Seção 14 – Equações de ordem mais alta

Exemplo 1. Resolver a EDO $y^{(4)} - y''' - 3y'' + 5y' - 2y = 0$

A equação característica é $\lambda^4 - \lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$. Os candidatos a raiz racional são os m/n com m divisor de -2 e n divisor de 1. As possíveis raízes racionais são, então, $1, -1, 2, -2$. Testando, é fácil ver que 1 é uma raiz. Dividindo o polinômio $\lambda^4 - \lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 2$ por $\lambda - 1$, encontramos a fatoração

$$\lambda^4 - \lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 2 = \big(\lambda - 1\big)\big(\lambda^3 - 3\lambda + 2\big).$$

Repetindo o procedimento encontramos a fatoração

$$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = \big(\lambda - 1\big)\big(\lambda^2 + \lambda - 2\big).$$

É fácil fatorar o polinômio de grau 2, usando a fórmula de Bhaskara. Encontramos

$$\lambda^4 - \lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 2 = \big(\lambda - 1\big)^3\big(\lambda + 2\big)\,.$$

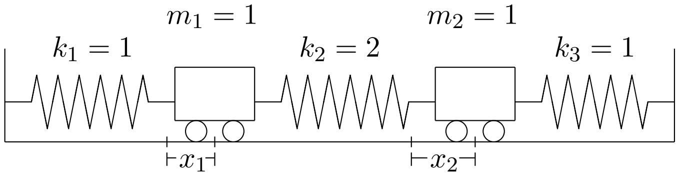
As raízes da equação característica são $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ e $\lambda_4 = -2$. Quatro soluções linearmente independentes da equação diferencial são

$$y_1 = e^t\,, \qquad y_2 = te^t\,, \qquad y_3 = t^2e^t\,, \qquad y_4 = e^{-2t}\,.$$

A solução geral é

$$y_1 = C_1e^t + C_2te^t + C_3t^2e^t + C_4e^{-2t}\,.$$

Exemplo 2. Consideremos oscilações no sistema mostrado na figura, formado por duas massas presas a 3 molas



Sejam x_1 e x_2 os deslocamentos da massas a partir de suas posições de equilíbrio. Para a massa m_1, massa vezes aceleração, que vale $1 \cdot x_1''$, deve ser igualado à soma das forças que agem sobre a massa. Pela Lei de Hooke, a força que a primeira mola exerce sobre a massa m_1 vale $-k_1\,x_1 = -x_1$. A deformação da segunda mola vale $x_2 - x_1$. Portanto a força exercida pela segunda mola sobre a massa m_1 vale $k_2\big(x_2 - x_1\big) = 2\big(x_2 - x_1\big)$. Obtemos assim a equação

$$x_1'' = -x_1 + 2\big(x_2 - x_1\big).$$

Por considerações análogas chegamos à equação

$$x_2'' = -2\big(x_2 - x_1\big) - x_2\,.$$

Obtemos o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x_1'' = -3x_1 + 2x_2 \\ x_2'' = 2x_1 - 3x_2 \end{cases} \tag{1}$$

Existem vários métodos para resolver um sistema como este. Aqui vamos resolver por substituição. Da primeira equação segue

$$x_2 = \frac{1}{2}\, x_1'' + \frac{3}{2}\, x_1\,. \tag{2}$$

Substituindo na segunda equação, obtemos

$$x_1^{(4)} + 6x_1'' + 5x_1 = 0\,. \tag{3}$$

Note que aqui o sistema (1) de equações foi reduzido a uma única equação (3) de ordem mais alta. Em outras situações se faz justamente o contrário, reduzindo uma equação de ordem mais alta a um sistema de equações de ordem mais baixa, geralmente de ordem 1.

A EDO (3) é linear homogênea de ordem 4 com coeficientes constantes. A equação característica é

$$\lambda^4 + 6\lambda^2 + 5 = 0.$$

Fazendo $\mu = \lambda^2$, temos

$$\mu^2 + 6\mu + 5 = 0,$$

cujas raízes são $\mu = -1$ e -5. Obtemos as raízes $\lambda = \pm i,\ \pm i\sqrt{5}$. Portanto,

$$x_1 = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t + C_3 \cos\big(t\sqrt{5}\,\big) + C_4 \operatorname{sen}\big(t\sqrt{5}\,\big). \tag{4}$$

Até aqui temos 4 constantes arbitrárias, C_1, C_2, C_3 e C_4, que podem ser calculadas a partir das 4 condições iniciais que são naturais para este problema, a posição e a velocidade iniciais para cada uma das massas. Portanto devemos calcular x_2 de modo a não introduzir nenhuma nova constante arbirária. Consegue-se isto utilizando (2), de onde se obtém

$$x_2 = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t - C_3 \cos\big(t\sqrt{5}\,\big) - C_4 \operatorname{sen}\big(t\sqrt{5}\,\big). \tag{5}$$

Estudaremos em detalhe funções periódicas um pouco mais adiante. Veremos que a soma de funções periódicas nem sempre é periódica. Somente quando os períodos são comensuráveis é que se pode garantir que da soma vai resultar uma função periódica. No caso das expressões (4) e (5) os períodos não são comensuráveis. No entanto analisando (4) e (5) pode-se dizer duas coisas:

- Se as condições inciais forem tais que $C_3 = C_4 = 0$, tem-se $x_1 = x_2 = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t$. Neste caso as massas se deslocam em paralelo, ora para um lado, ora para o outro lado, sem que a mola do meio se deforme. Ambas têm período 2π e, em conseqüência, a mesma freqüência

  $$f_1 = \frac{1}{2\pi}\,.$$

  Um exemplo de condições iniciais em que isto ocorre é quando no instante $t_0 = 0$ as massas partem da posição de equilíbrio com velocidades iniciais iguais, ou seja, $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $x_1'(0) = x_2'(0) = v_0$. Neste caso obtém-se $C_1 = C_3 = C_4 = 0$ e $C_2 = v_0$.

- Se as condições inciais forem tais que $C_1 = C_2 = 0$, tem-se $x_1 = -x_2 = C_3 \cos\big(t\sqrt{5}\,\big) + C_4 \operatorname{sen}\big(t\sqrt{5}\,\big)$. Neste caso as massas realizam movimento harmônico simples, deslocando-se sempre em sentidos opostos. Ocupam sempre posições simétricas em relação ao ponto médio das duas (centro de massa). Para determinar o período, pense que tudo o que ocorre no instante $t = 0$ vai se repetir quanto t for tal que $t\sqrt{5} = 2\pi$, ou seja, quando $t = \dfrac{2\pi}{\sqrt{5}}$.
  A freqüência, sendo o inverso do período, é

  $$f_2 = \frac{\sqrt{5}}{2\pi}\,.$$

Conclusão: Este sistema possui 2 freqüências naturais diferentes, $f_1 = \dfrac{1}{2\pi}$ *e* $f_2 = \dfrac{\sqrt{5}}{2\pi}$. *Ele é capaz de realizar oscilações periódicas com cada uma destas freqüências naturais. Em geral, o movimento do sistema é a superposição de dois movimentos periódicos com freqüências* f_1 *e* f_2.

Em conseqüência, o sistema poderá entrar em ressonância pela ação de uma força externa periódica que tenha freqüência igual a qualquer uma dessas freqüências naturais do sistema. Sistemas formados por mais massas e molas podem ter várias freqüências naturais. Mais adiante veremos que uma corda vibrante tem uma infinidade de freqüências naturais.

Exemplo 3. Resolver a EDO $y''' + 8y = 0$.

A equação característica é $\lambda^3 + 8 = 0$. Suas raízes são os números complexos λ tais que $\lambda^3 = -8$, isto é, as raízes cúbicas complexas de -8. Uma raiz é $\lambda_1 = \sqrt[3]{-8} = -2$. Dividindo $\lambda^3 + 8$ por $\lambda + 2$, obtem-se a fatoração

$$\lambda^3 + 8 = (\lambda + 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 4).$$

Resolvendo $\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$, encontramos as raízes $\lambda_2 = 1 + i\sqrt{3}$ e $\lambda_3 = 1 - i\sqrt{3}$. Logo, três soluções linearmente independentes de nossa EDO são

$$y_1 = e^{-2t}\ , \qquad y_2 = e^t \cos\big(t\sqrt{3}\,\big)\ , \qquad y_3 = e^t \operatorname{sen}\big(t\sqrt{3}\,\big)$$

e a solução geral é

$$y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t \cos\big(t\sqrt{3}\,\big) + C_3 e^t \operatorname{sen}\big(t\sqrt{3}\,\big).$$

Observação. No Exemplo 3 vemos que, diferentemente do que acontece com os números reais, no conjunto dos números complexos existem três valores diferentes para uma raiz cúbica

$$\sqrt[3]{8} = \begin{cases} 2 \\ 1 + i\sqrt{3} \\ 1 - i\sqrt{3} \end{cases}$$

Mais geralmente, dado um número complexo $z \neq 0$, existem n deferentes raízes $n-$ésimas $\sqrt[n]{z}$.

Exemplo 4. Resolver a EDO $y^{(4)} + 16y = 0$.

A equação característica é $\lambda^4 + 16 = 0$. Suas raízes são os números complexos λ tais que $\lambda^4 = -16$, isto é, as raízes quartas complexas de -16. Quem não lembra de como se calculam raízes quartas de números complexos, pode começar fazendo a substituição $\lambda = \alpha + i\beta$. Aplicando o Binômio de Newton na igualdade $\big(\alpha + i\beta\big)^4 = -16$, temos

$$\alpha^4 + 4\alpha^3 i\beta + 6\alpha^2(i\beta)^2 + 4\alpha(i\beta)^3 + (i\beta)^4 = -16,$$

ou seja,

$$\alpha^4 + 4\alpha^3 i\beta - 6\alpha^2\beta^2 - 4i\alpha\beta^3 + \beta^4 = -16.$$

Separando os termos reais dos imaginários, obtemos

$$\big(\alpha^4 - 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4\big) + 4i\big(\alpha^3\beta - \alpha\beta^3\big) = -16,$$

que equivale ao sistema

$$\begin{cases} \alpha^4 - 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4 = -16 \\ \alpha^3\beta - \alpha\beta^3 = 0 \end{cases}$$

A segunda equação se fatora como $\alpha\beta\big(\alpha^2 - \beta^2\big) = 0$. Mas a primeira equação não pode ser satisfeita com $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$. Portanto, $\alpha^2 = \beta^2$. Substituindo na primeira equação, temos

$-4\alpha^4 = -16$, que nos dá $\alpha^2 = 2$ e $\alpha = \pm\sqrt{2}$. Obtém-se daí as raízes $\lambda_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $\lambda_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$, $\lambda_3 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ e $\lambda_4 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

Conclusão: A equação característica tem quatro raízes distintas, os 2 pares conjugados $\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$. Portanto, quatro soluções linearmente independentes da EDO são

$$y_1 = e^{t\sqrt{2}}\cos\big(t\sqrt{2}\big), \quad y_2 = e^{t\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}\,\big(t\sqrt{2}\big), \quad y_3 = e^{-t\sqrt{2}}\cos\big(t\sqrt{2}\big) \quad \text{e} \quad y_3 = e^{-t\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}\,\big(t\sqrt{2}\big).$$

Observação. Os quatro valores diferentes para a raiz quarta de -16 nos números complexos são

$$\sqrt[4]{-16} = \begin{cases} \sqrt{2} + i\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} + i\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} - i\sqrt{2} \\ \sqrt{2} - i\sqrt{2} \end{cases}$$

Exemplo 5. Resolver a EDO

$$y^{(4)} - 8y''' + 24y'' - 32y' + 16y = 0.$$

A equação característica é

$$\lambda^4 - 8\lambda^3 + 24\lambda^2 - 32\lambda + 16 = 0.$$

Os candidatos a raiz racional são os m/n com m divisor de 16 e n divisor de 1. As possíveis raízes racionais são, então, $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8, \pm16$. É fácil verificar que 2 é uma raiz. Dividindo o polinômio $\lambda^4 - 8\lambda^3 + 24\lambda^2 - 32\lambda + 16$ por $\lambda - 2$, encontramos a fatoração

$$\lambda^4 - 8\lambda^3 + 24\lambda^2 - 32\lambda + 16 = (\lambda - 2)(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8).$$

Repetindo o mesmo procedimento com o polinômio $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8$ verificamos que 2 é raiz e, novamente por divisão, encontramos a fatoração

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda^2 + 4).$$

Segue que

$$\lambda^4 - 8\lambda^3 + 24\lambda^2 - 32\lambda + 16 = (\lambda - 2)^2(\lambda^2 - 4\lambda^2 + 4).$$

Utilizando a fórmula de Bhaskara, encontramos

$$\lambda^2 - 4\lambda^2 + 4 = (\lambda - 2)^2.$$

Logo,

$$\lambda^4 - 8\lambda^3 + 24\lambda^2 - 32\lambda + 16 = (\lambda - 2)^4.$$

Concluímos que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$ é raiz de multiplicidade 4 da equação característica. Portanto, quatro soluções L.I. da EDO são

$$y_1 = e^{2t}, \qquad y_2 = te^{2t}, \qquad y_3 = t^2e^{2t}, \qquad y_4 = t^3e^{2t}$$

e a solução geral é

$$y = C_1e^{2t} + C_2te^{2t} + C_3t^2e^{2t} + C_4t^3e^{2t} = \big(C_1 + C_2t + C_3t^2 + C_4t^3\big)e^{2t}.$$