Seção 17: Séries de Fourier

Funções Periódicas

Definição. Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é *periódica de período* P, ou ainda, mais resumidamente, $P-$*periódica* se $f(x+P) = f(x)$ para todo x.

Note que só definimos função periódica se o domínio da função for todo $\mathbb{R}$. Portanto se o domínio de uma função não for todo $\mathbb{R}$, não faz nem sentido perguntar se ela é periódica.

Exemplo. A função $f(x) = \operatorname{sen} x$ é $2\pi-$periódica. A função $f(x) = \cos ax$ é $\dfrac{2\pi}{a}-$periódica.

Observação. Se uma função $f(x)$ é $P-$periódica, então $f(x+P) = f(x)$ para todo x. Substituindo x por $x+P$, temos

$$f(x+2P) = f\big((x+P)+P\big) = f(x+P) = f(x)$$

para todo x. Logo, se $f(x)$ é $P-$periódica, então $f(x)$ tamém é $2P-$periódica. Pelo mesmo argumento, f também é $3P-$periódica. De maneira semelhante se obtém que $f(x)$ também é $nP-$periódica, para todo n. Portanto se existir período, ele não é único. O mais interessante é determinar o menor período de uma função.

Operações com funções periódicas

Teorema 1. Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções com um mesmo período P, e se c é um número real, então $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$, $cf(x)$ e $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ são funções $P-$periódicas.

Demonstração: Vamos provar uma delas. As outras são semelhantes. Seja $h(x)$ o produto $h(x) = f(x)g(x)$. Então,

$$h(x+P) = f(x+P)g(x+P) = f(x)g(x) = h(x),$$

mostrando que, de fato, h é $P-$periódica.

Exemplo. As funções $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$ são periódicas com o mesmo período 2π. Portanto $f(x)g(x)$ e $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ são $2\pi-$periódicas. Na verdade,

$$f(x)g(x) = \cos x \operatorname{sen} x = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} \quad \text{e} \quad f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \tan x$$

são até $\pi-$periódicas. Pela observação feita no parágrafo acima, sendo $\pi-$periódicas, são também $2\pi-$periódicas, o que está de acordo com o que diz o Teorema 1.

Teorema 2. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções com períodos distintos P_1 e P_2, respectivamente. Se a razão $\dfrac{P_1}{P_2} = \dfrac{m}{n}$ for um número racional, então $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$, $cf(x)$ e $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ são funções periódicas. Mais precisamente essas funções têm período $nP_1 = mP_2$.

Demonstração: Se $\dfrac{P_1}{P_2} = \dfrac{m}{n}$ é um número racional, então $nP_1 = mP_2$. Chamemos de P o valor comum $P = nP_1 = mP_2$. Então $f(x)$ e $g(x)$ são ambas periódicas com o mesmo período $nP_1 = mP_2$. Pelo Teorema 1, temos que $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x)g(x)$, $cf(x)$ e $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ são funções $P-$periódicas.

Se a razão $\dfrac{P_1}{P_2}$ entre os períodos for um número irracional, as novas funções obtidas por soma, produto, diferença e quociente em geral não são periódicas.

Exemplo. As funções $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \operatorname{sen}(1.1\,x)$ são periódicas. O período de f é $P_1 = 2\pi$. O período P_2 de g é tal que

$$g(x + P_2) = \operatorname{sen}\big(1.1\,(x + P_2)\big) = \operatorname{sen}\big(1.1\,x + 1.1\,P_2\big) = \operatorname{sen}(1.1\,x) = g(x).$$

Então, devemos ter $1.1 \cdot P_2 = 2\pi$, ou seja, $P_2 = \dfrac{2\pi}{1.1}$. Estamos na situação em que o quociente dos períodos é o número racional

$$\frac{P_1}{P_2} = 1.1 = \frac{11}{10}.$$

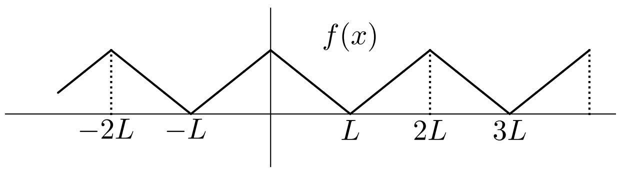
Temos $10P_1 = 11P_2 = 20\pi$. Portanto a soma $f(x) + g(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(1.1\,x)$ tem período 20π, que é bem maior do que o período de cada uma delas.

Exemplo. A função

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) \tag{1}$$

é $2L-$periódica, pois é uma soma de funções $2L-$periódicas.

O objetivo desta sessão é fazer justamente o contrário. Dada uma função $f(x)$ periódica, gostaríamos de obter para ela uma representação como superposição de senóides. Não será sempre possível obter estas representação como soma finita. Por exemplo, a função $f(x)$ cujo gráfico é



não pode ser escrita como uma soma finita do tipo (1), pois uma soma finita de funções deriváveis deveria ser uma derivável. Mas a função $f(x)$ não é derivável, pois seu gráfico é uma curva que não adimite reta tangente em todos os pontos. Para representar a função $f(x)$ como soma de funções periódicas simples, vamos ter que somar uma infinidade de parcelas:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right). \tag{2}$$

A expressão (2) é chamada de uma *série de Fourier*. Note que já mostramos que cada termo $a_n \cos \dfrac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \dfrac{n\pi x}{L}$ pode ser escrito de uma maneira mais simples, como

$$a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L} + \phi_n \right).$$

As senóides são os exemplos mais simples de função periódicas. Expandir uma função em série de Fourier é representá-la como superposição de senóides deslocadas

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L} + \phi_n\right). \tag{3}$$

Ortogonalidade.

Definição. Uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é dita *contínua por partes* se tem no máximo um número finito de pontos de descontinuidade $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ e em cada um destes pontos de descontinuidade existem os limites laterais $f(t_i + 0) = \lim_{x \to t_i^+} f(x)$ e $f(t_i - 0) = \lim_{x \to t_i^-} f(x)$.

Diremos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *contínua por partes* se em cada intervalo $[a,b]$ a função tem no máximo um número finito de pontos de descontinuidade e em cada uma deles existem os limites laterais.

Definição. Fixado um intervalo $[a,b]$, seja $\mathcal{V}$ o conjunto de todas as funções $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua por partes

$$\mathcal{V} = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ é contínua por partes}\}.$$

$\mathcal{V}$ é um espaço vetorial, a soma de elementos de $\mathcal{V}$ está em $\mathcal{V}$, valendo o mesmo para o produto de um elemento de $\mathcal{V}$ por um escalar. No espaço vetorial $\mathcal{V}$ temos um produto interno. O produto interno de duas funções é definido por

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx. \tag{4}$$

As funções são ditas ortogonais se $\langle f(x), g(x)\rangle = 0$, ou seja, se $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$.

Note que os elementos de $\mathcal{V}$ são funções. Estas funções estão sendo pensadas como "vetores" de um espaço vetorial $\mathcal{V}$ e, como tal, podemos falar em produto interno e também em norma (ou comprimento de um vetor), definida por

$$||f|| = \langle f(x), f(x)\rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b \left|f(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

Exemplo. Para nós o exemplo mais importante será quando $[a,b] = [-L, L]$,

$$\mathcal{V} = \{f : \left[-L, L\right] \to \mathbb{R} \mid f \text{ é contínua por partes}\} \qquad \text{e} \qquad \langle f(x), g(x)\rangle = \int_{-L}^{L} f(x)g(x)\,dx.$$

Neste caso um conjunto de funções ortogonais é dado por

$$\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi x}{L}, \cos\frac{2\pi x}{L}, \ldots, \cos\frac{n\pi x}{L}, \ldots, \operatorname{sen}\frac{\pi x}{L}, \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{L}, \ldots, \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}, \ldots \tag{6}$$

De fato, vamos verificar que estas funções são ortogonais entre si. Começamos mostrando que cada um destes senos é ortogonal a qualquer dos cossenos. Tomamos as fórmulas da trigonometria

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a \\ \operatorname{sen}(a-b) &= \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a \end{aligned}$$

Somando estas duas igualdade obtemos

$$\operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2}\big[\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)\big].$$

Em particular, para $a = \dfrac{n\pi x}{L}$ e $b = \dfrac{m\pi x}{L}$, temos

$$\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\frac{(n+m)\pi x}{L} + \operatorname{sen}\frac{(n-m)\pi x}{L}\right].$$

Integrando,

$$\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\frac{(n+m)\pi x}{L}\,dx + \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\frac{(n-m)\pi x}{L}\,dx\,.$$

É imediato ver que as duas integrais do lado direito valem 0. Fica assim provada a ortogonalidade entre dois quaisquer senos.

Em seguida usamos as fórmulas

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a\cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b\\ \cos(a-b) &= \cos a\cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b\end{aligned}\tag{7}$$

Somando as duas obtemos

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}\big[\cos(a+b) + \cos(a-b)\big].$$

Em particular, para $a = \dfrac{n\pi x}{L}$ e $b = \dfrac{m\pi x}{L}$, temos

$$\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L} = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{(n+m)\pi x}{L} + \cos\frac{(n-m)\pi x}{L}\right].$$

Integrando,

$$\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\cos\frac{(n+m)\pi x}{L}\,dx + \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\cos\frac{(n-m)\pi x}{L}\,dx\,.$$

Para quaisquer m e n,

$$\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\cos\frac{(n+m)\pi x}{L}\,dx = \frac{L}{2(n+m)\pi}\operatorname{sen}\frac{(n+m)\pi x}{L}\Bigg|_{x=-L}^{x=L} = 0.$$

Para $n \neq m$,

$$\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\cos\frac{(n-m)\pi x}{L}\,dx = \frac{L}{2(n-m)\pi}\operatorname{sen}\frac{(n-m)\pi x}{L}\Bigg|_{x=-L}^{x=L} = 0.$$

Mas para $m = n$,

$$\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\cos\frac{(n-m)\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}1\,dx = L.$$

Portanto,

$$\left\langle\cos\frac{n\pi x}{L},\cos\frac{m\pi x}{L}\right\rangle = \int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = \begin{cases}0, & \text{se } n\neq m\\ L, & \text{se } n = m\end{cases}\tag{8}$$

Subtraindo as duas igualdades em (7) e procedendo de maneira análoga, obtemos

$$\left\langle \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}, \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L} \right\rangle = \int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\, dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m \\ L, & \text{se } n = m \end{cases} \tag{9}$$

Precisaremos ainda de

$$\left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{L}{2}. \tag{10}$$

Fórmulas de Euler. A vantagem de se usar um sistema ortogonal de funções para expandir uma dada função $f(x)$, é que os coeficientes podem ser facilmente calculados. De fato, suponhamos que $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \ldots\}$ seja um sistema ortogonal de funções no intervalo $[a, b]$, isto é

$$\langle \varphi_n(x), \varphi_m(x) \rangle = \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\, dx = 0, \qquad \text{se } n \neq m.$$

Se expandimos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \tag{11}$$

os coeficientes c_n podem ser calculados da seguinte maneira. Primeiro multiplicamos (11) por $\varphi_m(x)$,

$$f(x)\varphi_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)\varphi_m(x).$$

Integrando os dois lados e usando que a intergral da soma é a soma das intergrais, temos

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)\, dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)\varphi_m(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\, dx. \tag{12}$$

Mas, pela ortogonalidade, $\displaystyle\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\, dx = 0$ para todos os valores de n, exceto para $n = m$. Portanto, a última soma da igualdade (12) se reduz a uma única parcela não nula,

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)\, dx = c_m \int_a^b \varphi_m(x)\varphi_m(x)\, dx.$$

Logo,

$$c_m = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_m(x)\, dx}{\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_m(x)\, dx} = \frac{\langle f(x), \varphi_m(x) \rangle}{\|\varphi_m(x)\|^2}.$$

Trocando a letra m por n, obtemos

$$c_n = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\, dx}{\displaystyle\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_n(x)\, dx}. \tag{13}$$

O exemplo mais importante de sistema ortogonal de funções é dado por (6). Neste caso, a expansão (11) de uma função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ toma a forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \right) \tag{14}$$

e é chamada de *série de Fourier* da função $f(x)$. Em vista das expressões (8),(9) e (10), a expressão análoga a (13) para os coeficientes é

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad \text{e} \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,dx. \tag{15}$$

As expressões (15) são conhecidas como Fórmulas de Euler. Note que a expressão para a_0 é

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx,$$

estando, portanto, incluída em (15), para $n = 0$.

Séries de Fourier

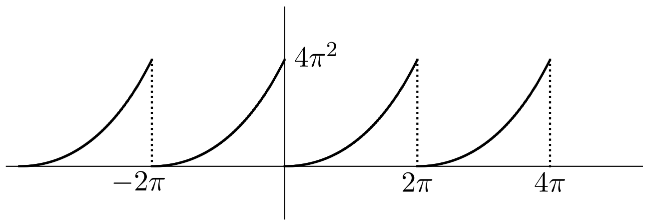
Notação. Para uma função contínua por partes, indicaremos por $f(x+0)$ e $f(x-0)$ os limites laterais

$$f(x+0) = \lim_{y\to x^+} f(x) \qquad \text{e} \qquad f(x-0) = \lim_{y\to x^-} f(x).$$

Teorema de Fourier. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função $2L-$periódica contínua por partes e possuindo uma derivada primeira $f'(x)$ também contínua por partes (em cada intervalo limitado, pode existir um número finito de pontos onde a função não é derivável, mas nestes pontos devem existir os limites laterais da derivada). Sejam a_n e b_n as seqüências definidas pelas fórmulas (15) e consideremos a série de Fourier (14) da função $f(x)$. Então a série de Fourier de $f(x)$ converge para todo valor de x e sua soma vale

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\right) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \text{ é ponto de continuidade} \\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & \text{se } x \text{ é pt. de descontinuidade} \end{cases}$$

Exemplo. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $2\pi-$periódica e tal que $f(x) = x^2$ para $0 < x < 2\pi$.



Vamos ter

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos nx + b_n\,\text{sen}\,nx\big).$$

Para calcular os coeficientes deveríamos integrar

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$

Como $f(x) = x^2$, para $0 < x < \pi$ mas tem uma definição diferente para $-\pi < x < 0$, teríamos que decompor esta integral na soma de duas, uma para x entre 0 e π e a outra entre $-\pi$ e 0. Em vez disto, fica mais fácil deslocar o intervalo e calcular

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$

É possível fazer isto pois o integrando é periódico e seu período coincide com o comprimento do intervalo de integração. Portanto,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2 \operatorname{sen} nx}{n} + \frac{2x\cos nx}{n^2} - \frac{2\operatorname{sen} nx}{n^3}\right]_{x=0}^{x=2\pi} = \frac{4}{n^2}\,.$$

Analogamente,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \operatorname{sen} nx \, dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2 \cos nx}{n} + \frac{2x\operatorname{sen} nx}{n^2} + \frac{2\cos nx}{n^3}\right]_{x=0}^{x=2\pi} = -\frac{4\pi}{n}\,.$$

e

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8\pi^2}{3}\,.$$

Então,

$$f(x) = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi \operatorname{sen} nx}{n}\right).$$

Em particular, $x = 0$ é um ponto de descontinuidade, no qual os limites laterais valem $f(0+) = 0$ e $f(0-) = 4\pi^2$. Assim,

$$\frac{4\pi^2 + 0}{2} = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,,$$

de onde segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{16}$$

Para $x = \pi$, obtemos

$$\pi^2 = f(\pi) = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Segue que

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \cdots$$

Observação. No estudo do Cálculo, usando os critérios de convergência de séries, se mostra que a série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, mas não se tem idéia nenhuma do valor da soma. A igualdade (16) é um resultado famoso, que foi obtido por Euler. O fato de que aqui ela foi deduzida a partir de uma aplicação do Teorema de Fourier mostra a força deste teorema. É muito surpreendente a relação desta série com o número π. Em exemplos futuros veremos que as séries $\sum \frac{1}{n^4}$ e $\sum \frac{1}{n^6}$ também estão relacionadas com π.

Neste curso não faremos a demonstração do Teorema de Fourier, mas num curso mais avançado ela deve ser feita.

Funções pares e ímpares

Definição. Uma função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$, definida em um intervalo simétrico em relação à origem, é dita uma *função par* se

$$f(-x) = f(x), \text{ para todo } x. \tag{17}$$

Note que a condição (17) diz que dado um ponto $(x, f(x))$ no gráfico da função, o ponto simétrico dele em relação ao eixo Y, isto é, o ponto $(-x, f(x))$, também é um ponto do gráfico. Portanto, a função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é par quando seu gráfico for simétrico em relação ao eixo Y.

Exemplo. Para n inteiro par, $f(x) = x^n$ é uma função par. As funções $g(x) = |x|$ e $h(x) = \cos x$ também são funções pares.

Observação. Segue imediatamente da simetria em relação o eixo Y que se $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é par, então

$$\int_{-L}^{L} f(x)\, dx = 2 \int_{0}^{L} f(x)\, dx.$$

Definição. Uma função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$, definida em um intervalo simétrico em relação à origem, é dita uma *função ímpar* se

$$f(-x) = -f(x), \text{ para todo } x. \tag{18}$$

Note que a condição (18) diz que dado um ponto $(x, f(x))$ no gráfico da função, o ponto simétrico dele em relação à origem $(-x, -f(x))$ também é um ponto do gráfico. Portanto, a função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é ímpar quando seu gráfico é simétrico em relação à origem.

Exemplo. Para n inteiro ímpar, $f(x) = x^n$ é uma função ímpar. A função $g(x) = \operatorname{sen} x$ também é função ímpar.

Observação. Segue imediatamente da simetria em relação à origem que se $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é ímpar, então

$$\int_{-L}^{L} f(x)\, dx = 0.$$

Série de Fourier de uma função par. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for par e $2L-$periódica. É fácil ver que o produto de uma função par $f(x)$ por uma função ímpar $g(x)$ é ímpar. De fato, como $f(-x) = f(x)$ e $g(-x) = g(x)$, segue que $f(-x)g(-x) = -f(x)g(x)$. Portanto $f(x) \operatorname{sen} \dfrac{n\pi x}{L}$ é ímpar. Então,

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx = 0.$$

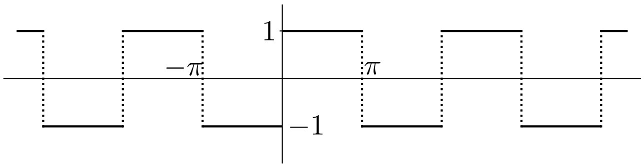
Portanto a série de Fourier de uma função par não contém nenhum dos senos, que são funções ímpares. Contém somente os cossenos e a constante, que são funções pares. Além disto, como o produto de funções pares é par, $f(x) \cos \dfrac{n\pi x}{L}$ é par. Logo,

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx\,, \qquad \text{e} \qquad a_n = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x)\, dx.$$

Série de Fourier de uma função ímpar. Analogamente, se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ for ímpar e $2L-$periódica, sua série de Fourier só vai conter os senos, que são funções ímpares também e não vai conter nenhum dos cossenos nem a constante, que são funções pares. Além disto,

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx\,.$$

Exemplo. Consideremos a função dada pelo gráfico abaixo.



Esta função é ímpar é $2\pi-$periódica. Então

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx\,,$$

com

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\operatorname{sen} nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} nx\,dx = -\frac{2}{\pi}\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} = \frac{2\big(1-(-1)^n\big)}{n}\,.$$

Então,

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 0, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Logo,

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \cdots\right).$$

Em particular, para $x = \dfrac{\pi}{2}$, obtemos

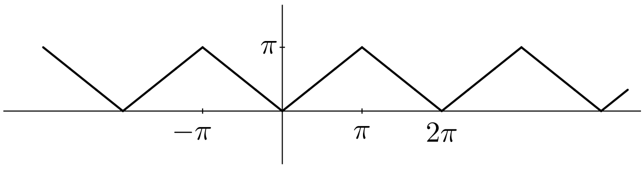
$$1 = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right),$$

ou seja,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \tag{19}$$

Obs. A igualdade (19) também é um resultado famoso e foi obtida pela primeira vez por Leibniz.

Exemplo. Consideremos $f(x)$ a função $2\pi-$periódica dada pelo gráfico abaixo



Como o gráfico tem simetria em relação ao eixo Y, esta função é par. Então $b_n = 0$ e

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos x\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\operatorname{sen} nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_{x=\pi}^{x=\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{\cos n\pi - 1}{n^2} = \frac{2\big((-1)^n - 1\big)}{n^2\pi} = \begin{cases} -\dfrac{4}{n^2\pi}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 0, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Também

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \pi.$$

Portanto

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}.$$

Em particular para $x = 0$, obtém-se o resultado surpreendente

$$0 = f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\right),$$

ou seja,

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}. \tag{20}$$

Um fato curioso é que a partir de (20) podemos novamente obter a soma da série (16). De fato, pondo

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

queremos descobrir o valor de S. Agrupamos os termos da seguinte forma

$$S = \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots\right).$$

Usando (20), temos

$$S = \frac{\pi^2}{8} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots\right).$$

Colocando $\frac{1}{4}$ em evidência no parênteses acima, temos

$$S = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right),$$

ou seja,

$$S = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}S.$$

Segue que $S = \frac{\pi^2}{6}$, isto é,

$$\boxed{\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}$$

Série de Fourier–Cosseno e Série de Fourier–Seno

As séries de Fourier estudadas acima servem para expandir uma função periódica. Mas servem também para expandir uma função $f : [-L, L] \longrightarrow \mathbb{R}$, cujo domínio não é todos os reais, mas é apenas um intervalo simétrico centrado em 0. De fato, uma função $f : [-L, L] \longrightarrow \mathbb{R}$ pode ter estendida como uma função $2L-$periódica definida em todos or reais.

Vamos passar a estudar agora uma outra situação. Agora nossa função vai estar definida apenas de $f : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$. Vamos primeiro estender seu domínio, definindo $f(x)$ também para $L \leq x < 0$. Existem infinitas maneiras de fazer isto, mas duas delas têm utilidade prática.

Estendendo como função par.
Tomamos o gráfico de $f : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$ e refletimos em relação ao eixo Y, ou seja, pondo $f(-x) = f(x)$, para $x \in [0, L]$. Agora temos $f : [-L, L] \longrightarrow \mathbb{R}$. Em seguida podemos ainda estender novamente o domínio e ter $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $2L-$periódica. Usando as séries de Fourier estudadas anteriormente, obtemos

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \qquad \text{com} \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx.$$

A expressão acima para $f(x)$ em série de Fourier, é válida para todo x real, mas interesa-no apenas os x para os quais a função estava inicialmente definida.

Conclusão: Podemos expandir funções $f : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$ em série

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad \text{para } 0 \leq x \leq L, \qquad \text{com} \ a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx.$$

Estendendo como função ímpar.
Tomamos o gráfico de $f : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$ e estendemos a função, tomando os pontos simétricos em relação à origem. Tem o mesmo efeito primeiro refletir o gráfico em relação ao eixo Y e novamente em relação ao eixo X. Analogamente temos

Conclusão: Podemos expandir funções $f : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$ em série

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad \text{para } 0 < x < L, \qquad \text{com} \ b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx.$$

Note que ao estendermos a função como ímpar, o ponto 0 necessariamente torna-se um ponto de descontinuidade, a menos que tivéssemos $f(0) = 0$. Por esta razão $x = 0$ foi excuído do intervalo de validade da igualdade acima. Da mesma forma estendendo como ímpar e depois como periódica, L se torna um ponto de descontinuidade também, sendo também excluído do intervalo de validade.

Exemplo. Consideremos a função $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Vamos obter para ela duas expansões.
Em série de cossenos:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x \operatorname{sen} nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right]_{x=0}^{x=\pi} = \begin{cases} -\dfrac{4}{n^2\pi^2}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 0, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Também

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x\, dx = \pi.$$

Portanto,

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}, \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

Em série de senos:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \operatorname{sen} nx\, dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x \cos nx}{n} + \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2} \right]_{x=0}^{x=\pi} = -\frac{2 \cos n\pi}{n} = \frac{2\,(-1)^{n-1}}{n}$$

Portanto,

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \operatorname{sen} nx}{n}, \quad (0 \leq x < \pi).$$

Note que a expansão acima é válida para $x = 0$. Isto se deve ao fato de que como $f(0) = 0$, $x = 0$ é um ponto de continuidade da extensão ímpar da função.

Temos assim duas expansões

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \operatorname{sen} nx}{n}.$$