Secção 7. Sistemas de equações diferenciais.

(Farlow: Sec. 6.1, 6.4 e 6.6)

No caso geral, um sistema de *equações diferenciais de primeira ordem* pode ser representado da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = F_1(t, x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = F_2(t, x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n) \\ \qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = F_3(t, x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n) \end{cases}$$

Trata-se assim de um sistema com n variáveis dependentes, x_i, e uma variável independente, t.

Nesta secção, no entanto, vamos apenas abordar sistemas de EDOs *lineares* de primeira ordem, ou seja, sistemas com a forma geral:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases}$$

Alternativamente, podemos usar notação matricial[†], mais compacta:

Representação matricial de um sistema linear de 1ª ordem

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{\underline{A}}(t)\underline{x} + \underline{f}(t).$$

Se $\underline{f}(t) = \underline{0}$, o sistema é dito *homogéneo*, de contrário será *não homogéneo*.

[†] Esta forma matricial permite-nos estabelecer um paralelismo com a forma geral das EDOs lineares de primeira ordem: $\dfrac{dx}{dt} + p(t)x = f(t)$.

Redução de uma EDO linear de ordem n *a um sistema de* n *EDOs lineares de primeira ordem*

Uma *EDO lineares de ordem* n pode ser reescrita como um sistema de n *EDOs lineares de primeira ordem*. Vamos ver como. Consideremos uma EDO linear de ordem n na forma normalizada:

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = f(t),$$

sujeita às condições iniciais:

$$y(t_0) = A_1,\ y'(t_0) = A_2, \ldots,\ y^{(n-1)}(t_0) = A_n.$$

Se efectuarmos as seguintes mudanças de variável:

$$x_1 = y,\ x_2 = y', \ldots,\ x_n = y^{(n-1)},$$

então a EDO original pode ser substituída pelo seguinte sistema de n EDOs lineares de primeira ordem:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_3 \\ \quad\vdots \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dt} = x_n \\ \dfrac{dx_n}{dt} = -a_n(t)x_1 - \ldots - a_1(t)x_n + f(t) \end{cases}$$

sujeito às condições iniciais:

$$\begin{cases} x_1(t_0) = A_1 \\ x_2(t_0) = A_2 \\ \quad\vdots \\ x_{n-1}(t_0) = A_{n-1} \\ x_n(t_0) = A_n \end{cases}$$

Ou seja, resolver uma EDO linear de ordem n equivale a resolver um sistema de n EDOs lineares de primeira ordem. Interessante, mas… *como* se resolve esse sistema? Vamos discutir aqui dois métodos: o método de eliminação e o método matricial.

Método de eliminação

Este método aplica-se a sistemas lineares homogéneos ou não homogéneos. Baseia-se essencialmente no método de eliminação usado na resolução de sistemas lineares algébricos. O operador diferencial é tratado como um "coeficiente" do sistema:

1. Definir o operador $D \equiv \dfrac{d}{dt}$.
2. Considerar $\dfrac{dx_i}{dt} \equiv Dx_i$ como sendo o produto algébrico do coeficiente D pela variável x_i.
3. Eliminar variáveis, até obter uma equação com uma única variável dependente (são permitidas multiplicações por D mas não divisões por D!).

Exemplo

$$\begin{cases} x'_1 = 4x_1 - 2x_2 \\ x'_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

Comecemos por introduzir o operador D:

$$\begin{cases} x'_1 = 4x_1 - 2x_2 \\ x'_2 = x_1 + x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Dx_1 = 4x_1 - 2x_2 \\ Dx_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

Rearranjando:

$$\begin{cases} (D-4)x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + (D-1)x_2 = 0 \end{cases}$$

Vamos agora eliminar x_2. Para tal, multiplicámos a primeira equação por $-(D-1)$, a segunda por 2 e somámos ambas as equações:

$$\begin{cases} -(D-1)(D-4)x_1 - 2(D-1)x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2(D-1)x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\overline{-(D-1)(D-4)x_1 - 2x_1 = 0}$$

Obtém-se assim uma equação em x_1:

$$-(D-1)(D-4)x_1 - 2x_1 = 0$$

$$(D^2 - 5D + 4)x_1 + 2x_1 = 0$$

$$D^2 x_1 - 5Dx_1 + 6x_1 = 0$$

Ou, recordando que $D \equiv \dfrac{d}{dt}$:

$$x_1'' - 5x_1' + 6x_1 = 0\,.$$

Transformamos assim a resolução do sistema de duas EDOs na resolução de uma EDO homogénea de segunda ordem, o que não nos deverá surpreender, uma vez que já discutimos a analogia entre um sistema de n EDOs lineares de primeira ordem e uma EDO linear de ordem n. A solução geral desta equação é fácil de obter:

$$x_1 = C_1 e^{3t} + C_2 e^{2t}\,.$$

Da primeira equação do sistema original obtemos uma relação entre x_2 e x_1:

$$x_2 = \frac{1}{2}(4x_1 - x_1')\,.$$

Logo:

$$x_2 = \frac{1}{2} C_1 e^{3t} + C_2 e^{2t}\,.$$

Método matricial

A aplicação do método matricial é de certa forma análoga ao tratamento que efectuamos anteriormente para as EDOs lineares de ordem 2 ou superior. Da mesma forma, vamos primeiro estudar os sistemas homogéneos e depois os não homogéneos.

a) Sistemas lineares homogéneos‡

Vimos na Secção 4 que a solução geral de uma EDO linear homogénea de ordem n é dada pela combinação linear de n soluções particulares linearmente independentes. Um resultado semelhante pode ser derivado para um sistema linear homogéneo de n equações:

Teorema
Solução geral de um sistema linear homogéneo

Se $\underline{x}^{(1)}(t), \underline{x}^{(2)}(t), \ldots, \underline{x}^{(n)}(t)$ forem n *soluções particulares, linearmente independentes,* do sistema homogéneo linear de n equações:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{\underline{A}}(t)\underline{x}$$

‡ A partir daqui iremos omitir a designação da ordem das equações do sistema, pois estamos a assumir que se trata sempre de EDOs de *primeira ordem*.

num intervalo I em que os elementos de $\underline{\underline{A}}$ são contínuos, então a *solução geral* do sistema pode ser escrita como:

$$\underline{x}_h(t) = c_1\underline{x}^{(1)}(t) + c_2\underline{x}^{(2)}(t) + ... + c_n\underline{x}^{(n)}(t)$$

em que $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são constantes.

O conjunto $\left\{\underline{x}^{(1)}(t), \underline{x}^{(2)}(t), ..., \underline{x}^{(n)}(t)\right\}$ é designado por *conjunto fundamental de soluções*.

Coloca-se agora a questão de como encontrar as n soluções particulares linearmente independentes? Vamos considerar apenas o caso em que os coeficientes de $\underline{\underline{A}}$ são *constantes* (independentes de t):

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{\underline{A}}\underline{x}.$$

Se o problema tivesse dimensão $n = 1$, viria:

$$\frac{dy}{dt} = ay \quad \Rightarrow \quad y = ce^{at}.$$

Isto sugere que procuremos soluções de forma semelhante para o problema de dimensão n, substituindo a constante c por um *vector constante*, $\underline{v}$:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{\underline{A}}\underline{x} \quad \Rightarrow \quad \underline{x} = e^{lt}\underline{v}.$$

Como obter l e $\underline{v}$? Substituindo a solução proposta no sistema de equações obtemos:

$$l\, e^{lt}\underline{v} = \underline{\underline{A}} \; e^{lt}\underline{v}$$

$$l\,\underline{v} = \underline{\underline{A}}\underline{v}$$

$$(\underline{\underline{A}} - l\,\underline{\underline{I}})\underline{v} = \underline{0}.$$

Valores próprios e vectores próprios da matriz dos coeficientes

Ou seja, $\underline{x} = e^{lt}\underline{v}$ será uma solução do sistema de equações diferenciais se l e $\underline{v}$ verificarem a equação $(\underline{\underline{A}} - l\,\underline{\underline{I}})\underline{v} = \underline{0}$. Para que este sistema algébrico tenha soluções para além da solução trivial $\underline{v} = \underline{0}$, é necessário que o determinante da sua matriz de coeficientes seja nulo:

$$\left|\underline{\underline{A}} - l\,\underline{\underline{I}}\right| = 0.$$

A expansão deste determinante dá-nos um polinómio de ordem n em l (*equação característica*), cujas raízes (l) são designadas por *valores próprios* da matriz $\underline{\underline{A}}$. Para cada valor próprio obtido, resolve-se o sistema algébrico $(\underline{\underline{A}} - l\,\underline{\underline{I}})\underline{v} = \underline{0}$ e calcula-se o valor correspondente de $\underline{v}$, o qual é o *vector próprio* associado ao valor próprio l.

O seguinte teorema sistematiza este resultado:

Teorema

Construir a solução geral de um sistema linear homogéneo com base nos valores e vectores próprios da matriz dos coeficientes

Se $\underline{\underline{A}}$ for uma matriz constante $n´n$ com n vectores próprios linearmente independentes $\underline{v}^{(1)}$, $\underline{v}^{(2)}, \ldots, \underline{v}^{(n)}$, correspondentes a valores próprios reais $l_1, l_2, \ldots, l_n$, então

$$\left\{ e^{l_1 t}\underline{v}^{(1)}, e^{l_2 t}\underline{v}^{(2)}, \ldots, e^{l_n t}\underline{v}^{(n)} \right\}$$

é um conjunto fundamental de soluções do sistema linear homogéneo

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}\,.$$

A *solução geral* do sistema é então dada por:

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{l_1 t}\underline{v}^{(1)} + c_2 e^{l_2 t}\underline{v}^{(2)} + \ldots + c_n e^{l_n t}\underline{v}^{(n)}$$

em que $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são constantes.

Exemplo

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 & x_1(0) = 1 \\ x_2' = 2x_1 + x_2 & x_2(0) = 3 \end{cases}$$

Na forma matricial, o sistema é escrito como:

$$\underline{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\underline{x} \qquad \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

A solução geral vai ser uma combinação linear de duas soluções particulares linearmente independentes:

$$\underline{x} = c_1\underline{x}^{(1)} + c_2\underline{x}^{(2)}\,.$$

Essas soluções particulares terão a forma:

$$\underline{x}^{(i)} = c_1 e^{l_i t}\underline{v}^{(i)},$$

em que l_i é um valor próprio e $\underline{v}^{(i)}$ é o vector próprio correspondente.

O primeiro passo consiste assim em encontrar os valores próprios da matriz de coeficientes:

$$\left|\underline{\underline{A}} - l\,\underline{\underline{I}}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-l & 2 \\ 2 & 1-l \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \ (1-l)^2 - 4 = 0 \Rightarrow \ l_1 = -1, \ \ l_2 = 3$$

Seguidamente, vamos encontrar os vectores próprios correspondentes:

$$(\underline{\underline{A}} - l\,\underline{\underline{I}})\underline{v} = \underline{0}$$

Para o primeiro valor próprio, $l_1 = -1$:

$$\begin{bmatrix} 1-(-1) & 2 \\ 2 & 1-(-1) \end{bmatrix} \underline{v} = \underline{0}\,.$$

Os elementos de $\underline{v}$ são assim obtidos do sistema linear algébrico:

$$\begin{cases} 2v_1 + 2v_2 = 0 \\ 2v_1 + 2v_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \ v_1 = -v_2$$

Logo, o primeiro vector próprio deverá ter a forma:

$$\underline{v}^{(1)} = \begin{bmatrix} -v_2 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

Vamos assumir $v_2 = 1$:

$$\underline{v}^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para o segundo valor próprio, $l_2 = 3$:

$$\begin{bmatrix} 1-3 & 2 \\ 2 & 1-3 \end{bmatrix} \underline{v} = \underline{0}$$

$$\begin{cases} -2v_1 + 2v_2 = 0 \\ 2v_1 - 2v_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \ v_1 = -v_2$$

$$\underline{v}^{(2)} = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Podemos agora construir a solução geral:

$$\underline{x} = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

e aplicar as condições iniciais:

$$t=0 \;\Rightarrow\; \underline{x}_0 = c_1 e^{-0}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} + c_2 e^{3\times 0}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 + c_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow\; c_1 = 1,\;\; c_2 = 2$$

Assim, a solução particular deste problema é:

$$\underline{x} = e^{-t}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} + 2e^{3t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -e^{-t} + 2e^{3t} \\ x_2 = e^{-t} + 2e^{3t} \end{cases}.$$

Valores próprios complexos

Pode suceder que existam *raízes complexas* do polinómio característico, obtendo-se assim valores próprios que são complexos conjugados:

$$l_1 = a + ib$$
$$l_2 = a - ib$$

Os vectores próprios correspondentes serão então do tipo:

$$\underline{v}^{(1)} = \underline{a} + i\underline{b}$$
$$\underline{v}^{(2)} = \underline{a} - i\underline{b}$$

Uma solução particular correspondente ao valor próprio l_1 e ao vector próprio $\underline{v}^{(1)}$ será:

$$e^{lt}\underline{v} = e^{(a+bi)t}(\underline{a}+i\underline{b}) = e^{at}\left[\cos(bt) + i\sin(bt)\right](\underline{a}+i\underline{b})$$

$$= e^{at}\left[\cos(bt)\underline{a} + i\cos(bt)\underline{b} + i\sin(bt)\underline{a} - \sin(bt)\underline{b}\right]$$

$$= e^{at}\left[\cos(bt)\underline{a} - \sin(bt)\underline{b} + i\left(\sin(bt)\underline{a} + \cos(bt)\underline{b}\right)\right]$$

$$= e^{at}\left[\cos(bt)\underline{a} - \sin(bt)\underline{b}\right] + ie^{at}\left[\sin(bt)\underline{a} + \cos(bt)\underline{b}\right]$$

Esta solução é composta por duas funções, $e^{at}\left[\cos(bt)\underline{a} - \sin(bt)\underline{b}\right]$ e $e^{at}\left[\sin(bt)\underline{a} + \cos(bt)\underline{b}\right]$, as quais, conforme se pode facilmente demonstrar, são elas próprias soluções particulares linearmente independentes do sistema. Sendo assim, poderemos usá-las como as duas soluções particulares de que necessitamos para construir a solução geral:

$$\underline{x}^{(1)} = e^{at}\left[\cos(bt)\underline{a} - \sin(bt)\underline{b}\right]$$
$$\underline{x}^{(2)} = e^{at}\left[\sin(bt)\underline{a} + \cos(bt)\underline{b}\right]$$

Exemplo

$$\underline{x}' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} \qquad \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Vamos começar por calcular os valores próprios:

$$\begin{vmatrix} (2-l) & -1 & 1 \\ 1 & (0-l) & 1 \\ -2 & 0 & (-1-l) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \; -l^3 + l^2 - l + 1 = 0$$

$$l_1 = 1, \quad l_2 = i, \quad l_3 = -i$$

$l_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 2-1 & -1 & 1 \\ 1 & 0-1 & 1 \\ -2 & 0 & -1-1 \end{bmatrix} \underline{v} = \underline{0}$$

$$\begin{cases} v_1 - v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 - v_2 + v_3 = 0 \\ -2v_1 - 2v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = 0 \\ v_1 = -v_3 \end{cases}$$

$$\underline{v}^{(1)} = \begin{bmatrix} -v_3 \\ 0 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}^{(1)} = e^{l_1 t} \; \underline{v}^{(1)} = e^t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$l_2 = i$

$$\begin{bmatrix} 2-i & -1 & 1 \\ 1 & 0-i & 1 \\ -2 & 0 & -1-i \end{bmatrix} \underline{v} = \underline{0}$$

$$\begin{cases} (2-i)v_1 - v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 - iv_2 + v_3 = 0 \\ -2v_1 - (1+i)v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = v_1 \\ v_1 = -\frac{1}{2}(1+i)v_3 \end{cases}$$

$$\underline{v}^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(1+i)v_3 \\ -\frac{1}{2}(1+i)v_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-i \\ -1-i \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{l_2 t}\underline{v}^{(2)} = e^{it}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \ldots$$

$$\ldots = \left[\cos(t)\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \sin(t)\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right] + i \left[\sin(t)\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \cos(t)\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right]$$

Logo:

$$\underline{x}^{(2)} = \cos(t)\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \sin(t)\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}^{(3)} = \sin(t)\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \cos(t)\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Note que, se utilizássemos o valor próprio $l_3 = -i$, chegaríamos a um resultado idêntico.

A solução geral será assim:

$$\underline{x} = c_1\underline{x}^{(1)} + c_2\underline{x}^{(2)} + c_3\underline{x}^{(3)} =$$

$$= c_1 e^t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\left(\cos(t)\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \sin(t)\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + c_3\left(\sin(t)\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \cos(t)\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

Ou seja:

$$\begin{cases} x_1 = -c_1 e^t + c_2\left(-\cos(t) + \sin(t)\right) + c_3\left(-\sin(t) - \cos(t)\right) \\ x_2 = c_2\left(-\cos(t) + \sin(t)\right) + c_3\left(-\sin(t) - \cos(t)\right) \\ x_3 = c_1 e^t + c_2\left(2\cos(t)\right) + c_3\left(2\sin(t)\right) \end{cases}$$

Valores próprios de multiplicidade superior a 1.

Vectores próprios generalizados.

O polinómio característico pode também ter raízes (valores próprios) de *multiplicidade superior a 1*. Nesse caso, não se obtêm directamente n vectores próprios linearmente independentes. As soluções particulares linearmente independentes que faltam para construir a solução geral são geradas recorrendo a *vectores próprios generalizados*, determinados segundo a seguinte expressão:

$$(\underline{\underline{A}} - l\,\underline{\underline{I}})\underline{u} = \underline{v}\ ,$$

em que $\underline{u}$ é o *vector próprio generalizado* associado ao vector próprio $\underline{v}$. A solução particular correspondente é escrita da seguinte forma:

$$\underline{x} = e^{lt}(\underline{u} + t\underline{v})\ .$$

b) Sistemas lineares não homogéneos

A solução geral de um sistema não homogéneo obtém-se de forma análoga à de uma EDO linear não homogénea:

Teorema

Solução geral de um sistema linear não homogéneo

Se $\underline{x}_p$ for uma solução particular de

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{\underline{A}}\underline{x} + \underline{f}(t)$$

num intervalo I, e $\underline{x}^{(1)}(t), \underline{x}^{(2)}(t), \ldots, \underline{x}^{(n)}(t)$ forem *n soluções particulares, linearmente independentes, do sistema homogéneo correspondente*, então a *solução geral* do sistema não homogéneo pode ser escrita como:

$$\underline{x}(t) = \underline{x}_h + \underline{x}_p = c_1\underline{x}^{(1)}(t) + c_2\underline{x}^{(2)}(t) + \ldots + c_n\underline{x}^{(n)}(t) + \underline{x}_p(t)$$

em que $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são constantes.

Para encontrar uma solução particular, $\underline{x}_p$, do sistema não homogéneo, iremos usar a versão matricial do já conhecido método de variação de parâmetros (ver Secção 5):

Método de variação de parâmetros

Já conhecemos a solução geral do sistema homogéneo correspondente:

$$\underline{x}_h = c_1 \underline{x}^{(1)} + c_2 \underline{x}^{(2)} + \ldots + c_n \underline{x}^{(n)} = \left[\underline{x}^{(1)} \, \underline{x}^{(2)} \ldots \quad \underline{x}^{(n)} \right] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \underline{\underline{X}}\, \underline{c}$$

em que $\underline{\underline{X}}$ é a chamada *matriz fundamental* (as suas colunas são os vectores $\underline{x}^{(i)}$ - soluções particulares do sistema homogéneo). O método de variação de parâmetros baseia-se nesta solução geral para representar a solução particular do sistema não homogéneo, substituindo as constantes por funções desconhecidas de t:

$$\underline{x}_p = \underline{\underline{X}}\, \underline{u}(t) \,.$$

Para determinar o vector $\underline{u}(t)$, vamos substituir a solução proposta no sistema não homogéneo:

$$\frac{d(\underline{\underline{X}}\,\underline{u})}{dt} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}}\,\underline{u} + \underline{f}$$

$$\underline{\underline{X}}'\underline{u} + \underline{\underline{X}}\,\underline{u}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}}\,\underline{u} + \underline{f}$$

$$\left(\underline{\underline{X}}' - \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}} \right) \underline{u} + \underline{\underline{X}}\,\underline{u}' = \underline{f} \,.$$

Uma vez que todas as colunas da matriz $\underline{\underline{X}}$ são soluções particulares do sistema homogéneo, então $\underline{\underline{X}}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}}$ e, na equação anterior, podemos fazer $\underline{\underline{X}}' - \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}} = \underline{0}$, ficando então:

$$\underline{\underline{X}}\,\underline{u}' = \underline{f} \,.$$

Este é o sistema algébrico que nos permitirá determinar $\underline{u}$.

Exemplo

$$\underline{x}' = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$$

Primeiro, resolvemos o sistema homogéneo correspondente:

$\underline{x}_h = ?$

$$\left| \underline{\underline{A}} - l\, \underline{\underline{I}} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3-l & 1 \\ 2 & 1-l \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \quad l^2 - 5l + 4 = 0 \Rightarrow \quad l_1 = 1, \quad l_2 = 4$$

$l_1 = 1$

$$(\underline{\underline{A}} - l\,\underline{\underline{I}})\underline{v} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} 3-1 & 1 \\ 2 & 2-1 \end{bmatrix} \underline{v} = \underline{0}$$

$$\begin{cases} 2v_1 + v_2 = 0 \\ 2v_1 + v_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad v_2 = -2v_1$$

$$\underline{v}^{(1)} = \begin{bmatrix} v_1 \\ -2v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$l_2 = 4$

$$\begin{bmatrix} 3-4 & 1 \\ 2 & 2-4 \end{bmatrix} \underline{v} = \underline{0}$$

$$\begin{cases} -v_1 + v_2 = 0 \\ 2v_1 - 2v_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad v_2 = v_1$$

$$\underline{v}^{(2)} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A solução geral do sistema homogéneo é então:

$$\underline{x}_h = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & e^{4t} \\ -2e^t & e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{X}}\,\underline{c}$$

Resta agora encontrar uma solução particular do sistema não homogéneo:

$$\underline{x}_p = \underline{\underline{X}}\,\underline{u}(t)\,.$$

em que $\underline{u}(t)$ é dado por:

$$\underline{\underline{X}}\,\underline{u}' = \underline{f}\,.$$

Resolvendo pela regra de Cramer para u_1:

$$\begin{bmatrix} e^t & e^{4t} \\ -2e^t & e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} e^t & e^{4t} \\ -2e^t & e^{4t} \end{vmatrix} = 3e^{5t}$$

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} t & e^{4t} \\ t & e^{4t} \end{vmatrix}}{3e^{5t}} = 0 \Rightarrow \ u_1 = C$$

Como estamos à procura de apenas uma solução particular, podemos escolher o valor mais conveniente para as constantes de integração, ou seja, fazemos $C = 0$:

$$u_1 = 0 .$$

E para u_2:

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^t & t \\ -2e^t & t \end{vmatrix}}{3e^{5t}} = te^{-4t} \Rightarrow u_2 = -\left(\frac{t}{4} + \frac{1}{16} \right) e^{-4t} .$$

A solução particular do sistema não homogéneo fica então:

$$\underline{x}_p = \underline{\underline{X}}\,\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} e^t & e^{4t} \\ -2e^t & e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\left(t/4 + 1/16 \right) \ e^{-4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t/4 - 1/16 \\ -t/4 - 1/16 \end{bmatrix}$$

E a *solução geral* do sistema não homogéneo:

$$\underline{x} = \underline{x}_h + \underline{x}_p = \begin{bmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{4t} \\ -2c_1 e^t + c_2 e^{4t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t/4 - 1/16 \\ -t/4 - 1/16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{4t} - t/4 - 1/16 \\ -2c_1 e^t + c_2 e^{4t} - t/4 - 1/16 \end{bmatrix}$$

Sumário da Secção 7

- Redução de uma EDO linear de ordem n a um sistema de n EDOs lineares de primeira ordem
- Método de eliminação
- Método matricial
  - Sistemas homogéneos
    - Construção da solução geral a partir dos valores e vectores próprios
    - Valores próprios complexos
    - Valores próprios com multiplicidade superior a 1
  - Sistemas não-homogéneos
    - Método da variação de parâmetros