizando agora esta expressão conclui-se que
(i) $q \leq 0 \Rightarrow p^2 - 4q \geq 0 \Rightarrow \lambda_- < 0 < \lambda_+ \Rightarrow$ as soluções não nulas são ilimitadas em $\mathbb{R}$. Consequentemente, tem de se ter $q > 0$.
(ii) Se, com $q > 0$, $p^2 - 4q \geq 0$, então $\lambda_{\pm} \in \mathbb{R}^-$ e as soluções são ilimitadas em $\mathbb{R}^-$. Portanto, tem de ser ter $p^2 - 4q < 0$, caso em que vem

$$\lambda_{\pm} = -\,\frac{p}{2} \pm i\frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$$

e, para que $\mathrm{Re}(\lambda_{\pm}) = 0$, tem de se ter $p = 0$, vindo, então, $\lambda_{\pm} = \pm i\sqrt{q}$. A região do espaço (p, q) pretendida é, então, $\{0\} \times \mathbb{R}^+$.

b) Sabemos que qualquer solução não homogénea pode ser escrita na forma $x(t) = x_{\text{hom}}(t) + x_{\text{part}}(t)$ onde $x_{\text{hom}}(t)$ é a solução geral da equação homogénea associada e $x_{\text{part}}(t)$ é uma solução particular da equação não-homogénea. Da alínea anterior, para que $x_{\text{hom}}(t)$ seja limitada em $\mathbb{R}$ é necessário e suficiente que $(p, q) \in \{0\} \times \mathbb{R}^+$. Usando o método dos palpites, uma solução particular da equação não-homogénea é do tipo $\alpha_1 \cos(\omega t) + \alpha_2 \sin(\omega t)$ se $\omega \neq \pm\sqrt{q}$ e é do tipo $(\alpha_1 t + \beta_1)\cos(\omega t) + (\alpha_2 t + \beta_2)\sin(\omega t)$ se $\omega = \pm\sqrt{q}$. Nesta última situação as soluções não serão limitadas em $\mathbb{R}$ pois em geral pelo menos uma das constantes α_1 e α_2 será diferente de zero. Conclui-se, assim, que tem de se ter $\omega \neq \pm\sqrt{q}$ e vem $(p, q, \omega) \in \{0\} \times \mathbb{R}^+ \times \big(\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{q}, \sqrt{q}\}\big)$.

III.

1. Nestas condições, a equação é $x' = t(1+x^2)\frac{\pi}{4}$, a qual é separável e pode ser integrada como se segue, usando a condição inicial $x(1) = 0$:

$$
\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} x' = t(1+x^2)\frac{\pi}{4} \\ x(1) = 0 \end{array}\right. \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{1+x^2}\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\pi}{4}t \\ \\ x(1) = 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \int_1^t \frac{1}{1+(x(s))^2}\frac{dx(s)}{ds}ds = \frac{\pi}{4}\int_1^t sds \\
&\Leftrightarrow \quad \int_0^{x(t)} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}\left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \arctan x(t) = \tfrac{\pi}{4}\left(\tfrac{t^2}{2} - \tfrac{1}{2}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad x(t) = \tan\left(\tfrac{\pi}{4}\left(\tfrac{t^2}{2} - \tfrac{1}{2}\right)\right), \quad \text{com} \quad -\tfrac{\pi}{2} < \tfrac{\pi}{4}\left(\tfrac{t^2}{2} - \tfrac{1}{2}\right) < \tfrac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

Como t tem de satisfazer as desigualdades acima indicadas, conclui-se que $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4}\left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\right) < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -4 < t^2 - 1 < 4 \Leftrightarrow -3 < t^2 < 5 \Rightarrow 0 \leq t^2 < 5 \Leftrightarrow -\sqrt{5} < t < \sqrt{5}$. Observando que quando $t \to \pm\sqrt{5}$ se tem $x(t) \to +\infty$, conclui-se que, de facto, o intervalo máximo de definição da solução do problema de Cauchy em causa é $I_{\max} =]-\sqrt{5}, \sqrt{5}[$.

2.a) Neste caso a equação é do tipo $x' = g(t,x)$, com $g(t,x) \overset{\text{def}}{=} t(1+x^2)\arctan(1+x^2)$. Esta função está definida e é contínua em $\mathbb{R}^2$ e é aí de classe $\mathcal{C}^1$ em relação à variável x visto que é obtida por composição, produtos e somas de funções continuamente diferenciáveis na variável x. Portanto, em particular, g é localmente Lipschitziana em relação à variável x e o Teorema de Picard-Lindelöf permite concluir que o problema de Cauchy indicado tem uma única solução local.

b) Estamos interessados em estudar o que acontece para $t > 1 > 0$. A solução local, cuja existência e unicidade ficou estabelecida na alínea anterior, é monótona crescente pois a sua derivada satisfaz $x'(t) = g(t, x(t))$ e a função $g(t,x)$ é positiva para todos os $t > 0$ e para todos os valores de x. Consequentemente $x(t) > x(1) = 0$ para todos os valores de $t > 1$ para os quais a solução está definida. Para $x > 0$ tem-se $\arctan(1+x^2) > \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. A solução do problema de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{l} u' = t(1+u^2)\frac{\pi}{4} \\ u(1) = 0. \end{array}\right.$$

foi já determinada e é igual a $u(t) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\right)\right)$, a qual está definida no intervalo máximo $]-\sqrt{5}, \sqrt{5}[$ e tende para $+\infty$ quando $t \to \sqrt{5}$. Atendendo à relação indicada acima entre o membro direito desta equação e $g(t,x)$ e tendo presente os teoremas de comparação, conclui-se que $x(t) \geq u(t)$ para todos os valores de t para os quais ambas as funções estão definidas. Mas esta desigualdade implica que $x(t)$ não está certamente definida para $t \geq \sqrt{5}$

uma vez que $u(t) \to +\infty$ quando $t \to \sqrt{5}$. Consequentemente o intervalo máximo de $x(t)$ é limitado à direita por algum $t^\star \leq \sqrt{5}$.

IV.

1.a) Escrevendo $u(t,x;\varepsilon) = T(t)X(x)$ a equação (112) pode ser escrita como $T'X = (1-\varepsilon)TX'' + \varepsilon TX'$ e, supondo que $T(t)X(x) \neq 0$ para $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times]0,1[$, obtém-se

$$\frac{T'}{T}(t) = (1-\varepsilon)\frac{X''}{X}(x) + \varepsilon\frac{X'}{X}(x).$$

Como esta igualdade tem de ser válida em todos os pontos (t,x) do aberto $\mathbb{R}^+ \times]0,1[$, conclui-se que existe uma constante real σ tal que

$$\frac{T'}{T}(t) = \sigma = (1-\varepsilon)\frac{X''}{X}(x) + \varepsilon\frac{X'}{X}(x),$$

obtendo-se assim as equações diferenciais ordinárias seguintes

$$\begin{aligned} & T' - \sigma T = 0 \\ & (1-\varepsilon)X'' + \varepsilon X' - \sigma X = 0 \end{aligned}$$

e, atendendo às condições de Dirichlet homogéneas, $0 = u(t,0;\varepsilon) = T(t)X(0)$ e $0 = u(t,1;\varepsilon) = T(t)X(1)$, a equação diferencial para $X(x)$ vem suplementada com as condições na fronteira $X(0) = X(1) = 0$:

$$\begin{cases} (1-\varepsilon)X'' + \varepsilon X' - \sigma X = 0, \quad 0 < x < 1, \\ X(0) = 0 = X(1). \end{cases}$$

Como $\varepsilon \in]0,1[$ tem-se $1-\varepsilon \neq 0$ e dividindo a equação por $1-\varepsilon$ obtém-se

$$X'' + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}X' - \frac{\sigma}{1-\varepsilon}X = 0, \tag{113}$$

a qual pode ser escrita como $P(D)X = 0$, com $P(\cdot)$ o polinómio definido por $P(\lambda) = \lambda^2 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\lambda - \frac{\sigma}{1-\varepsilon}$. Os zeros de $P(\lambda)$ são

$$\lambda_\pm = \frac{-\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + 4\sigma(1-\varepsilon)}}{2(1-\varepsilon)}.$$

Vejamos as diferentes possibilidades:

- Se $\varepsilon^2 + 4\sigma(1-\varepsilon) > 0$, ou seja $\sigma > -\frac{\varepsilon^2}{4(1-\varepsilon)}$, então $\lambda_\pm \in \mathbb{R}$ e tem-se $\lambda_- < 0 < \lambda_+$, pelo que a solução geral de (113) é

$$X(x) = \alpha_1 e^{\lambda_- x} + \alpha_2 e^{\lambda_+ x}.$$

Atendendo às condições na fronteira virá

$$\begin{aligned}0 &= \alpha_1 + \alpha_2\\ 0 &= \alpha_1 e^{\lambda_-} + \alpha_2 e^{\lambda_+}.\end{aligned}$$

Da primeira equação tem-se $\alpha_2 = -\alpha_1$ e substituindo na segunda vem $0 = \alpha_1(e^{\lambda_-} - e^{\lambda_+})$ o que implica que $\alpha_1 = 0$ e portanto também $\alpha_2 = 0$, concluindo-se que a única solução é a solução trivial $X(x) \equiv 0$, que não nos interessa.

- Se $\varepsilon^2 + 4\sigma(1-\varepsilon) = 0$, ou seja $\sigma = -\frac{\varepsilon^2}{4(1-\varepsilon)}$, tem-se também $\lambda_\pm \in \mathbb{R}$ mas agora $\lambda_+ = \lambda_- < 0$. A solução geral de (113) será

$$X(x) = \alpha_1 e^{\lambda_+ x} + \alpha_2 x e^{\lambda_+ x}$$

e portanto, de $0 = X(0) = \alpha_1$ e $0 = X(1) = \alpha_1 e^{\lambda_+} + \alpha_2 e^{\lambda_+}$, conclui-se que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e a única solução é novamente a identicamente nula.

- Finalmente, quando $\varepsilon^2 + 4\sigma(1-\varepsilon) < 0$, ou seja $\sigma < -\frac{\varepsilon^2}{4(1-\varepsilon)}$, tem-se $\lambda_\pm \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ e pode-se escrever

$$\lambda_\pm = -\frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)} \pm i\frac{\sqrt{|\varepsilon^2 + 4\sigma(1-\varepsilon)|}}{2(1-\varepsilon)}.$$

Designemos por μ a parte imaginária de $\lambda_\pm$. A solução geral da equação (113) é

$$X(x) = e^{-\frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)}x}\left(\alpha_1 \cos \mu x + \alpha_2 \sin \mu x\right)$$

e as condições na fronteira resultam em

$$\begin{aligned}0 &= 1(\alpha_1 1 + \alpha_2 0)\\ 0 &= e^{-\frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)}}\left(\alpha_1 \cos \mu + \alpha_2 \sin \mu\right).\end{aligned}$$

Da primeira equação conclui-se que $\alpha_1 = 0$ e substituindo este resultado na segunda equação vem $0 = e^{-\frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)}}\alpha_2 \sin \mu$, o que implica que as soluções não-triviais são obtidas se e só se $\mu = k\pi,\ k \in \mathbb{N}_1$. Consequentemente, as soluções em causa são todas as obtidas por combinações lineares das funções

$$X(x) = e^{-\frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)}x}\sin(k\pi x), \qquad k \in \mathbb{N}_1.$$

Podemos agora resolver a equação para $T(t)$ uma vez que os possíveis valores de σ são já conhecidos: como tem de se ter $\mu = k\pi$, obtêm-se, da expressão de μ e da condição $\varepsilon^2 + 4\sigma(1-\varepsilon) < 0$, os seguintes valores possíveis para σ :

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{|\varepsilon^2 + 4\sigma(1-\varepsilon)|}}{2(1-\varepsilon)} = k\pi \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\varepsilon^2 + 4\sigma(1-\varepsilon)\right| = 4(1-\varepsilon)^2 k^2\pi^2\\ &\Leftrightarrow \quad \varepsilon^2 + 4\sigma(1-\varepsilon) = -4(1-\varepsilon)^2 k^2\pi^2\\ &\Leftrightarrow \quad 4\sigma(1-\varepsilon) = -\varepsilon^2 - 4(1-\varepsilon)^2 k^2\pi^2\\ &\Leftrightarrow \quad \sigma = -\frac{\varepsilon^2}{4(1-\varepsilon)} - (1-\varepsilon)k^2\pi^2.\end{aligned}$$

As soluções da equação para $T(t)$ são, então,

$$T(t) = \alpha_k \exp\left[\left(- \frac{\varepsilon^2}{4(1-\varepsilon)} - (1-\varepsilon)k^2\pi^2\right) t\right], \qquad k \in \mathbb{N}_1.$$

A solução geral formal é, portanto,

$$u(t,x;\varepsilon) = e^{-\frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)}x} e^{-\frac{\varepsilon^2}{4(1-\varepsilon)}t} \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \sin(k\pi x) e^{-(1-\varepsilon)k^2\pi^2 t}. \tag{114}$$

b) Sendo dada a condição inicial $u(0,x;\varepsilon) = f(x)$ tem-se

$$f(x) = u(0,x;\varepsilon) = e^{-\frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)}x} \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \sin(k\pi x),$$

ou seja,

$$e^{\frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)}x} f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \sin k\pi x.$$

Consequentemente, as constantes α_k são os coeficientes da série de Fourier de senos da função periódica de período 2 que em $]0,1[$ coincide com a função $e^{\frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)}x} f(x)$, havendo, portanto, que prolongar esta função a $\mathbb{R}$ como uma função ímpar (para que a série de Fourier seja de senos) de período 2. Assim sendo, os coeficientes de Fourier são calculados por

$$\alpha_k = 2\int_0^1 f(x) e^{\frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)}x} \sin(k\pi x)dx, \qquad k \in \mathbb{N}_1.$$

2.a) Sendo dada $f(x) = 1$, $\forall x \in]0,1[$, tem-se, pela alínea anterior e atendendo à sugestão,

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= 2\int_0^1 e^{\frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)}x} \sin(k\pi x)dx \\
&= 2 \left. \frac{e^{\frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)}x}\left(\frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)}\sin(k\pi x) - k\pi\cos(k\pi x)\right)}{\frac{\varepsilon^2}{4(1-\varepsilon)^2} + k^2\pi^2}\right|_0^1 \\
&= 8k\pi(1-\varepsilon)^2 \frac{1-(-1)^k e^{\frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)}}}{\varepsilon^2 + 4(1-\varepsilon)^2 k^2\pi^2}
\end{aligned}$$

Consequentemente tem-se

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \alpha_k = 8k\pi \cdot 1 \frac{1-(-1)^k 1}{0 + 4k^2\pi^2} = 2\frac{1-(-1)^k}{k\pi}$$

e

$$\lim_{\varepsilon\to 1^-} \alpha_k = 8k\pi \lim_{\varepsilon\to 1^-} \frac{1-(-1)^k e^{\frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)}}}{\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2 + 4k^2\pi^2} = 8k\pi \lim_{\delta\to+\infty} \frac{1-(-1)^k e^{\delta}}{\delta^2 + 4k^2\pi^2};$$

usando a regra de Cauchy para o levantamento de indeterminações obtem-se imediatamente

$$\lim_{\delta \to +\infty} \frac{e^{\delta}}{\delta^2 + 4k^2\pi^2} = \lim_{\delta \to +\infty} \frac{e^{\delta}}{2\delta} = \lim_{\delta \to +\infty} e^{\delta} = +\infty$$

e portanto tem-se $\lim_{\varepsilon \to 1^-} \alpha_k = \pm\infty$ ($+\infty$ quando k é ímpar e $-\infty$ quando k é par).

b) Seja

$$u_k(t, x; \varepsilon) = \alpha_k \sin(k\pi x) e^{-(1-\varepsilon)k^2\pi^2 t},$$

com os coeficientes α_k obtidos na alínea anterior. É evidente que cada uma das funções $u_k(t, x; \varepsilon)$ é contínua em Ω como função das variáveis t e x. Da alínea anterior tem-se que $\alpha_k \sim \mathcal{O}(1/k)$ quando $k \to \infty$ e portanto, para qualquer $t \geq t_0$, com $t_0 > 0$ fixo, tem-se

$$|u_k(t, x, \varepsilon)| \leq (\text{const}) \frac{1}{k} e^{-(1-\varepsilon)k^2\pi^2 t_0} =: M_k. \tag{115}$$

Como $\sum_k M_k$ é uma série convergente, o teste de Weierstrass permite concluir que a série $\sum_k u_k(t, x; \varepsilon)$ é absolutamente e uniformemente convergente e portanto a sua soma é uma função contínua em $\Omega_{t_0} := [t_0, +\infty[\times]0, 1[$. Como $t_0 > 0$ é fixo e arbitrário, conclui-se que a soma da série é uma função contínua também em $\Omega = \cup_{t_0 > 0} \Omega_{t_0}$. Atendedo a (114), a solução formal é o produto desta série pela função $e^{-\frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)}x} e^{-\frac{\varepsilon^2}{4(1-\varepsilon)}t}$, a qual é contínua em Ω, pelo que se conclui o pretendido.

c) Comecemos por estudar o limite $\varepsilon \to 0^+$. Neste caso é imediato que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} u(t, x; \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \sin(k\pi x) e^{-(1-\varepsilon)k^2\pi^2 t}.$$

O argumento utilizado na alínea anterior para a continuidade da soma da série em relação às variáveis t e x pode ser de novo aplicado para o estudo da sua dependência em ε. Se $\varepsilon < 1$ o argumento então usado é válido sem alteração e (115) permite concluir que a série é absoluta e uniformemente convergente e que a sua soma é contínua em todos os pontos $(t, x; \varepsilon) \in \mathbb{R}^+ \times]0, 1[\times [0, 1[$. Consequentemente

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0^+} u(t, x; \varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \sin(k\pi x) e^{-(1-\varepsilon)k^2\pi^2 t} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \sin(k\pi x) \lim_{\varepsilon \to 0^+} \alpha_k \cdot \lim_{\varepsilon \to 0^+} e^{-(1-\varepsilon)k^2\pi^2 t} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} 2 \frac{1 - (-1)^k}{k\pi} \sin(k\pi x) e^{-k^2\pi^2 t}.
\end{aligned}$$

Designemos por $v(t,x)$ a função limite assim determinada. Comecemos por ver que $v(t,x)$ é contínua em Ω. Usando exactamente o mesmo argumento da alínea anterior pode-se, para $t \geq t_0 > 0$, majorar os termos da série que define $v(t,x)$ por

$$N_k := (\text{const})\frac{1}{k}e^{-k^2\pi^2 t_0}$$

e como $\sum_k N_k$ é uma série convergente, o teste de Weierstrass pode ser aplicado para obter a convergência absoluta e uniforme em Ω_{t_0} da série que define $v(t,x)$ e, portanto, a continuidade desta função em Ω_{t_0}, $\forall t_0 > 0$, e consequentemente também em $\Omega = \cup_{t_0>0}\Omega_{t_0}$. Já tendo mostrado a continuidade de $v(t,x)$ em Ω temos agora de verificar que é solução formal de (112) com $\varepsilon = 0$. Começando pelas condições na fronteira:

$$\begin{aligned}
v(t,0) &= \sum_{k=1}^{+\infty} 2\frac{1-(-1)^k}{k\pi}\sin(k\pi 0)e^{-k^2\pi^2 t} &= 0,\ \forall t\\
v(t,1) &= \sum_{k=1}^{+\infty} 2\frac{1-(-1)^k}{k\pi}\sin(k\pi 1)e^{-k^2\pi^2 t} &= 0,\ \forall t.
\end{aligned}$$

Quanto à condição inicial tem-se

$$v(0,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2\frac{1-(-1)^k}{k\pi}\sin(k\pi x)$$

pelo que $\alpha_k = 2(1-(-1)^k)/(k\pi)$ serão os coeficientes de Fourier da expansão em série de Fourier de senos da função ímpar e $2-$periódica cuja restrição a $]0,1[$ é igual a $v(0,x)$. Observando os cálculos feitos na alínea 2.a) conclui-se imediatamente que se tem $v(0,x) = 1,\ \forall x \in]0,1[$. Por fim, formalmente, isto é, supondo que se pode derivar termo-a-termo a série que define $v(t,x)$, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t} &= \sum_{k=1}^{+\infty} 2k\pi\left((-1)^k - 1\right)\sin(k\pi x)e^{-k^2\pi^2 t}\\
\frac{\partial v}{\partial x} &= \sum_{k=1}^{+\infty} 2\left(1-(-1)^k\right)\cos(k\pi x)e^{-k^2\pi^2 t}\\
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \sum_{k=1}^{+\infty} 2k\pi\left((-1)^k - 1\right)\sin(k\pi x)e^{-k^2\pi^2 t}
\end{aligned}$$

pelo que se verifica imediatamente que

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

e portanto, formalmente, $v(t,x)$ é a solução $u(t,x;0)$ do problema de valores iniciais e de fronteira para a equação limite quando $\varepsilon = 0$.

Quanto ao limite $\varepsilon \to 1^-$ nada podemos concluir de modo simples já que, no argumento da alínea anterior, a utilização da majoração (115) falha quando $\varepsilon = 1$ uma vez que se tem $M_k \sim \mathcal{O}(1/k)$ quando $k \to +\infty$ e portanto $\sum_k M_k$ não é uma série convergente. Consequentemente, não podemos garantir a continuidade da função $u(t,x;\varepsilon)$ em $\varepsilon = 1$. Para agravar o problema, observe-se que $\lim_{\varepsilon\to 1^-} e^{-\frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)}x} e^{-\frac{\varepsilon^2}{4(1-\varepsilon)}t} = 0$ mas $\lim_{\varepsilon\to 1^-} \alpha_k = \infty$, o que significa que, mesmo que a continuidade da soma da série em $\varepsilon = 1$ pudesse ser garantida de algum outro modo, estaríamos perante uma indeterminação $0 \cdot \infty$ cuja elucidação se adivinha difícil.

3. Com $\varepsilon = 1$ a equação (112) fica $u_t - u_x = 0$. Considerando a mudança de variáveis apresentada e designando por w a função u nas novas variáveis, isto é, $u(t,x;1) = w(\xi(t,x), \eta(t,x))$, tem-se

$$\begin{aligned} u_t &= w_\xi \xi_t + w_\eta \eta_t = w_\xi - w_\eta \\ u_x &= w_\xi \xi_x + w_\eta \eta_x = w_\xi + w_\eta \end{aligned}$$

e portanto a equação dada transforma-se em

$$0 = u_t - u_x = w_\xi - w_\eta - w_\xi - w_\eta = -2w_\eta.$$

Primitivando ambos os membros de $w_\eta = 0$ em ordem a η vem $w(\xi,\eta) = \varphi(\xi)$, para alguma função φ de classe $\mathcal{C}^1$. Pela relação entre u e w e usando a mudança de variáveis dada conclui-se imediatamente que

$$u(t,x;1) = \varphi(x+t).$$

Se fôr dada uma condição inicial $u(0,x;1) = f(x)$ então é evidente que $f(x) = u(0,x;1) = \varphi(x+0)$ pelo que se conclui que $\varphi = f$ e a solução é

$$u(t,x;1) = f(x+t).$$

Exame de 11.9.98 e resolução.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

(Engenharia Aeroespacial, Engenharia do Ambiente, Química, 1ºAno)

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

Data: 11/9/1998 **Duração:** 3h00.

I.

Considere o sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \tag{116}$$

1. Seja $\mathbf{b}(t) = \mathbf{0}$.

a) Determine todos os pontos de equilíbrio de (116) e estude-os quanto à estabilidade.

b) Identifique o maior subespaço invariante L de $\mathbb{R}^4$ tal que a restrição do sistema a L tenha um único ponto de equilíbrio.

c) Esboce o retrato de fases da restrição do sistema ao subespaço L referido na alínea anterior[8].

2. Seja $\mathbf{b}(t) = e^t\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

a) Determine uma solução particular do sistema não-homogéneo.

b) Calcule a solução do sistema não-homogéneo que satisfaz $\mathbf{x}(0) = -\frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4$.

II.

Considere a função real $x(t;\omega)$ definida em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, a qual, para cada valor fixo do parâmetro ω, é a solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + x = \cos\omega t \\ \\ x(0;\omega) = x'(0;\omega) = 0 \end{cases} \tag{117}$$

a) Calcule $x(t;\omega)$ quando $\omega \neq 1$.

b) Usando o resultado da alínea anterior e a continuidade da função $x(t;\omega)$, calcule $x(t;1)$.

[8] Se não resolveu a alínea anterior, considere $L = \mathcal{L}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4\}$.

III.

Considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \Big(\sin(x+y) + 2x\cos(x+y)\Big) + 2x\cos(x+y)\frac{dy}{dx} = 0 \\ \\ y(1) = \frac{\pi}{4} - 1 \end{cases} \tag{118}$$

a) Justifique que (118) tem solução local única.

b) Mostre que a equação diferencial em (118) tem um factor integrante do tipo $\mu = \mu(x+y)$ e que a solução do problema de Cauchy (118) pode ser dada implicitamente por $2x\sin^2(x+y) = 1$.

c) Determine uma expressão *explícita* para a solução de (118) e diga qual é o seu intervalo máximo.

IV.

Em certas situações é importante, conhecendo o estado actual de um sistema, saber quais foram os seus estados no passado. Matematicamente isto corresponde a, dada uma condição inicial em $t = 0$, investigar o comportamento do sistema para $t < 0$.

Ao invés do que se passa com EDOs lineares autónomas, o comportamento das soluções de EDPs lineares autónomas pode ser muito diferente para $t > 0$ e para $t < 0$; em particular, com a mesma condição inicial, pode existir solução para todos os $t > 0$ e não existir para nenhum $t < 0$.

O presente exercício ilustra esta situação no caso muito simples da equação do calor com condições de Dirichlet homogéneas

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}\ , & (t,x) \in \mathbb{R}\times]0,1[\\ u(t,0) = u(t,1) = 0, & t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{119}$$

1. Comecemos por considerar o caso $t > 0$.

   a) Determine a solução formal geral de (119).

   b) Determine a solução formal de (119) que satisfaz a condição inicial

   $$u(0,x) = f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x, & \text{se } x \in [0,1/2] \\ 1-x, & \text{se } x \in]1/2,1] \end{cases} \tag{120}$$

   (*Observação: Poderá ser útil ter presente que* $\int x\sin(ax)dx = \frac{1}{a^2}\sin(ax) - \frac{1}{a}x\cos(ax)$.)

   c) Mostre, justificando detalhadamente, que a solução formal da alínea anterior é uma solução clássica de (119)-(120), isto é, que $u(t,x) \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^1_t(\Omega) \cap \mathcal{C}^2_x(\Omega)$, com $\Omega = \mathbb{R}^+\times]0,1[$ e com $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega = \mathbb{R}^+_0 \times [0,1]$.

2. Seja agora $t < 0$. Justifique que a expressão formal *não* define uma solução clássica de (119)-(120) para nenhum $t < 0$.
   (*Sugestão: Estude o que se passa em* $x = 1/2$.)

Resolução:

I.

1.a) Os pontos de equilíbrio do sistema são os pontos $\mathbf{x}_{\text{eq}} \in \mathbb{R}^4$ tais que $\mathbf{x}_{\text{eq}} \in \mathcal{N}(A)$, onde A é matriz do sistema. Consequentemente tem-se

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \\ 0 \\ -x_4 \end{bmatrix},$$

pelo que vem $x_4 = 0$, $x_2 = x_1$, $x_3 = -x_1$ e os pontos de equilíbrio são $\mathbf{x}_{\text{eq}} = (\alpha, \alpha, -\alpha, 0)^{\mathrm{T}}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrário.

A estabilidade dos pontos de equilíbrio é determinada pelo sinal da parte real dos valores próprios da matriz A, os quais são zeros do polinómio característico:

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A - \lambda I) \\ &= \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda(\lambda+1)(\lambda^2+1). \end{aligned}$$

Os valores próprios são, então, $\lambda = 0, \lambda = -1$ e $\lambda = \pm i$. Como os valores próprios com parte real nula têm multiplicidades algébricas iguais a 1 e como $1 \leq m_g \leq m_a$, conclui-se que para todos eles $m_g = m_a$ e portanto os pontos de equilíbrio são todos estáveis (mas não assimptoticamente estáveis).

b) Para que a restrição de (116) a L tenha um único ponto de equilíbrio é necessário e suficiente que L não contenha elementos do espaço próprio correspondente ao valor próprio nulo. Os subespaços de $\mathbb{R}^4$ invariantes para o sistema são, além de $\mathcal{N}(A)$, o espaço próprio correspondente ao valor próprio $\lambda = -1$ e o espaço gerado por $\mathbf{v}_{\text{R}}$ e $\mathbf{v}_{\text{I}}$, onde $\mathbf{w} = \mathbf{w}_{\text{R}} + i\mathbf{w}_{\text{I}}$ é um vector próprio associado ao valor próprio $\lambda = i$.

O espaço próprio correspondente a $\lambda = -1$ é constituido pelos vectores $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)^{\mathrm{T}} \neq \mathbf{0}$ tais que

$$\begin{aligned} 0 &= (A+I)\mathbf{v} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= (2v_1 - v_2, 2v_1 + v_3, v_3, 0)^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

ou seja $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ e portanto $E = \{(0,0,0,\beta)^{\mathrm{T}} : \beta \in \mathbb{R}$ é arbitrário$\}$ é um subespaço invariante. O espaço próprio complexo correspondente a $\lambda = i$ é constituido pelos vectores $\mathbf{w}$ que satisfazem

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= (A - iI)\mathbf{w} \\ &= \begin{bmatrix} 1-i & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1-i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-i \end{bmatrix} \\ &= ((1-i)w_1 - w_2, 2w_1 - (1+i)w_2, -iw_3, -(1+i)w_4)^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

e portanto $w_2 = (1-i)w_1, w_3 = w_4 = 0$, donde se conclui que um vector próprio é $\mathbf{w} = (1,1,0,0)^{\mathrm{T}} + i(0,-1,0,0)^{\mathrm{T}}$ e o subespaço de $\mathbb{R}^4$ invariante é $F = \mathcal{L}\left\{(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}, (0,1,0,0)^{\mathrm{T}}\right\}$.

Consequentemente, como $\mathbb{R}^4 = \mathcal{N}(A) + E + F$, conclui-se que $L = E + F$ é o subespaço pretendido.

c) O retrato de fases da restrição do sistema a F é constituido por órbitas periódicas representadas geometricamente por elipses cuja orientação é determinada pelos vectores $\mathbf{w}_{\mathrm{R}} = (1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$ e $\mathbf{w}_{\mathrm{I}} = (0,1,0,0)^{\mathrm{T}}$ (cf. Figura 91).

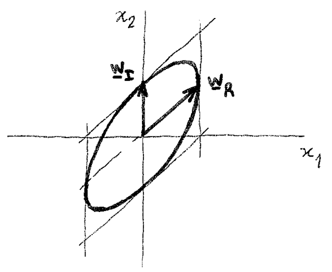


Figura 91: Paralelogramo e elipse determinados pelos vetores $\mathbf{w}_{\mathrm{R}}$ e $\mathbf{w}_{\mathrm{I}}$.

O sentido de percurso das órbitas é determinado directamente pela equação, por exemplo estudando o que se passa no eixo dos x_1 :

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e portanto x_1 e x_2 são crescentes se $x_1 > 0$, pelo que o sentido é o apresentado na Figura 92.

O subespaço invariante E é unidimensional e o valor próprio correspondente é $\lambda = -1$, pelo que o retrato de fases é o apresentado na Figura 93.

Um esboço do retrato de fases da restrição de (116) será, então, o dado na Figura 94.

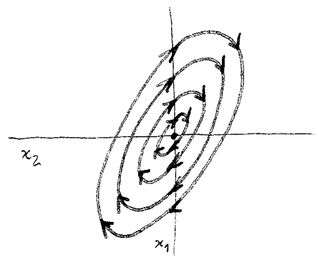


Figura 92: Retrato de fases do sistema restringido a F.

Figura 93: Retrato de fases do sistema restringido a E.

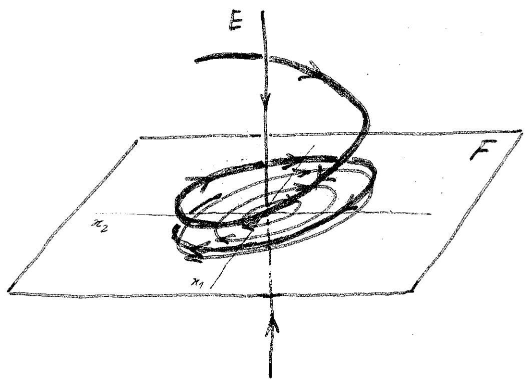


Figura 94: Retrato de fases do sistema restringido a L.

2.a) Considerando agora o sistema não-homogéneo

$$\left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}\right]' = \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} 0 \\ e^t \\ 1 \\ 0 \end{array}\right]. \tag{121}$$

Pretendemos nesta alínea apenas *uma* solução particular de (121) pode-se começar por observar que a equação para x_4 é homogénea e desacoplada das restantes equações e é igual a $x_4' = -x_4$ tendo, portanto, $x_4(t) = 0, \forall t$, como uma possível solução. A equação para x_3 é $x_3' = 1$, para a qual uma solução possível é $x_3(t) = t$ e substituindo isto na equação para x_2 esta toma a forma $x_2' = 2x_1 - x_2 + t + \sin 2t$. Assim sendo, o sistema (121) reduz-se ao sistema bidimensional

$$\left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right]' = \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} 0 \\ t + e^t \end{array}\right]. \tag{122}$$

Os valores próprios da matriz deste sistema são $\lambda_\pm = \pm i$. O termo não homogéneo é

$$\mathbf{h}(t) = \left[\begin{array}{c} 0 \\ t + e^t \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ t \end{array}\right] e^{0t} + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right] e^t$$

e como quer $\mu = 0$ quer $\mu = 1$ são diferentes dos valores próprios da matriz do sistema, o método dos palpites permite-nos afirmar que o sistema (122) tem soluções particulares do tipo

$$\mathbf{x}_{\text{part}}(t) = \left[\begin{array}{c} a_1 t + a_2 + a_3 e^t \\ b_1 t + b_2 + b_3 e^t \end{array}\right]$$

Substituindo esta expressão de $\mathbf{x}_{\text{part}}(t)$ no sistema (122) tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{x}'_{\text{part}}(t) - \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{array}\right] \mathbf{x}_{\text{part}}(t) - \left[\begin{array}{c} 0 \\ t + e^t \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c} (a_1 - a_2 + b_2) + (b_1 - a_1)t + (a_3 - a_3 + b_3)e^t \\ (b_1 - 2a_2 + b_2) + (b_1 - 2a_1 - 1)t + (b_3 - 2a_3 + b_3 - 1)e^t \end{array}\right] \end{aligned}$$

e portanto tem-se

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 - a_2 + b_2 = 0 \\ b_1 - a_1 = 0 \\ a_3 - a_3 + b_3 = 0 \\ b_1 - 2a_2 + b_2 = 0 \\ b_1 - 2a_1 - 1 = 0 \\ b_3 - 2a_3 + b_3 - 1 = 0 \end{array}\right.$$

cuja solução é $a_1 = b_1 = -1, a_3 = -1/2, a_2 = b_3 = 0, b_2 = 1$. A solução particular $\mathbf{x}_{\text{part}}(t)$ é

$$\mathbf{x}_{\text{part}}(t) = -\left[\begin{array}{c} t \\ t - 1 \end{array}\right] - \frac{1}{2} e^t \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right]$$

e a solucão de (122) pretendida é

$$\mathbf{x}_{\text{part}}(t) = -\begin{bmatrix} t \\ t-1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e portanto uma solução particular de (116) é

$$\mathbf{x}_{\text{part}}(t) = \begin{bmatrix} -t - \frac{1}{2}e^t \\ 1-t \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) A solução pretendida pode ser escrita como

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{x}_{\text{part}}(t)$$

onde $\mathbf{x}_{\text{part}}(t)$ é a solução particular calculada na alínea anterior e $\Phi(t)$ é uma matriz fundamental da equação homogénea. A constante $\boldsymbol{\alpha}$ deve ser ajustada de modo a que a condição inicial dada seja satisfeita, isto é,

$$\begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \Phi(0)\boldsymbol{\alpha} + \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja $\mathbf{e}_4 = \Phi(0)\boldsymbol{\alpha}$. Utilizando os resultados sobre os valores e vectores próprios determinados anteriormente tem-se

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t & 1 & 0 \\ \cos t + \sin t & \sin t - \cos t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

e portanto

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_3 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \\ -\alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}$$

cuja solução é $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ e $\alpha_4 = 1$, ou seja, a solução pretendida é

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} -t - \frac{1}{2}e^t \\ 1-t \\ t \\ e^{-t} \end{bmatrix}.$$

II.

a) A solução geral real da equação homogénea $x'' + x = 0$ é $x(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t$. Como os zeros do polinómio característico da equação são $\lambda = \pm i$ e $\omega \neq 1$ por hipótese, conclui-se que uma solução particular da equação é do tipo

$$x_{\text{part}}(t) = \gamma \cos \omega t + \delta \sin \omega t,$$

com γ e δ constantes reais que são determinadas atendendo a que

$$\begin{aligned} 0 &= x_{\text{part}}''(t) + x_{\text{part}}(t) - \cos \omega t \\ &= -\gamma\omega^2 \cos \omega t - \delta\omega^2 \sin \omega t + \gamma \cos \omega t + \delta \sin \omega t - \cos \omega t \\ &= (\gamma - 1 - \gamma\omega^2) \cos \omega t + (\delta - \delta\omega^2) \sin \omega t, \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{cases} 0 = \alpha + \frac{1}{1-\omega^2} \\ 0 = \beta \end{cases}$$

e portanto conclui-se que

$$x(t;\omega) = -\frac{1}{1-\omega^2} \cos t + \frac{1}{1-\omega^2} \cos \omega t = -\frac{\cos \omega t - \cos t}{\omega^2 - 1}.$$

b) Como o membro direito da equação diferencial em (117) depende continuamente de ω, tem-se, pelo resultado de dependencia contínua das soluções relativamente aos parâmetros da equação,

$$\begin{aligned} x(t;1) &= \lim_{\omega \to 1} x(t;\omega) \\ &= -\lim_{\omega \to 1} \frac{\cos \omega t - \cos t}{\omega^2 - 1} \\ &= -\lim_{\omega \to 1} \frac{1}{\omega + 1} \frac{\cos \omega t - \cos t}{\omega - 1} \\ &= -t \lim_{\omega \to 1} \frac{1}{\omega + 1} \frac{\cos \omega t - \cos t}{\omega t - t} \\ &= \frac{1}{2} t \sin t, \end{aligned}$$

onde a última igualdade vem da definição de derivada (ou, de forma equivalente, da regra de Cauchy aplicada à indeterminação $\frac{0}{0}$ obtida da razão $\frac{\cos \omega t - \cos t}{\omega t - t}$, encarada como função de ω, quando $\omega \to 1$.)

III.

a) Escrevendo a equação em (118) na forma

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin(x+y) + 2x \cos(x+y)}{2x \cos(x+y)}$$

e designando por $f(x,y)$ o membro direito desta equação, conclui-se imediatamente que f é de classe $\mathcal{C}^\infty$ no seu domínio, visto que é construido por operações algébricas elementares e composições de funções trignométricas e polinomiais. Como o ponto inicial $(1, \frac{\pi}{4} - 1)$ está no interior do domínio de f (o qual é o aberto $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, x + y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\big\}$) conclui-se que existe um rectângulo R centrado em $(1, \frac{\pi}{4} - 1)$ e contido no domínio de f no qual podemos reproduzir o argumento da demonstração do Teorema de Picard-Lindelöf, mostrando, assim, a existência e unicidade de solução local do problema de Cauchy em causa.

b) Multiplicando a equação diferencial dada por $\mu = \mu(x+y)$, designe-se

$$\begin{aligned} M(x,y) &\stackrel{\text{def}}{=} \mu(x+y)\Big(\sin(x+y) + 2x\cos(x+y)\Big) \\ N(x,y) &\stackrel{\text{def}}{=} \mu(x+y)2x\cos(x+y) \end{aligned}$$

Para que a equação seja exacta é suficiente que exista um aberto simplesmente conexo onde a igualdade

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

seja identicamente verificada. Como se tem

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= \mu' \cdot \Big(\sin(x+y) + 2x\cos(x+y)\Big) + \mu \cdot \Big(\cos(x+y) - 2x\sin(x+y)\Big) \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= \mu' 2x\cos(x+y) + \mu 2\cos(x+y) - \mu 2x\sin(x+y), \end{aligned}$$

conclui-se que há que escolher μ de modo a que

$$\begin{aligned} &\mu' \cdot \Big(\sin(x+y) + 2x\cos(x+y) - 2x\cos(x+y)\Big) = \\ &= \mu \cdot \Big(-\cos(x+y) + 2x\sin(x+y) + 2\cos(x+y) - 2x\sin(x+y)\Big) \end{aligned}$$

ou seja $\mu' = \mu\cos(x+y)/\sin(x+y)$ e portanto, por integração, obtém-se que uma solução é $\mu = \mu(x+y) = \sin(x+y)$, o que mostra que existe um factor integrante do tipo pretendido. Multiplicando a equação diferencial dada por este factor integrante sabe-se que a equação resultante é exacta, ou seja, existe $\Phi(x,y)$ de classe $\mathcal{C}^2$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \mu M = \sin^2(x+y) + 2x\sin(x+y)\cos(x+y) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \mu N = 2x\sin(x+y)\cos(x+y) \end{aligned}$$

Usando a segunda destas igualdades tem-se

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \mu N = 2x\sin(x+y)\cos(x+y) = x\sin(2(x+y))$$

e portanto

$$\begin{aligned}\Phi(x,y) &= x\int \sin(2(x+y))dy + h(x)\\ &= x\int \sin(2(x+y))d(x+y) + h(x)\\ &= \frac{1}{2}x\int \sin(2(x+y))d(2(x+y)) + h(x)\\ &= -\frac{1}{2}x\cos(2(x+y)) + h(x).\end{aligned}$$

Consequentemente, derivando esta expressão em ordem a x, tem-se

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\frac{1}{2}\cos(2(x+y)) + x\sin(2(x+y)) + h'(x),$$

e portanto

$$-\frac{1}{2}\cos(2(x+y)) + x\sin(2(x+y)) + h'(x) = \sin^2(x+y) + x\sin(2(x+y)),$$

ou seja $h'(x) = \sin^2(x+y) + \frac{1}{2}\cos(2(x+y)) = \frac{1}{2}$ pelo que se conclui que $h(x) = \frac{1}{2}x$ e

$$\Phi(x,y) = -\frac{1}{2}x\cos(2(x+y)) + \frac{1}{2}x = x\sin^2(x+y).$$

A equação pode, então, ser integrada para dar $x\sin^2(x+y) = C$ onde C é uma constante cujo valor depende da condição inicial. Como $y(1) = \frac{\pi}{4} - 1$ conclui-se que $C = 1\sin^2(1+\frac{\pi}{4}-1) = \frac{1}{2}$ e a expressão implícita para a solução de (118) é $2x\sin^2(x+y) = 1$.

c) Atendendo à expressão $2x\sin^2(x+y) = 1$ obtida na alínea anterior tem-se $\sin^2(x+y) = \frac{1}{2x}$ e portanto $\sin(x+y) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$, ou seja $x + y = \arcsin\frac{1}{\sqrt{2x}}$, sendo a expressão explícita da solução a seguinte

$$y(x) = -x + \arcsin\frac{1}{\sqrt{2x}}.$$

O intervalo máximo desta solução é fácil de obter atendendo a que se tem de ter $0 < \frac{1}{\sqrt{2x}} \leq 1$, ou seja $\sqrt{2x} \geq 1$ e portanto $x \geq 1/2$. Como

$$y'(x) = -1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2x}\sqrt{1-\frac{1}{2x}}} \longrightarrow -\infty \qquad \text{quando} \qquad x \to \frac{1}{2}^{+},$$

conclui-se que y é de classe $\mathcal{C}^1$ em $]\frac{1}{2}, +\infty[$ e é este o intervalo máximo.

IV.

1.a) Considerando $u(t,x) = T(t)X(x)$, a equação do calor vem escrita como $T'X = TX''$. Assumindo que $T(t)X(x) \neq 0$, a equação pode ser escrita como $T'/T = X''/X$, e portanto existe pelo menos uma constante real σ tal que, para quaisquer $(t,x) \in \Omega$, são válidas as igualdades

$$\frac{1}{\mathcal{D}}\frac{T'}{T}(t) = \sigma = \frac{X''}{X}(x).$$

As condições na fronteira podem ser escritas utilizando a hipótese $u(t,x) = T(t)X(x)$:

$$0 = u(t,0) = T(t)X(0) \Longleftrightarrow X(0) = 0 \quad \text{porque, por hipótese,} \quad T(t) \neq 0$$
$$0 = u(t,1) = T(t)X(1) \Longleftrightarrow X(1) = 0 \quad \text{pela mesma razão.}$$

Temos, assim, o seguinte problema de valores na fronteira para $X(x)$:

$$\begin{cases} X'' - \sigma X = 0 \\ X(0) = 0 = X(1). \end{cases}$$

Estudemos a possibilidade de obtenção de soluções não identicamente nulas para este problema:

- Considere-se $\sigma = 0$. A equação fica $X'' = 0$, cujas soluções são $X(x) = ax + b$. Atendendo às condições na fronteira tem-se $0 = X(0) = b$ e $0 = X(1) = a + b$, pelo que não existem soluções não-triviais.
- Se $\sigma > 0$ a solução geral da equação é $X(x) = ae^{\sqrt{\sigma}x} + be^{-\sqrt{\sigma}x}$. Atendendo às condições na fronteira tem-se o seguinte sistema para a e b :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\sigma}} & e^{-\sqrt{\sigma}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  e como o determinante desta matriz é $e^{-\sqrt{\sigma}} - e^{\sqrt{\sigma}} < 0$ $(\neq 0)$ conclui-se que a única solução do sistema é $a = b = 0$ do que resulta a solução trivial $X(x) \equiv 0$.
- Finalmente tome-se $\sigma < 0$. A solução geral real da equação diferencial é agora $X(x) = a\cos(\sqrt{|\sigma|}x) + b\sin(\sqrt{|\sigma|}x)$. Atendendo às condições na fronteira, $0 = X(0) = a$ e $0 = X(1) = a\cos(\sqrt{|\sigma|}) + b\sin(\sqrt{|\sigma|}) \Rightarrow \sqrt{|\sigma|} = k\pi, \forall k \in \mathbb{N}_1$. As soluções correspondentes são, então,

$$X_k(x) = \sin(k\pi x), \; \forall k \in \mathbb{N}_1,$$

  e todas as combinações lineares finitas destas funções.

Dos resultados acima resulta que $\sigma = \sigma_k = -k^2\pi^2$, $k \in \mathbb{N}_1$. Atendendo a isto a equação para $T(t)$ é

$$T' = -k^2\pi^2 T, \quad k \in \mathbb{N}_1,$$

cuja solução geral é

$$T_k(t) = a_k \exp\big(-k^2\pi^2\big), \quad k \in \mathbb{N}_1,$$

onde a_k são constantes reais arbitrárias. Assim, a solução geral formal do problema é

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin(k\pi x) \exp\big(- k^2\pi^2 t\big)\,.$$

b) Usando a condição inicial e a solução geral formal obtida na alínea anterior tem-se

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin(k\pi x)\,, \qquad 0 \le x \le 1$$

e portanto as constantes $a_k, k \ge 1$, são as constantes de Fourier da série de Fourier de senos da função 2−periódica cuja restrição a $[0,1]$ é igual a $f(x)$. Portanto, usando a observação no enunciado,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{1}\int_0^{1/2} x\sin(k\pi x)dx + \frac{2}{1}\int_{1/2}^{1} (1-x)\sin(k/pix)dx \\ &= \frac{4}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}, \end{aligned}$$

desta expressão obtém-se que os termos de ordem par são sempre nulos, pelo que se pode escrever

$$a_{2\ell} = 0, \qquad\qquad a_{2\ell-1} = 4\frac{(-1)^{\ell+1}}{(2\ell-1)^2\pi^2}$$

$$u(t,x) = 4\sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\ell+1}}{(2\ell-1)^2\pi^2}\sin((2\ell-1)\pi x)\exp\big(- (2\ell-1)^2\pi^2 t\big) \qquad (123)$$

c) Comecemos por estudar (123) quanto à continuidade. Designemos por $u_\ell(t,x)$ o termo geral da série (123). Observe-se que

$$|u_\ell(t,x)| \le \frac{1}{(2\ell-1)^2\pi^2}, \qquad \forall (t,x) \in \overline{\Omega} = \mathbb{R}_0^+ \times [0,1].$$

Consequentemente, sabendo que $\sum_\ell \ell^{-2}$ é convergente e utilizando o teste de Weierstrass, conclui-se que a série do membro direito de (123) é absolutamente e uniformemente convergente e como, para cada $\ell \ge 1$, as funções $u_\ell(t,x)$ são contínuas em $\overline{\Omega}$, pode-se concluir que $u(t,x)$ é uma função contínua em $\overline{\Omega}$. Para investigar se $u(t,x) \in \mathcal{C}_t^1(\Omega) \cap \mathcal{C}_x^2(\Omega)$ observe-se primeiro o que se passa com as séries de termos gerais $\partial u_\ell/\partial t$, $\partial u_\ell/\partial x$ e $\partial^2 u_\ell/\partial x^2$. Como, para qualquer $(t,x) \in \Omega_{t_0} \stackrel{\text{def}}{=} [t_0, +\infty[\times]0,1[$, com $t_0 > 0$, se tem

$$\left|\frac{\partial u_\ell}{\partial t}(t,x)\right| \le \exp\big(- (2\ell-1)^2\pi^2 t_0\big) =: M_\ell,$$

e como a série $\sum_\ell M_\ell$ é convergente, conclui-se, pelo teste de Weierstrass, que a série $\sum_\ell \partial u_\ell/\partial t$ é absolutamente e uniformemente convergente em Ω_{t_0} e, como $u_\ell \in \mathcal{C}^1_t$ e $\sum_\ell u_\ell$ é convergente, podemos concluir que $u \in \mathcal{C}^1_t(\Omega_{t_0})$, para qualquer $t_0 > 0$. Consequentemente u é também de classe $\mathcal{C}^1_t$ em $\cup_{t_0>0}\Omega_{t_0} = \Omega$. Agora quanto à diferenciabilidade de u em ordem a x tem-se, para todos os pontos $(t, x) \in \Omega_{t_0}, t_0 > 0$,

$$\left|\frac{\partial u_\ell}{\partial x}(t,x)\right| \leq \frac{1}{(2\ell-1)\pi} \exp\big(-(2\ell-1)^2\pi^2 t_0\big) =: N_\ell,$$

e portanto o teste de Weierstrass permite concluir que $\sum_\ell \partial u_\ell/\partial x$ é absolutamente e uniformemente convergente, visto que $\sum_\ell N_\ell < +\infty$. O argumento apresentado acima pode ser agora de novo aplicado a este caso para concluir que $u \in \mathcal{C}^1_x(\Omega)$. Analogamente, tem-se, em Ω_{t_0} com $t_0 > 0$,

$$\left|\frac{\partial^2 u_\ell}{\partial x^2}(t,x)\right| \leq \exp\big(-(2\ell-1)^2\pi^2 t_0\big) =: \tilde{N}_\ell,$$

e como $\sum_\ell \tilde{N}_\ell < \infty$ tem-se a convergência uniforme da série $\sum_\ell \partial^2 u_\ell/\partial x^2$ e, como a série $\sum_\ell \partial u_\ell/\partial x$ é convergente em Ω_{t_0} e $u_\ell \in \mathcal{C}^2_x(\Omega)$, conclui-se que $u \in \mathcal{C}^2_x(\Omega_{t_0})$ para qualquer $t_0 > 0$, e portanto conclui-se que $u \in \mathcal{C}^2_x(\Omega)$.

Isto permite concluir que a solução formal apresentada em (123) é, de facto, uma solução clássica de (119)-(120).

2. Considerando $t < 0$, a expressão para a solução formal pode ser escrita na forma

$$u(t,x) \quad = \quad 4\sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\ell+1}}{(2\ell-1)^2\pi^2} \sin((2\ell-1)\pi x) \exp\big((2\ell-1)^2\pi^2|t|\big)\,. \tag{124}$$

   No ponto $x = 1/2$ tem-se

$$u(t,1/2) = 4\sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{(2\ell-1)^2\pi^2} \exp\big((2\ell-1)^2\pi^2|t|\big)$$

   e é evidente que esta série é divergente se $t < 0$ uma vez que o seu termo geral nem sequer tende para zero quando $\ell \to \infty$. Consequentemente a expressão formal *não* define uma função real no ponto $x = 1/2$ para qualquer $t < 0$ e portanto (124) não define uma solução clássica (119)-(120) para estes valores de t.