Seção 16 – Sistemas de equações diferenciais de 1ª ordem lineares homogêneas de coeficientes constantes

Na seção anterior, vimos como resolver sistemas de equações usando o método dos operadores. Em certas situações particulares, no entanto, podemos aplicar outros métodos mais convenientes. Por exemplo, considere o sistema

$$\begin{cases} x_1' = -2x_1 + x_2 \\ x_2' = \quad x_1 - 2x_2 \end{cases} \tag{1}$$

Uma forma de resolver este sistema é isolar x_2 na 1ª equação

$$x_2 = x_1' + 2x_1, \tag{2}$$

e substituir na 2ª equação,

$$(x_1' + 2x_1)' = x_1 - 2(x_1' + 2x_1),$$

obtendo,

$$x_1'' + 4x_1' + 3x_1 = 0,$$

que é uma EDO linear homogênea, cuja a solução geral é

$$x_1(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}. \tag{3}$$

Para achar $x_2(t)$ basta substituir (3) em (2),

$$x_2(t) = (C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t})' + 2(C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}) = C_1 e^{-t} - C_2 e^{-3t}.$$

Assim, a solução do sistema (3) é

$$x_1(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}, \qquad x_2(t) = C_1 e^{-t} - C_2 e^{-3t} \tag{4}$$

onde C_1 e C_2 são duas constantes arbitrárias.

Embora este método seja simples, ele pode ser trabalhoso para sistemas de ordem maior. Portanto, vamos usar uma idéia diferente. Para isto, note que o sistema (1) pode ser reescrito em forma matricial como

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

ou ainda

$$\vec{x}\,'(t) = A\,\vec{x}(t)$$

sendo A a matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ e $\vec{x} = \vec{x}(t)$ a função vetorial $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$.

Método de resolução. Seja A uma matriz $n \times n$ e consideremos o sistema de 1ª ordem

$$\vec{x}\,'(t) = A\,\vec{x}(t) \tag{6}$$

No caso $n = 1$, a matriz A se resumiria a um único escalar a e teríamos a equação escalar

$$x' = ax$$

cuja solução geral é $x(t) = Ce^{at}$. Por analogia, no caso $n \geq 2$, substituindo a constante C por um vetor $\vec{v}$, procuramos a solução do sistema (6) na forma

$$\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\vec{v} \tag{7}$$

Substituindo (7) em (6), obtemos $\lambda e^{\lambda t}\vec{v} = e^{\lambda t}A\vec{v}$, ou seja

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}. \tag{8}$$

Logo,

A função $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}$ é uma solução do sistema (6) *se e somente se $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$.*

Para prosseguir, precisamos relembrar uma definição da Álgebra Linear.

Definição. Seja A uma matriz $n \times n$. Um escalar λ é um *autovalor* da matriz A se existir um vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, tal que $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Dizemos que o vetor $\vec{v}$ é um *autovetor* associado ao autovalor λ. (O autovetor associado a um autovalor λ não é único. De fato, se $\vec{v}$ é um autovetor então qualquer múltiplo $c\vec{v}$ também é.)

Conclusão: *A função $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}$ é uma solução do sistema* (6) *se e somente se λ é um autovalor de A e $\vec{v}$ é um autovetor associado a λ.*

Voltando ao exemplo, para achar as soluções de (5) (equivalentemente, as soluções de (1)), devemos encontrar os autovalores e autovetores de

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Para isto, devemos resolver

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = \lambda x_1 \\ x_1 - 2x_2 = \lambda x_2 \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{cases} (-2-\lambda)x_1 + \quad x_2 \quad = 0 \\ \quad x_1 \quad + (-2-\lambda)x_2 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

A condição para que o sistema (15) tenha solução não trivial $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ é que

$$\det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

ou seja, $(-2-\lambda)^2 - 1 = 0$, ou ainda

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0, \tag{10}$$

cujas raízes são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -3$. Para obtermos um autovetor associado ao autovalor λ_1, devemos primeiro susbsituir λ por $\lambda_1 = -1$ no sistema (9), obtendo duas relações que são equivalentes a $x_2 = x_1$. Tomando, por exemplo, $x_1 = 1$, segue que $x_2 = 1$. Logo o vetor $v_1 = (1,1)$ é um autovetor da matriz associada a λ_1, isto é,

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Procedendo de forma similar para λ_2, concluímos que $v_2 = (1,-1)$ é um possível autovetor associado a -3. Logo

$$x(t) = e^{\lambda_1 t} v_1 = e^{-1t}(1,1) = (e^{-t}, e^{-t})$$

e

$$y(t) = e^{\lambda_2 t} v_2 = e^{-3t}(1,-1) = (e^{-3t}, -e^{-3t})$$

são possíveis soluções do problema. Portanto, a solução geral, que é a combinação linear dessas duas, é dada por

$$\vec{x}(t) = C_1(e^{-t}, e^{-t}) + C_2(e^{-3t}, -e^{-3t}) = (C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}, C_1 e^{-t} - C_2 e^{-3t}).$$

Logo, as incógnitas do problema, dadas pelas coordenadas de $\vec{x}$, são

$$x_1(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t} \quad \text{e} \quad x_2(t) = C_1 e^{-t} - C_2 e^{-3t}.$$

Representação das soluções no Plano de Fase: Uma questão de interesse é estudar a estabilidade e o comportamento assintótico destas soluções. Para isso, note primeiro que podemos considerar a função $t \to \vec{x}(t)$ como uma trajetória no plano $x_1 x_2$, chamado de *plano de fase*. Observe que a cada par de constantes C_1 e C_2 corresponde uma solução diferente e, portanto, uma trajetória diferente. Por exemplo, para $C_1 = 1$ e $C_2 = 0$, temos o solução $\vec{x}(t) = (e^{-t}, e^{-t})$, representada na Figura 1 pela trajetória azul no 1º quadrante. Para $C_1 = -1$ e $C_2 = 0$, temos $\vec{x}(t) = (-e^{-t}, -e^{-t})$ também representada em azul no 3º quadrante.

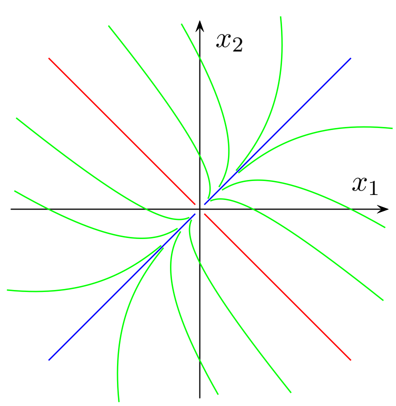

Figura 1

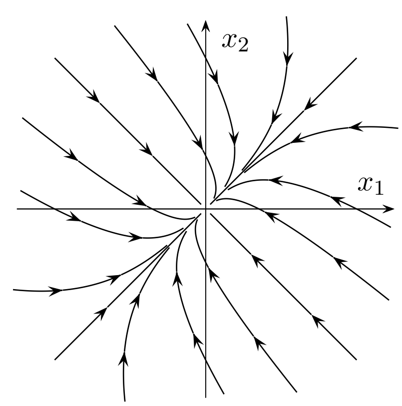

Figura 2

Como $(e^{-t}, e^{-t}) = e^{-t}(1,1)$ e $(-e^{-t}, -e^{-t}) = -e^{-t}(1,1)$, então estas trajetórias estão na reta que passa pela origem com a direção do vetor $v_1 = (1,1)$.

Escolhendo $C_1 = 0$ e $C_2 = 1$, temos a solução dada por $\vec{x}(t) = (e^{-3t}, -e^{-3t}) = e^{-3t}(1,-1)$, representada pela trajetória vermelha no 4º quadrante e, tomando $C_1 = 0$ e $C_2 = -1$, temos $\vec{x}(t) = (-e^{-3t}, e^{-3t}) = -e^{-3t}(1,-1)$, representada pela semireta vermelha no 2º quadrante. Note que estas estão sobre a reta que passa por $(0,0)$ com a direção de $v_2 = (1,-1)$.

Observações:

1) Para $C_1 = C_2 = 0$ temos a solução de equilíbrio $\vec{x}(t) = (0, 0)$, cuja trajetória nas Figuras 1 e 2 é apenas o ponto $(0, 0)$. De fato, qualquer sistema da forma $\vec{x}\,' = A\vec{x}$ tem $\vec{x}(t) = (0, 0)$ como uma de suas soluções.
2) Lembremos que $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (1, -1)$ são autovetores da matriz A. Na verdade, as retas que passam pela origem e que tenham a direção de algum dos autovetores correspondem a trajetórias de soluções do problema. Na caso, a reta $x_2 = x_1$, que tem a direção de v_1, corresponde as soluções da forma $C_1(e^{-t}, e^{-t})$ e a reta $x_2 = -x_1$, de direção v_2, corresponde as soluções $C_2(e^{-3t}, -e^{-3t})$.
3) A trajetória das demais soluções ($C_1 \neq 0$ e $C_2 \neq 0$) não estão sobre retas, mas são curvas que estão representadas em verde no plano de fase da Figura 1.
4) Para qualquer par de constantes C_1 e C_2,

$$\lim_{t\to+\infty} x_1(t) = \lim_{t\to+\infty} C_1e^{-t} + C_2e^{-3t} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t\to+\infty} x_2(t) = \lim_{t\to+\infty} C_1e^{-t} - C_2e^{-3t} = 0,$$

isto é, $\vec{x}(t) \to 0$ quando $t \to +\infty$. Isto está representado graficamente na Figura 2 pelas setas que orientam as trajetórias em direção a origem.

Resumindo:

> Se os autovalores da matriz A são negativos e diferentes, as trajetória das soluções comportam-se de forma similar as da Figura 2. Nesse caso, dizemos que a origem é um **nó atrator** ou um **nó assintoticamente estável** do sistema. Além disso, as trajetórias retas estão na direção dos autovetores. Como as soluções convergem a origem dizemos que ela é um **ponto crítico assintoticamente estável**.

Exemplo 2. Considere o sistema

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 3x_2 \\ x_2' = x_1 + 2x_2 \end{cases} \tag{11}$$

que pode ser representado na forma matricial por

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Para achar as soluções e estudar o seu comportamento, vamos encontrar os autovalores e autovetores associados. A equação

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = \lambda x_1 \\ x_1 + 2x_2 = \lambda x_2 \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{cases} (4-\lambda)x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 + (2-\lambda)x_2 = 0 \end{cases} \tag{12}$$

A condição para que o sistema (12) tenha solução não trivial $(x_1, x_2) \neq (0,0)$ é que

$$\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

ou seja, $(4-\lambda)(2-\lambda) - 3 = 0$, ou ainda

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0. \tag{13}$$

As raízes de (13) são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 5$. Para $\lambda_1 = 1$, qualquer uma das equações do sistema (12) equivale a $x_2 = -x_1$. Escolhendo $x_1 = 1$, obtemos $x_2 = -1$. Portanto, um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$ é o vetor $(1, -1)$, ou seja

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Procedendo da mesma maneira em relação ao autovalor $\lambda_2 = 5$, encontramos o autovetor $(3, 1)$,

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Segue que duas soluções LI do sistema são

$$x(t) = e^t(1, -1) \quad \text{e} \quad y(t) = e^{5t}(3, 1).$$

A solução geral do sistema é a família das combinações lineares dessas duas

$$\vec{x}(t) = C_1 e^t (1, -1) + C_2 e^{5t}(3, 1) = (C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}, -C_1 e^t + C_2 e^{5t}).$$

Logo, as incógnitas do problema, dadas pelas coordenadas de $\vec{x}$, são

$$x_1(t) = C_1 e^t + 3C_2 e^{5t} \quad \text{e} \quad x_2(t) = -C_1 e^t + C_2 e^{5t}.$$

Representação das soluções no Plano de Fase:

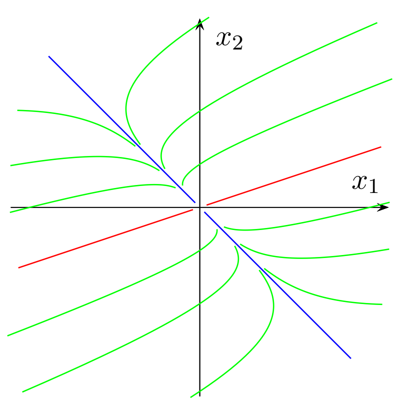

Figura 3

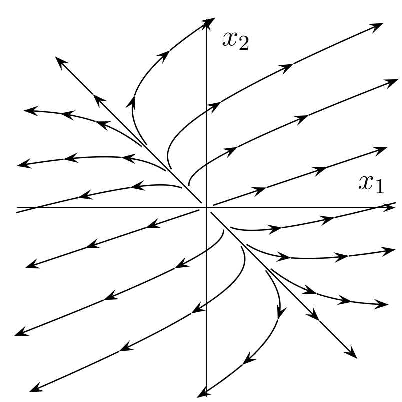

Figura 4

1) Para $C_1 = 1$ e $C_2 = 0$, temos $\vec{x}(t) = e^t(1, -1)$, que está na reta que passa pela origem com a direção de $(1, -1)$, isto é, sobre a reta $x_2 = -x_1$ (no 4º quadrante), representada em azul na Figura 3. Para $C_1 = -1$ e $C_2 = 0$, as trajetórias estão sobre a mesma reta, mas no 2º quadrante.

2) Para $C_1 = 0$ e $C_2 = \pm 1$, as trajetórias estão sobre a reta $x_1 = 3x_2$, representada em vermelho.
3) As soluções em que $C_1 \neq 0$ e $C_2 \neq 0$ estão sobre as curvas verdes.
4) Se $C_1 \neq 0$ ou $C_2 \neq 0$,

$$\lim_{t\to+\infty} |x_1(t)| = \lim_{t\to+\infty} |C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}| = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{t\to+\infty} |x_2(t)| = \lim_{t\to+\infty} |-C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}| = +\infty,$$

isto é, $\vec{x}(t) \to \infty$ quando $t \to +\infty$. Isto está representado graficamente na Figura 4 pelas setas que orientam as trajetórias em direção contrária a da origem.

Resumindo:

> Se os autovalores da matriz A são positivos e diferentes, as trajetória das soluções comportam-se de forma similar as da Figura 4. Nesse caso, dizemos que a origem é um **nó instável ou fonte** do sistema. Além disso, as trajetórias retas estão na direção dos autovetores. A origem é um **ponto crítico instável**.

Exemplo 3.

$$\begin{cases} x_1' = 10x_1 - 9x_2 \\ x_2' = -12x_1 - 2x_2 \end{cases} \tag{14}$$

ou, equivalentemente, em forma matricial

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ -12 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Vamos encontrar os autovalores e autovetores associados. A equação

$$\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ -12 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} 10x_1 - 9x_2 = \lambda x_1 \\ -12x_1 - 2x_2 = \lambda x_2 \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{cases} (10-\lambda)x_1 - 9x_2 = 0 \\ -12x_1 + (-2-\lambda)x_2 = 0 \end{cases} \tag{15}$$

A condição para que o sistema (15) tenha solução não trivial $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ é que

$$\det \begin{pmatrix} 10-\lambda & -9 \\ -12 & -2-\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

ou seja, $(10-\lambda)(-2-\lambda) - (-9)(-12) = 0$, ou ainda

$$\lambda^2 - 8\lambda - 128 = 0. \tag{16}$$

As raízes de (16) são $\lambda_1 = 16$ e $\lambda_2 = -8$. Para $\lambda_1 = 16$, qualquer uma das equações do sistema (15) equivale a $3x_2 = -2x_1$. Escolhendo $x_1 = 3$, obtemos $x_2 = -2$. Portanto, um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 16$ é o vetor $(3, -2)$, ou seja

$$\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ -12 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 16 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Procedendo da mesma maneira em relação ao autovalor $\lambda_2 = -8$, encontramos o autovetor $(1, 2)$,

$$\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ -12 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -8 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Segue que duas soluções LI do sistema são

$$x(t) = e^{16t}(3, -2) \quad \text{e} \qquad y(t) = e^{-8t}(1, 2).$$

A solução geral do sistema é a família das combinações lineares dessas duas

$$\vec{x}(t) = C_1 e^{16t}(3, -2) + C_2 e^{-8t}(1, 2) = (3C_1 e^{16t} + C_2 e^{-8t}, -2C_1 e^{16t} + 2C_2 e^{-8t}).$$

Logo, as incógnitas do problema, dadas pelas coordenadas de $\vec{x}$, são

$$x_1(t) = 3C_1 e^{16t} + C_2 e^{-8t} \quad \text{e} \quad x_2(t) = -2C_1 e^{16t} + 2C_2 e^{-8t}.$$

Representação das soluções no Plano de Fase:

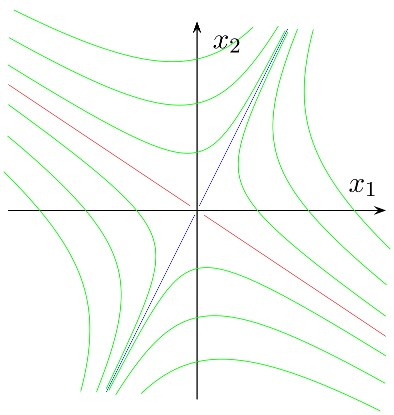

Figura 5

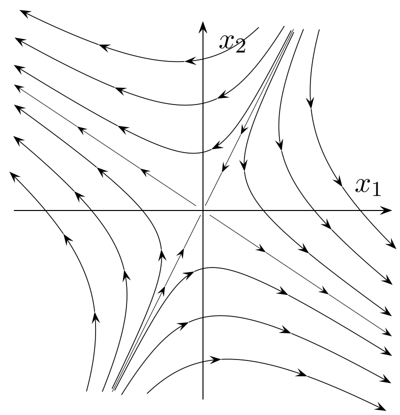

Figura 6

1) Para $C_1 = 1$ e $C_2 = 0$, temos $\vec{x}(t) = e^{16t}(3, -2)$, que está na reta que passa pela origem com a direção de $(3, -2)$, isto é, sobre a reta $2x_1 + 3x_2 = 0$ (no 4º quadrante), representada em vermelho na Figura 5. Para $C_1 = -1$ e $C_2 = 0$, as trajetórias estão sobre a mesma reta, mas no 2º quadrante.
2) Para $C_1 = 0$ e $C_2 = \pm 1$, as trajetórias estão sobre a reta $x_2 = 2x_1$, representada em azul.
3) As soluções em que $C_1 \neq 0$ e $C_2 \neq 0$ estão sobre as curvas verdes.
4) Se $C_1 = 0$

$$\lim_{t \to +\infty} |x_1(t)| = \lim_{t \to +\infty} |C_2 e^{-8t}| = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \to +\infty} |x_2(t)| = \lim_{t \to +\infty} |2C_2 e^{-8t}| = 0.$$

Este é o único caso em que as soluções convergem para 0. Note que na Figura 6, as setas só convergem para a origem, quando estão sobre a reta $x_2 = 2x_1$. Se $C_1 \neq 0$,

$$\lim_{t \to +\infty} |x_1(t)| = \lim_{t \to +\infty} |3C_1 e^{16t} + C_2 e^{-8t}| = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{t \to +\infty} |x_2(t)| = +\infty,$$

isto é, $\vec{x}(t) \to \infty$ quando $t \to +\infty$. Isto está representado graficamente na Figura 6 pelas setas que "vão para infinito na direção da reta $2x_1 + 3x_2 = 0$".

Resumindo:

Se os autovalores da matriz A possuem sinais contrários, as trajetória das soluções comportam-se de forma similar as da Figura 6. Nesse caso, dizemos que a origem é um **ponto de sela** do sistema. Além disso, as trajetórias retas estão na direção dos autovetores. A origem é um **ponto crítico instável**.

Exemplo 4.

$$\begin{cases} x_1' = \quad x_1 + x_2 \\ x_2' = -2x_1 - x_2 \end{cases} \tag{17}$$

ou, equivalentemente, em forma matricial

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Vamos encontrar os autovalores e autovetores associados. A equação

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \lambda x_1 \\ -2x_1 - x_2 = \lambda x_2 \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + \quad x_2 \quad = 0 \\ -2x_1 \quad + (-1-\lambda)x_2 = 0 \end{cases} \tag{18}$$

A condição para que o sistema (18) tenha solução não trivial $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ é que

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

ou seja, $(1-\lambda)(-1-\lambda) - (1)(-2) = 0$, ou ainda

$$\lambda^2 + 1 = 0. \tag{19}$$

As raízes de (19) são $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = -i$. Para $\lambda_1 = i$, qualquer uma das equações do sistema (18) equivale a $x_2 = -(1-i)x_1$. Escolhendo $x_1 = 1$, obtemos $x_2 = -1 + i$. Portanto, um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = i$ é o vetor $\vec{v}_1 = (1, -1+i)$, ou seja

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix}$$

OBS: Não há necessidade de achar um autovetor associado a $\lambda_2 = -i$, pois se $\vec{x}(t) = \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}$ é uma solução do problema $\vec{x}\,'(t) = A\,\vec{x}(t)$, isto é,

$$(\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t})' = A\,\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t},$$

então, aplicando o conjugado na equação, decorre

$$(\overline{\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}})' = \overline{A}\,\overline{\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}}.$$

Como A tem coeficientes reais, segue que $\overline{A} = A$ e, portanto,

$$(\overline{\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}})' = A\,\overline{\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}},$$

ou seja, $\overline{\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}}$ também é uma solução do problema. Como o sistema $\vec{x}\,'(t) = A\,\vec{x}(t)$ é linear homogêneo, a combinação linear de soluções é solução. Logo

$$\frac{\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + \overline{\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} - \overline{\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}}}{2i}$$

são soluções do sistema, sendo que a primeira corresponde a parte real de $\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}$ e a segunda a parte imaginária.

Conclusão: Quando as raízes são complexas (A matriz de coeficientes reais), a parte real e a parte imaginária de $\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}$ são soluções do problema. Além disso, pode ser mostrado que elas são linearmente independentes.

Assim, podemos achar 2 soluções LI do problema considerando a parte real e a imaginária de

$$\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix} (\cos t + i \operatorname{sen} t) = \begin{pmatrix} \cos t + i \operatorname{sen} t \\ -\cos t - \operatorname{sen} t + i(\cos t - \operatorname{sen} t) \end{pmatrix}.$$

Logo

$$\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

e, então, denotando a parte real e a imaginária por $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente, temos

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad y(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

Portanto, a solução geral, que é a combinação linear dessas duas, é

$$\vec{x}(t) = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t \\ (C_2 - C_1)\cos t - (C_1 + C_2) \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

Logo, as incógnitas x_1 e x_2, coordenadas de $\vec{x}$, são

$$x_1(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t \quad \text{e} \quad x_2(t) = (C_2 - C_1)\cos t - (C_1 + C_2) \operatorname{sen} t.$$

Representação das soluções no Plano de Fase:

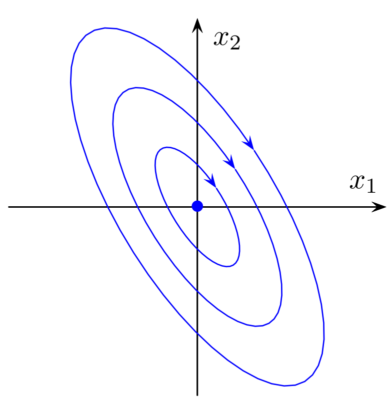

Figura 7

1) Para qualquer C_1 e C_2, as coordenadas x_1 e x_2 são funções periódicas de período 2π. Portanto, as trajetórias são curvas fechadas. Na verdade, podemos mostrar que as curvas sempre são círculos ou elipses centradas na origem (ver Apêndice).

Resumindo:

> Se os autovalores da matriz A são imaginários puros, isto é, da forma $\lambda_1 = \mu i$ e $\lambda_2 = -\mu i$ com $\mu \neq 0$, então as trajetória são círculos ou elipses conforme a Figura 7. Nesse caso, dizemos que a origem é um **centro** do sistema. A origem é um **ponto crítico estável**.

Exemplo 5.

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 \\ x_2' = -2x_1 + x_2 \end{cases} \tag{20}$$

ou, equivalentemente, em forma matricial

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Vamos encontrar os autovalores e autovetores associados. A equação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = \lambda x_1 \\ -2x_1 + x_2 = \lambda x_2 \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + \quad 2x_2 \quad = 0 \\ \quad -2x_1 \quad + (1-\lambda)x_2 = 0 \end{cases} \tag{21}$$

A condição para que o sistema (21) tenha solução não trivial $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ é que

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

ou seja, $(1-\lambda)^2 - (2)(-2) = 0$, ou ainda

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0. \tag{22}$$

As raízes de (22) são $\lambda_1 = 1 + 2i$ e $\lambda_2 = 1 - 2i$. Para $\lambda_1 = 1 + 2i$, qualquer uma das equações do sistema (21) equivale a $x_2 = ix_1$. Escolhendo $x_1 = 1$, obtemos $x_2 = i$. Portanto, um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 1 + 2i$ é o vetor $\vec{v}_1 = (1, i)$, ou seja

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = (1 + 2i) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Como já observamos no Exemplo 4, podemos achar 2 soluções LI, tomando a parte real e a parte imaginária de $\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}$:

$$\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(1+2i)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^t(\cos 2t + i \,\mathrm{sen}\, 2t) = \begin{pmatrix} e^t \cos 2t + ie^t \,\mathrm{sen}\, 2t \\ -e^t \,\mathrm{sen}\, 2t + ie^t \cos 2t \end{pmatrix}.$$

Logo

$$\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} e^t \cos 2t \\ -e^t \,\mathrm{sen}\, 2t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} e^t \,\mathrm{sen}\, 2t \\ e^t \cos 2t \end{pmatrix}$$

e, então, denotando a parte real e a imaginária por $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente, temos

$$x(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\,\mathrm{sen}\, 2t \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad y(t) = e^t \begin{pmatrix} \mathrm{sen}\, 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}$$

Portanto, a solução geral, que é a combinação linear dessas duas, é

$$\vec{x}(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\,\mathrm{sen}\, 2t \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} \mathrm{sen}\, 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} C_1 \cos 2t + C_2 \,\mathrm{sen}\, 2t \\ -C_1 \,\mathrm{sen}\, 2t + C_2 \cos 2t \end{pmatrix}$$

Logo, as incógnitas x_1 e x_2, coordenadas de $\vec{x}$, são

$$x_1(t) = e^t(C_1 \cos 2t + C_2 \,\mathrm{sen}\, 2t) \quad \text{e} \quad x_2(t) = e^t(-C_1 \,\mathrm{sen}\, 2t + C_2 \cos 2t).$$

Representação das soluções no Plano de Fase:

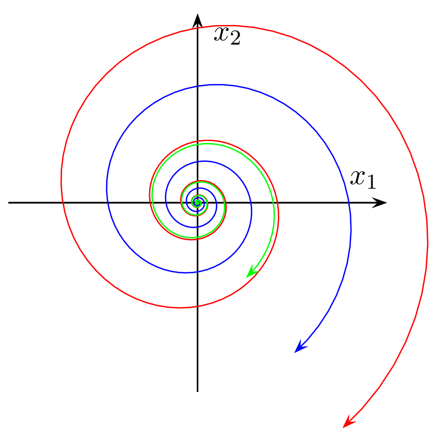

Figura 8

1) Para $C_1 = 1$ e $C_2 = 0$, temos $\vec{x}(t) = e^t(\cos 2t, -\,\mathrm{sen}\, 2t)$. Note que a distância entre $\vec{x}(t)$ e a origem é

$$\|\vec{x}(t)\| = \|e^t(\cos 2t, -\,\mathrm{sen}\, 2t)\| = e^t\|(\cos 2t, -\,\mathrm{sen}\, 2t)\| = e^t\sqrt{\cos^2 2t + \,\mathrm{sen}^2 2t} = e^t.$$

Portanto, a distância entre $\vec{x}(t)$ e a origem vai para infinito quando $t \to +\infty$. Ou seja, "$\vec{x}(t)$ vai para infinito" quando $t \to +\infty$.

Além disso, a direção de $\vec{x}(t)$ é dada por $(\cos 2t, -\operatorname{sen} 2t)$, que percorre o círculo de raio 1 no sentido horário a medida que t aumenta.

Assim, quando t aumenta, $\vec{x}(t)$ circula em torno da origem no sentido horário ao mesmo tempo que se distancia da origem. Ou seja, ele percorre uma trajetória espiral conforme as três curvas indicadas na Figura 8.

2) Este comportamento espiral indo para infinito no sentido horário vale, neste exemplo, para qualquer solução em que $C_1 \neq 0$ ou $C_2 \neq 0$. (Caso $C_1 = C_2 = 0$, a solução é $\vec{x}(t) = 0$, cuja trajetória é apenas o ponto $(0, 0)$ como já foi observado no Exemplo 1.)

Resumindo:

> Se os autovalores da matriz A são complexos com parte real positiva, isto é, da forma $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ e $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ com $\alpha > 0$ e $\beta \neq 0$, então as trajetória são espirais indo para infinito conforme a Figura 8. (A orientação das soluções (sentido horário ou anti-horário) depende do sistema.) Nesse caso, dizemos que a origem é um **ponto espiral** ou **foco instável** do sistema. A origem é um **ponto crítico instável**.

OBSERVAÇÕES:

• Existem sistemas em que as soluções ficam todas orientadas no sentido anti-horário.
• Se a parte real de uma raiz complexa for negativa, então as soluções convergirão para 0 ao invés de irem para infinito. Nesse caso, as setas orientam as trajetórias em direção a origem.

Resumindo:

> Se os autovalores da matriz A são complexos com parte real negativa, isto é, da forma $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ e $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ com $\alpha < 0$ e $\beta \neq 0$, então as trajetória são espirais indo para 0. (A orientação das soluções (sentido horário ou anti-horário) depende do sistema.) Nesse caso, dizemos que a origem é um **ponto espiral** ou **foco estável** do sistema. A origem é um **ponto crítico estável**.

APÊNDICE

Propriedade: Se as coordenadas x_1 e x_2 de uma trajetória $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ são da forma

$$x_1(t) = A\cos(\mu t) + B\operatorname{sen}(\mu t) \quad \text{e} \quad x_2(t) = C\cos(\mu t) + D\operatorname{sen}(\mu t),$$

onde A, B, C, D e μ são constantes reais e os vetores (A, C) e (B, D) são LI, então a trajetória ou é um círculo ou é uma elipse.

Prova: Observe que

$$\begin{aligned} C\,x_1(t) - A\,x_2(t) &= C(A\cos(\mu t) + B\operatorname{sen}(\mu t)) - A(C\cos(\mu t) + D\operatorname{sen}(\mu t)) \\ &= (CB - AD)\operatorname{sen}(\mu t) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} D\,x_1(t) - B\,x_2(t) &= D(A\cos(\mu t) + B\operatorname{sen}(\mu t)) - B(C\cos(\mu t) + D\operatorname{sen}(\mu t)) \\ &= (DA - BC)\cos(\mu t). \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}(C\,x_1(t) - A\,x_2(t))^2 + (D\,x_1(t) - B\,x_2(t))^2 &= (DA - BC)^2(\operatorname{sen}^2(\mu t) + \cos^2(\mu t)) \\ &= (DA - BC)^2.\end{aligned} \tag{23}$$

Como (A, C) e (B, D) são LI,

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \neq 0,$$

ou seja, $DA - BC \neq 0$. Logo, podemos dividir (23) por $(DA - BC)^2$, obtendo

$$\frac{(C\,x_1(t) - A\,x_2(t))^2}{(DA - BC)^2} + \frac{(D\,x_1(t) - B\,x_2(t))^2}{(DA - BC)^2} = 1.$$

Portanto,

$$\frac{C^2x_1^2 - 2CA\,x_1x_2 + A^2x_2^2 + D^2x_1^2 - 2DB\,x_1x_2 + B^2x_2^2}{(DA - BC)^2} = 1,$$

ou ainda,

$$\frac{(C^2 + D^2)}{(DA - BC)^2}x_1^2 - \frac{2(CA + BD)}{(DA - BC)^2}x_1x_2 + \frac{(A^2 + B^2)}{(DA - BC)^2}x_2^2 = 1,$$

que representa uma curva cônica. Além do mais, o discriminante desta equação é dado por

$$\begin{aligned}\frac{4(CA + BD)^2}{(DA - BC)^4} - 4 \cdot \frac{(C^2 + D^2)}{(DA - BC)^2} \cdot \frac{(A^2 + B^2)}{(DA - BC)^2} &= -4 \cdot \frac{C^2B^2 + D^2A^2 - 2CABD}{(DA - BC)^4} \\ &= -4 \cdot \frac{(DA - BC)^2}{(DA - BC)^4} < 0.\end{aligned}$$

Portanto, como o discriminante é negativo, a cônica é um círculo ou uma elipse.