Seção 10: Redução de ordem de EDOLH's de 2ª ordem se for conhecida uma solução não trivial

Método de D'Alembert. Se for conhecida uma solução não trivial de uma EDOLH de 2ª ordem, empregando o método de D'Alembert podemos determinar uma segunda solução linearmente independente da primeira. Para isto vamos ter que resolver uma EDO de 1ª ordem. Essas duas soluções linearmente independentes vão constituir um sistema fundamental de soluções e vão nos permitir escrever a solução geral da EDOLH dada. Portanto, o método de D'Alembert é um método de redução de ordem: conhecendo uma solução não trivial de uma EDOLH de 2ª ordem, sua resolução se reduz a resolver uma EDO de 1ª ordem.

Vamos explicar o método de D'Alembert através de exemplos.

Exemplo 1. Sabendo que $y_1 = \dfrac{\cos x}{x}$ é uma solução da EDOLH

$$xy'' + 2y' + xy = 0\,, \tag{1}$$

encontrar uma segunda solução linearmente independente da primeira.

Solução:

Procuramos a segunda solução da forma

$$y_2 = vy_1, \tag{2}$$

com v não constante. O fato de v ser não constante vai garantir que $\{y_1, y_2\}$ são LI. Derivando (2), temos

$$y_2' = v'y_1 + vy_1',$$
$$y_2'' = v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''.$$

Substituindo na equação (1), temos

$$xy_1v'' + \big(2xy_1' + 2y_1\big)v' + \big(xy_1'' + 2y_1' + xy_1\big)v = 0\,.$$

Na equação acima, o coeficiente de v é 0, pois y_1 é uma solução da equação original. Então,

$$xy_1v'' + \big(2xy_1' + 2y_1\big)v' = 0\,. \tag{3}$$

OBS: Veremos abaixo que o fato do coeficiente de v se anular não foi nenhum acaso. Isto sempre acontece.

Substituindo

$$y_1 = \frac{\cos x}{x}\ , \qquad y_1' = \frac{-x\,\mathrm{sen}\,x - \cos x}{x^2}$$

em (3) temos

$$(\cos x)v'' + \left(-\frac{2x\,\mathrm{sen}\,x + 2\cos x}{x} + \frac{2\cos x}{x}\right)v' = 0,$$

ou

$$x\big(\cos x\big)v'' - 2\big(\,\mathrm{sen}\,x\big)v' = 0.$$

Esta equação se reduz a primeira ordem pondo $z = v'$,

$$x\big(\cos x\big)\frac{dz}{dx} - 2\big(\operatorname{sen} x\big)z = 0\,.$$

Separando as variáveis,

$$\frac{dz}{z} = \frac{2\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Integrando,

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{2\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx,$$

obtemos

$$\ln z = -2\ln\cos x + C.$$

Escolhemos já $C = 0$, pois estamos interessados apenas em encontrar uma solução linearmente independente e não a mais geral possível. Obtemos

$$z = \sec^2 x.$$

Logo

$$v' = \sec^2 x \qquad \text{e} \qquad v = \int \sec^2 x = \tan x,$$

novamente escolhendo a constante de integração como sendo 0. Logo, uma segunda solução linearmente indepenente da primeira é

$$y_2 = \frac{\cos x}{x}\,\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

e a solução geral de (1) é $y = \dfrac{C_1\cos x + C_2\operatorname{sen} x}{x}$.

Caso Geral. Conhecendo uma solução não trivial y_1 para a EDOLH

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0, \tag{4}$$

procuramos uma segunda solução LI da forma $y_2 = v(x)\,y_1(x)$, com v não constante. Derivando, temos

$$y_2' = v'y_1 + vy_1'$$
$$y_2'' = v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''.$$

Substituindo na EDO (4), segue que

$$\big(v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''\big) + f(x)\big(v'y_1 + vy_1'\big) + g(x)\,vy_1 = 0.$$

A incógnita aqui é v. Ordenemos então em v

$$y_1v'' + \big(2y_1' + f(x)y_1\big)v' + \big(y_1'' + f(x)y_1' + g(x)y_1\big)v = 0.$$

O coeficiente de v é 0 pois y_2 é uma solução da EDO. Portanto

$$y_1v'' + \big(2y_1' + f(x)y_1\big)v' = 0\,.$$

Conclusão. Para determinar v precisaremos resolver uma EDOLH de segunda ordem <u>sem termo em v</u>, portanto redutível a primeira ordem.

Exemplo 2. Sabendo que $y_1 = \dfrac{1}{x^2}$ é uma solução da equação diferencial linear homogênea

$$x(3x+2)y'' + 6(x+1)y' - 6y = 0\,,$$

determine uma segunda solução linearmente independente da primeira.

Solução:

Procuramos y_2 da forma $y_2 = vy_1$, com v não constante.

$y_2' = v'y_1 + vy_1'$

$y_2'' = v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''$

Substituindo na equação diferencial, obtém-se

$$x(3x+2)\big(v''y_1 + 2v'y_1'\big) + 6(x+1)v'y_1 = 0.$$

Note que todos os termos contendo v já nem foram escritos, pois sabemos que eles cancelam.

Neste momento substituimos y_1 pelo seu valor dado $y_1 = \dfrac{1}{x^2}$ (o melhor é fazer isto o mais tarde possível, para evitar complicações nos cálculos). Obtemos

$$x(3x+2)\big(v''x^{-2} - 4x^{-3}v'\big) + 6(x+1)x^{-2}v' = 0.$$

Multiplicando por x^2, temos

$$(3x+2)\big(xv'' - 4v'\big) + 6(x+1)v' = 0,$$

ou seja,

$$x(3x+2)v'' - (6x+2)v' = 0.$$

Esta última equação se reduz à primeira ordem fazendo fazendo $z = v'$,

$$x(3x+2)\frac{dz}{dx} - (6x+2)z = 0.$$

Separando as variáveis, chegamos em

$$\frac{dz}{z} = \frac{6x+2}{3x^2+2x}dx$$

e

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{6x+2}{3x^2+2x}dx$$

Integrando,

$$\ln z = \ln\big(3x^2+2x\big) + C.$$

Escolhendo $C = 0$, obtemos

$$z = 3x^2 + 2x.$$

Lembrando que $z = \dfrac{dv}{dx}$, temos

$$\frac{dv}{dx} = 3x^2 + 2x.$$

Integrando mais uma vez, temos

$$v = x^3 + x^2.$$

Portanto, uma segunda solução linearmente independente de y_1 é

$$y_2 = x + 1.$$

Exemplo 3. Sabendo que $y_1 = x$ é uma solução da EDOLH $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, encontre a solução geral desta EDO (esta equação diferencial é um caso particular da equação de Legendre $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$, aqui $n = 1$, que vai ser muito importante na 3ª área).

Procuramos y_2 da forma $y_2 = vy_1$, com v não constante. Derivando, encontramos

$$\begin{aligned} y_2' &= v'y_1 + vy_1', \\ y_2'' &= v''y_1 + 2v'y_1' + v'y_1''. \end{aligned}$$

Substituindo na EDO, obtemos

$$\big(1-x^2\big)\big(v''y_1 + 2v'y_1'\big) - 2xv'y_1 = 0\,.$$

Note que todos os termos contendo v já nem foram escritos, pois sabemos que eles cancelam.

Neste momento substituimos y_1 pelo seu valor dado $y_1 = x$, obtendo

$$\big(1-x^2\big)\big(xv'' + 2v'\big) - 2x^2v' = 0,$$

ou seja,

$$\big(1-x^2\big)xv'' + \big(2 - 2x^2 - 2x^2\big)v' = 0.$$

Fazendo $z = v'$, reduzimos à EDO de 1ª ordem

$$\big(1-x^2\big)x\,\frac{dz}{dx} + \big(2-4x^2\big)z = 0,$$

que pode ser resolvida por separação de variáveis

$$\frac{dz}{z} = \frac{2-4x^2}{x\big(x^2-1\big)}\,dx\,.$$

Integrando, temos,

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{2-4x^2}{x\big(x-1\big)\big(x+1\big)}\,dx\,.$$

Precisamos decompor em frações parciais

$$\frac{2-4x^2}{x\big(x-1\big)\big(x+1\big)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

$$2 - 4x^2 = A\big(x-1\big)\big(x+1\big) + Bx\big(x+1\big) + Cx\big(x-1\big)$$

Fazendo $x = 0$, $2 = -A$. Fazendo $x = 1$, $-2 = 2B$, portanto $B = -1$. Fazendo $x = -1$, $-2 = 2C$, logo $C = -1$. Segue que

$$\int \left(\frac{-2}{x} + \frac{-1}{x-1} + \frac{-1}{x+1}\right)dx = -2\ln|x| - \ln|x-1| - \ln|x+1|\,.$$

Portanto

$$\ln z = \ln\left|\frac{1}{x^2\big(x-1\big)\big(x+1\big)}\right|\,.$$

Observe que escolhemos a constante de integração como sendo 0. Podemos fazer isto, pois estamos procurando uma segunda solução e não a segunda solução mais geral possível. Multiplicando por -1, se necessário, temos

$$z = \frac{1}{x^2\big(x-1\big)\big(x+1\big)}\,,$$

isto é,

$$v' = \frac{1}{x^2\big(x-1\big)\big(x+1\big)}\,.$$

Para integrar, decompomos esta última em frações parciais

$$\frac{1}{x^2\big(x-1\big)\big(x+1\big)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1}\,.$$

Multiplicando por $x^2\big(x-1\big)\big(x+1\big)$, segue que

$$1 = Ax\big(x-1\big)\big(x+1\big) + B\big(x-1\big)\big(x+1\big) + Cx^2\big(x+1\big) + Dx^2\big(x-1\big). \tag{5}$$

Fazendo $x = 0$, obtém-se $B = -1$. Para $x = 1$, obtém-se $2C = 1$, $C = 1/2$. Fazendo $x = -1$, obtém-se $D = -1/2$. Para determinar A, identifiquemos o coeficiente de x^3 dos dois lados da igualdade (5):

$$0 = A + C + D.$$

Segue que $A = 0$. Portanto,

$$v = \int \frac{1}{x^2\big(x^2-1\big)}\,dx = \int \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\right)dx$$

seguindo, finalmente,

$$v = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1|\,.$$

Uma segunda solução linearmente independente de y_1 é

$$y_2 = y_1 v = xv = 1 + x\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{\frac{1}{2}}\,.$$

Logo a solução geral de nossa EDO é

$$y = C_1 x + C_2\left(1 + x\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{\frac{1}{2}}\right).$$