Seção 11: EDOLH com coeficientes constantes

Observação fundamental: Se $L(y) = y'' + py' + qy$, com p, q constantes então

$$L(e^{\lambda t}) = \big(\lambda^2 + p\lambda + q\big)e^{\lambda t}.$$

Portanto a EDO $L(y) = 0$ pode ter solução da forma $y = e^{\lambda t}$. Basta que λ seja raiz da equação algébrica

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0,$$

chamada de *equação característica.*

Exemplo. Resolver a EDOLH de 2ª ordem

$$y'' + 3y' + 2y = 0\,. \tag{1}$$

A equação característica $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ tem raízes 1 e 2. Portanto temos duas soluções linearmente independentes $y_1 = e^t$ e $y_2 = e^{2t}$ para a EDO (1). Com elas podemos construir a solução geral

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{2t}.$$

Possibilidades: Dada uma EDOLH de coeficientes constantes

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (p, q \text{ constantes}), \tag{2}$$

consideremos sua equação característica

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0\,. \tag{3}$$

As seguintes possibilidades podem ocorrer:

Caso 1. *Quando a equação característica tiver duas raízes reais diferentes λ_1 e λ_2, então duas soluções linearmente independentes são $y_1 = e^{\lambda_1 t}$ e $y_2 = e^{\lambda_2 t}$.*

Caso 2. Se a equação característica (3) tem raiz real dupla $\lambda_1 = \lambda_2$.

Se (3) tem raiz dupla, significa que seu discriminante é 0, ou seja $p^2 - 4q = 0$ e

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{p}{2}\,.$$

Portanto, temos uma solução exponencial $y_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{-\frac{p}{2}t}$. Pelo método de D'Alembert, procuramos uma segunda solução, linearmente independente da primeira, da forma

$$y_2(t) = v(t)y_1(t) \tag{4}$$

Substituindo y por (4) na EDO (2), temos

$$(v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'') + p(v'y_1 + vy_1') + qvy_1 = 0.$$

Agrupando os termos, temos

$$y_1v'' + (2y_1' + py_1)v' + (y_1'' + py_1 + qy_1)v = 0.$$

Substituindo $y_1 = e^{\lambda_1 t}$, segue que

$$e^{\lambda_1 t}v'' + \big(2\lambda_1 + p\big)e^{\lambda_1 t}v' = 0.$$

Mas $2\lambda_1 + p = 0$, pois $\lambda_1 = -\frac{p}{2}$. Portanto,

$$v'' = 0.$$

Segue que $v = At + B$. Escolhendo $A = 1$ e $B = 0$, temos v=t e

$$y_2 = te^{\lambda_1 t}.$$

Conclusão: *No caso da equação característica* (3) *ter raiz dupla* $\lambda_1 = \lambda_2$, *duas soluções linearmente independentes da EDOLH de coeficientes constantes* (2) *são* $y_1 = e^{\lambda_1 t}$ *e* $y_2 = te^{\lambda_1 t}$.

Exemplo. Resolver a EDO $y'' + 4y' + 4y = 0$. A equação característica é $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$, que tem raiz dupla $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. Portanto um sistema fundamental e soluções é $y_1 = e^{-2t}$ e $y_2 = te^{-2t}$. Portanto a solução geral é

$$y = C_1 e^{-2t} + C_2 te^{-2t} = \big(C_1 + C_2 t\big)e^{-2t}.$$

Para o caso 3, de equação característica com raízes complexas, vamos precisar fazer uma revisão sobre exponenciais complexas.

Revisão sobre exponenciais complexas

Antes de tratar do terceiro caso da equação característica, fazemos uma revisão sobre exponenciais complexas.

Queremos dar um sentido para a exponencial com expoente complexo. Para $z = x+iy$, queremos definir $e^z = e^{x+iy}$. Esperamos que a exponencial de expoente complexo seja definida de modo a preservar as propriedades operacionais usuais que valem para exponenciais reais, por exemplo,

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}.$$

A exponencial real e^x já é nossa conhecida. Falta dar um sentido para a exponencial e^{iy}, cujo expoente é um número imaginário puro. Vimos no Cálculo que para t real, $e^t = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$. Embora a fórmula não tenha sido deduzida para este caso, vejamos o que acontece se tentarmos aplicá-la para $t = iy$,

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \cdots \tag{5}$$

Note que do fato que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ e $i^4 = 1$, segue que as potências de i são

$$1 = i^4 = i^8 = \cdots\ , \quad i = i^5 = i^9 = \cdots\ , \quad -1 = i^2 = i^6 = i^{10} = \cdots\ , \quad -i = i^3 = i^7 = \cdots$$

Substituindo esses valores em (5), obtemos

$$e^{iy} = \Big(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots\Big) + i\Big(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\Big).$$

Na linha acima reconhecemos as séries do cosseno e do seno. Assim,

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y \qquad \big(\text{Fórmula de Euler}\big). \tag{6}$$

Inspirados no raciocínio intuitivo acima, a seguir damos a definição formal de exponencial complexa.

Definição. Para $z = x + iy$ número complexo definimos a exponencial de expoente z como

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x\big(\cos y + i \operatorname{sen} y\big) = e^x \cos y + i\, e^x \operatorname{sen} y\,.$$

Exemplos. $e^{i\pi} = -1$, $e^{1+i\frac{\pi}{2}} = ie$, $e^{2\pi i} = 1$, $e^{z+2\pi i} = e^z$ (a função exponencial é periódica com período $2\pi i$.

Observação. Somando e subtraindo as igualdades $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$ e $e^{-iy} = \cos y - i \operatorname{sen} y$, obtemos

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \qquad , \qquad \operatorname{sen} y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}\,,$$

que são muito semelhantes às expressões

$$\cosh y = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} \qquad , \qquad \operatorname{senh} y = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\,.$$

Caso 3. Se a equação característica tiver raízes complexas, estas devem ser números complexos conjugados $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Como são raízes distintas, procedendo como no caso 1, definimos duas soluções linearmente independentes

$$z_1 = e^{\lambda_1 t} = e^{\alpha t + i\beta t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t} = e^{\alpha t}\cos\beta t + i\, e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t,$$

$$z_2 = e^{\lambda_2 t} = e^{\alpha t - i\beta t} = e^{\alpha t} e^{-i\beta t} = e^{\alpha t}\cos\beta t - i\, e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t.$$

O problema com estas duas soluções é que são complexas. Usando o Princípio de Superposição, tomando convenientes combinações lineares, podemos obter duas soluções linearmente independentes reais

$$y_1 = \frac{z_1 + z_2}{2} = e^{\alpha t}\cos\beta t \qquad \text{e} \qquad y_2 = \frac{z_1 - z_2}{2i} = e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t\,.$$

Conclusão: *No caso da equação característica ter raízes complexas $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, duas soluções linearmente independentes da EDOLH de coeficientes constantes* (2) *são $y_1 = e^{\alpha t}\cos\beta t$ e $y_2 = e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t$.*

Exemplo. Resolver a EDO $y'' + 4y' + 13y = 0$. A equação característica é $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$, que tem raízes complexas $\lambda_1 = -2 + 3i$ e $\lambda_2 = -2 - 3i$. Portanto, um sistema fundamental de soluções é $y_1 = e^{-2t}\cos 3t$ e $y_2 = e^{-2t}\operatorname{sen} 3t$. Segue que a solução geral é

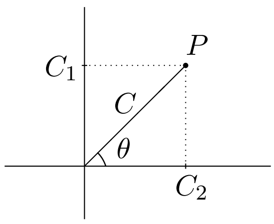
$$y = C_1 e^{-2t}\cos 3t + C_2 e^{-2t}\operatorname{sen} 3t = \big(C_1\cos 3t + C_2\operatorname{sen} 3t\big)e^{-2t}\,.$$

Observação importante

No caso da equação característica ter raízes complexas $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, a solução geral da EDO homogênea (2) é

$$y = \big(C_1\cos\beta t + C_2\operatorname{sen}\beta t\big)e^{\alpha t}\,.$$

É muito importante para as aplicações notar que a expressão $C_1\cos\beta t + C_2\operatorname{sen}\beta t$ pode ser escrita de uma maneira alternativa. Para isto, o mais simples é representar o par $\big(C_2, C_1\big)$ como



um ponto P no plano. Sejam r e θ as coordenadas polares do ponto P. Então,

$$C_2 = C\cos\theta \qquad \text{e} \qquad C_1 = C\operatorname{sen}\theta\,.$$

Portanto

$$\begin{aligned} C_1\cos\beta t + C_2\operatorname{sen}\beta t &= C\big(\operatorname{sen}\theta\cos\beta t + \cos\theta\operatorname{sen}\beta t\big) \\ &= C\operatorname{sen}\big(\beta t + \theta\big). \end{aligned}$$

Conclusão. *A expressão $y = C_1\cos\beta t + C_2\operatorname{sen}\beta t$, onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias, pode ser reescrita em termos de duas outras constantes arbitrárias, C e θ, como*

$$y = C\operatorname{sen}\big(\beta t + \theta\big)\,.$$

A vantagem desta expressão alternativa é que ela mostra que y é uma senóide submetida a um deslocamento horizontal, sendo C um fator de amplitude, fato que não é nada óbvio de se ver a partir da expressão $y = C_1\cos\beta t + C_2\operatorname{sen}\beta t$.

Exemplos de aplicação às oscilações livres.

Consideremos oscilações livres (sem força externa) de um sistema formado por uma uma massa m presa a uma mola com constante de elasticidade k e sujeita a um coeficiente de atrito a. Como vimos, o sistema obedece a EDO linear homegênea

$$y'' + \frac{a}{m}\,y' + \frac{k}{m}\,y = 0\,.$$

Amortecimento subcrítico. Enquanto o atrito for pequeno, mais precisamente, enquanto $\left(\frac{a}{m}\right)^2 - 4\left(\frac{k}{m}\right) < 0$ dizemos que o amortecimento é subcrítico. Neste caso a equação característica

$$\lambda^2 + \frac{a}{m}\,\lambda + \frac{k}{m}\,y = 0$$

tem raízes complexas $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, onde $\alpha = -\dfrac{a}{2m}$ e $\beta = \dfrac{\sqrt{4mk - a^2}}{2m}$. Por exemplo, se $m = 1$ e $k = 5$, a equação diferencial é

$$y'' + ay' + 5y = 0\,, \qquad (a \geq 0)$$

e o amortecimento é subcrítico se $a < \sqrt{20}$. Se, por exemplo, $a = 2$, a equação característica $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ tem raízes

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{(-1)\cdot 16}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-1}\cdot\sqrt{16}}{2} = -1 \pm 2i\,.$$

Assim $y(t) = \big(C_1\cos 2t + C_2\operatorname{sen} 2t\big)e^{-t}$. Esta solução oscila infinitas vezes em torno da posição de equilíbrio $y = 0$, com amplitude decrescendo exponencialmente a 0.

Amortecimento crítico. Se a começa a crecer, quando atingir o valor tal que

$$\left(\frac{a}{m}\right)^2 - 4\left(\frac{k}{m}\right) = 0\,,$$

dizemos que o amortecimento é crítico. Neste caso a equação característica tem uma raiz real dupla negativa.

Por exemplo, se $m = 1$ e $k = 4$, a equação diferencial é

$$y'' + ay' + 4y = 0 \qquad (a \geq 0)\,.$$

Enquanto $a < 4$, o amortecimento é subcrítico. As raízes da equação característica são $-\dfrac{a}{2} \pm i\sqrt{4 - \dfrac{a^2}{4}}$. A solução geral é

$$y = C\, e^{-\frac{at}{2}} \operatorname{sen}\left(t\,\sqrt{4 - \frac{a^2}{4}} + \phi\right)$$

que oscila com um certo período mas cuja amplitude decai exponencialmente para 0. Note que este período cresce quando $a \longrightarrow 4^-$.

Quando a atinge o valor $a = 4$, a equação característica tem uma raiz real dupla $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. A solução geral

$$y = \big(C_1 + C_2 t\big)e^{-2t}$$

não tem mais caráter oscilatório. A massa passa no máximo uma vez pela posição de equilíbrio $y = 0$:

– a massa passa uma única vez pela posição de equilíbrio $y = 0$ no instante $t = -\frac{C_1}{C_2}$, se C_1 e C_2 têm sinais opostos;

– a massa se aproxima da posição de equilíbrio sem nunca chegar, se C_1 e C_2 têm mesmo sinal.