Seção 18: Equação da Onda

Nesta seção começamos o estudo das equações diferenciais a derivadas parciais, abreviadamente EDP's. Começamos pela equação da onda. Um exemplo de situação em que a equação da onda da onda ocorre é no problema da corda vibrante.

Problema da corda vibrante. Consideremos uma corda (de um instrumento musical) esticada, submetida a uma certa tensão e presa pelas extremidades. A corda vai realizar oscilações livres (sem amortecimento) em torno de sua posição de equilíbrio, sujeita apenas à ação da força restauradora elástica, que tende a trazer a corda de volta à posição de equilíbrio. Embora não façamos aqui a dedução da equação da onda, vamos indicar as hipóteses sob as quais ela é válida e pode ser deduzida:

– a corda é homogênea constituída de um material flexível,

– o movimento se dá apenas em um plano,

– o movimento se cada partícula da corda é apenas na direção transversal, ou seja, perpendicular à posição de equilíbrio da corda,

– as oscilações são de pequena amplitude, de modo que podemos considerar que o comprimento da corda e, em conseqüência, a tensão não se alteram com a passagem do tempo.

Se L é o comprimento da corda, associamos coordenadas x, de 0 a L, a cada um de seus pontos. Seja $u(x,t)$ o deslocamento do ponto da corda de coordenada x no instante t. Consideramos que $u(x,t) > 0$ quando o ponto se desloca para cima e $u(x,t) < 0$ quando o ponto se desloca para baixo da posição de equilíbrio da corda.

Prova-se que a função de duas variáveis $u(x,t)$ satisfaz a EDP (equação diferencial parcial)

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \tag{1}$$

chamada de *equação da onda*. Embora não se faça aqui uma dedução da equação da onda, podemos ver que ela é razoável. De fato, $u_{tt}(x,t)$ é a aceleração no ponto x no instante t. A 2ª lei de Newton nos diz que essa aceleração é diretamente proporcional à força. Mas a única força que está agindo é a força restauradora elástica. É intuitivo que a força elástica é causada pela curvatura da corda. Como estamos considerando apenas o caso de oscilações de pequena amplitude, a derivada segunda u_{xx}, que é a taxa de variação da declividade u_x da corda, dá uma boa aproximação da curvatura. Portanto, a aceleração u_{tt} é diretamente proporcional à curvatura u_{xx}. É exatamente isto o que afirma a equação da onda (1).

Ao contrário do que fizemos com as EDO's, não vamos estudar aqui uma EDP sozinha. Por exemplo, ao estudarmos a equação da onda, nossa abordagem não será a de procurar primeiro a solução geral, para depois aplicar outras condições. Vamos sempre encontar a solução da EDP que satisfaz também outras condições.

No caso da equação da onda, se a corda estiver presa nas extremidades $x = 0$ e $x = L$, nesses pontos o deslocamento vai ser 0. A função vai satisfazer às condições

$$u(0,t) = 0\,, \qquad u(L,t) = 0\,, \qquad \text{para todo } t \geq 0. \tag{2}$$

As condições (2) são chamadas de *condições de fronteira* ou também *condições de contorno*.

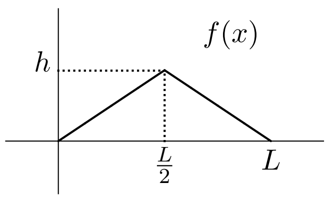
Além disto, como em qualquer problema mecânico, precisamos dar a posição e a velocidade iniciais. No caso, a posição e velocidade iniciais de qualquer ponto da corda. Portanto, precisam ser dadas duas funções $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ e $g : [0, L] \to \mathbb{R}$. Como essas duas funções, formamos as *condições iniciais*

$$u(x, 0) = f(x) \qquad \text{para todo } x \in [0, L]. \tag{3}$$

$$u_t(x, 0) = g(x) \qquad \text{para todo } x \in [0, L]. \tag{4}$$

Exemplo 1. Resolva o problema abaixo, representando oscilações em um corda com extremidades fixas que é dedilhada no ponto médio, partindo do repouso.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2\, u_{xx} \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$



Solução: Começamos procurando uma solução $u(x, t)$ da forma

$$u(x, t) = \varphi(x)\psi(t). \tag{5}$$

Fisicamente, as funções da forma (5) acima representam ondas estacionárias na corda, isto é, vibrações na corda em que apenas a amplitude, mas não o formato da corda, se altera com a passagem do tempo. Note que para uma oscilação na corda dada por (5), em um dado instante t_0 o formato da corda é dado pelo gráfico da função $x \longmapsto \alpha\varphi(x)$, onde α é o fator de amplitude $\alpha = \psi(t_o)$. Portanto, do ponto de vista físico, estamos procurando as ondas estacionárias na corda.

Substituindo (5) na equação a onda, temos

$$\varphi(x)\psi''(t) = c^2\varphi''(x)\psi(t).$$

Por divisão podemos separar as variáveis:

$$\frac{\psi''(t)}{c^2\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}. \tag{6}$$

O lado esquerdo de (6) depende apenas de t ao passo que o lado direito depende apenas de x. Portanto a única maneira de serem iguas é sendo a função constante. Poderíamos justificar isto dizendo: o lado esquerdo de (6) não depende de x. Mas por ser igual ao lado direito, também não depende de t. Logo não depende de nenuma das variáveis, isto é, é constante. Assim,

$$\frac{\psi''(t)}{c^2\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \lambda = \text{const.}$$

Obtemos então duas EDO's independentes,

$$\varphi''(x) = \lambda\varphi(x) \tag{7}$$

$$\psi''(t) = \lambda c^2\psi(t) \tag{8}$$

A condição de fronteira $u(0, t) = 0$ juntamente com $u(0, t) = \varphi(0)\psi(t)$ nos diz que

$$\varphi(0) = 0 \tag{9}$$

ou

$$\psi(t) = 0, \qquad \text{para todo } t.$$

Na eventualidade de $\psi(t) = 0$ para todo t, teríamos $u(x,t) = 0$ para todo x e para todo t. Esta é a solução trivial. Não estamos interessados nela. De antemão já sabíamos que seria uma solução de nossa equação diferencial. Não necessitamos fazer tudo isto para encontrá-la. Queremos encontrar as soluções não triviais.

Analogamente, da condição de fronteira $u(L,t) = 0$ segue que

$$\varphi(L) = 0 \tag{10}$$

Dentre as duas equações diferenciais (7) e (8), começamos com (7), pois para a função $\varphi(x)$ temos informações adicionais. Vamos estudar o problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} \varphi''(x) = \lambda\varphi(x) \\ \varphi(0) = 0, \quad \varphi(L) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Note que a incógnita no problema (11) é um par, uma função $\varphi(x)$ e um número λ. A equação diferencial do problema (11) tem como equação característica $k^2 - \lambda = 0$ (k é a variável da equação característica).

Caso 1: $\lambda > 0$. Então $\lambda = \mu^2$, com $\mu > 0$.
Neste caso a equação característica é $k^2 - \mu^2 = 0$ e, portanto, tem raízes reais $k = \pm\mu$. Então, as soluções da EDO são

$$\varphi(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}.$$

Aplicando a primeira condição de fronteira, obtemos

$$0 = \varphi(0) = A + B \quad \Longrightarrow \quad B = -A \quad \Longrightarrow \quad \varphi(x) = A(e^{\mu x} - e^{-\mu x}).$$

Aplicando a outra condição de fronteira, temos

$$0 = \varphi(L) = A(e^{\mu L} - e^{-\mu L}).$$

Como $e^{\mu L} - e^{-\mu L} \neq 0$, pois $e^{\mu L} > e^0 = 1$ e $e^{-\mu L} < e^0 = 1$, segue que $A = 0$. Portanto, $\varphi(x) = 0$ para todo x. Segue que $u(x,t) = 0$ para todo (x,t). Portanto no primeiro caso obtemos a solução trivial $u(x,t) = 0$, que não nos interessa. Já sabemos que a função constante $u(x,t) = 0$ é uma solução da equação da onda e das condições de fronteira. Não precisamos fazer isto tudo para descobri-la novamente.

Caso 2: $\lambda = 0$.
Neste caso, em (7) a EDO fica $\varphi''(x) = 0$. Então, $\varphi'(x) = A$ e $\varphi(x) = Ax + B$. A condição $\varphi(0) = 0$ nos diz que $B = 0$. Logo $\varphi(x) = Ax$. A condição $\varphi(L) = 0$ implica que $A = 0$ e, portanto que $\varphi(x) = 0$ é a solução trivial.

Caso 3: $\lambda < 0$. Então $\lambda = -\mu^2$, com $\mu > 0$.
Neste caso a equação característica é $k^2 + \mu^2 = 0$ e, portanto, tem raízes complexas $k = \pm i\mu$. As soluções da EDO são

$$\varphi(x) = A\cos\mu x + B\,\mathrm{sen}\,\mu x.$$

Aplicando as condições de fronteira, obtemos $0 = \varphi(0) = A$. Então,

$$\varphi(x) = B\,\mathrm{sen}\,\mu x.$$

Também $0 = \varphi(L) = B\,\mathrm{sen}\,\mu L$. Logo $B = 0$ ou $\mathrm{sen}\,\mu L = 0$. Se $B = 0$, então $\varphi(x) = 0$ é a solução trivial. Portanto para obtermos solução não trivial devemos ter $\mathrm{sen}\,\mu L = 0$, ou seja, μL da forma $\mu L = n\pi$, com n inteiro. Como $\mu > 0$, então

$$\mu = \frac{n\pi}{L}, \qquad \text{com} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Concluímos que as soluções não triviais de (11) são as funções

$$\varphi_n(x) = B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \qquad \text{com} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{12}$$

com os λ correspondentes dados por

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2. \tag{13}$$

Substituindo este valor de λ na equação diferencial (8), obtemos

$$\psi''(t) + \left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 \psi(t) = 0,$$

cuja solução geral é

$$\psi_n(t) = D_n \cos \frac{cn\pi t}{L} + E_n \operatorname{sen} \frac{cn\pi t}{L}. \tag{14}$$

Multiplicando as funções (12) e (14), obtemos

$$u_n(x,t) = \left(D_n \cos \frac{cn\pi t}{L} + E_n \operatorname{sen} \frac{cn\pi t}{L}\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{15}$$

que representa as ondas estacionárias na corda. A constante B_n é desnecessária, pois por multiplicação pode ser incorporada às constantes D_n e E_n. Note que as funções (15) satisfazem a equação diferencial (da onda) e as condições de fronteira, quaisquer que sejam as constantes D_n e E_n. Ainda não levamos em conta as duas condições iniciais. Antes disto, fazemos a superposição das funções dadas por (15), obtendo

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(D_n \cos \frac{cn\pi t}{L} + E_n \operatorname{sen} \frac{cn\pi t}{L}\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\,. \tag{16}$$

A equação da onda é uma equação linear homogênea, pois pode ser escrita na forma $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$. Segue que a soma de soluções também é solução. Como as u_n são soluções da equação da onda, segue que u dada por (16) também é. As condições de fronteira que estamos considerando também são homogêneas. Como para cada n, $u_n(0,t) = 0$, temos que $u(0,t) = 0$. Pela mesma razão, $u(L,t) = 0$. A idéia agora é ajustar as constantes D_n e E_n para que a função dada por (12) satisfaça também as condições iniciais.

Fazendo $t = 0$ em (16), temos

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

A linha acima nada mais é do que a representação da função $f(x)$ em série de senos. Portanto,

$$D_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx. \tag{17}$$

Derivando (16) em relação a t, obtemos

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{cn\pi}{L} D_n \operatorname{sen} \frac{cn\pi t}{L} + \frac{cn\pi}{L} E_n \cos \frac{cn\pi t}{L}\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Fazendo $t = 0$, segue

$$0 = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cn\pi}{L} E_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Mas a única representação da função constante igual a 0 em série de senos é com todos os coeficientes iguais a 0. Logo,

$$E_n = 0.$$

A solução de nosso problema é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos \frac{cn\pi t}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\,. \tag{18}$$

Para calcular a integral (17) temos que, em princípio, decompor na soma de duas integrais

$$D_n = \frac{2}{L}\left(\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2hx}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx + \int_{\frac{L}{2}}^{L} \frac{2h(L-x)}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx \right).$$

É perfeitamente possível calcular deste modo, mas vamos fazer uma observação que diminui muito o trabalho para calcular D_n. Assim como o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo Y, o gráfico da função $f(x)$ é simétrico em relação à reta $x = \frac{L}{2}$, ou seja, $f\big(\frac{L}{2} + x\big) = f\big(\frac{L}{2} - x\big)$. Vejamos se os senos também têm esse tipo de simetria. Para n ímpar isto é verdade, traçando os gráficos, verificamos que para n ímpar a função $g(x) = \operatorname{sen} \frac{nx}{L}$ satisfaz $g\big(\frac{L}{2} + x\big) = g\big(\frac{L}{2} - x\big)$. Portanto, o produto das duas tem o mesmo tipo de simetria, e em conseqüência, não é necessário integrar em todo o intervalo $[0, L]$. É suficiente integrar no intervalo $\big[0, \frac{L}{2}\big]$ e tomar o dobro da integral. Logo,

$$D_n = \frac{4}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2hx}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx, \qquad \text{para } n \text{ ímpar},$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
D_{2n+1} &= \frac{4}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2hx}{L} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{L}\, dx \\
&= \frac{8h}{L^2} \left[-\frac{L}{(2n+1)\pi} x \cos \frac{(2n+1)\pi x}{L} + \frac{L^2}{(2n+1)^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{L} \right]_0^{\frac{L}{2}} \\
&= \frac{8h}{(2n+1)^2\pi^2} \cdot \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi}{2} = \frac{8h(-1)^n}{(2n+1)^2\pi^2}\,.
\end{aligned}$$

Analogamente, para n par os senos têm uma simetria semelhante à de funções ímpares. Traçando os gráficos, verificamos que para n par a função $g(x) = \operatorname{sen} \frac{nx}{L}$ satisfaz a condição $g\big(\frac{L}{2} - x\big) = -g\big(\frac{L}{2} + x\big)$, ou seja, seu gráfico é simétrico em relação ao ponto $\big(\frac{L}{2}, 0\big)$. Logo,

$$D_n = \frac{2}{L} \int_0^{L} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx = 0, \qquad \text{para } n \text{ par},$$

ou seja,

$$D_{2n} = 0.$$

Substituindo esses valores, finalmente encontramos que a solução de nosso problema é

$$u(x,t) = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \cos \frac{(2n+1)c\pi t}{L} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{L}\,.$$

Conclusões. A igualdade (16) nos diz que o movimento da corda, neste e em qualquer outro exemplo semelhante, é a superposição de uma infinidade de oscilações periódicas $u_n(x,t)$ dadas por (14). Cada $u_n(x,t)$ é uma onda estacionária

$$u_n(x,t) = \varphi_n(x)\psi_n(t)\,,$$

que é periódica em t, com período $P_n = \frac{2L}{cn\pi}$ e freqüência $f_n = \frac{1}{P_n} = \frac{nc\pi}{2L} = nf_1$. Cada um dos u_n representa uma possível oscilação livre na corda, e sua freqüência f_n é um múltiplo da freqüência mais baixa f_1, chamada *freqüência fundamental* da corda. Portanto, uma corda vibrante possui uma infinidade de freqüências naturais de vibração, todas elas múltiplos da freqüência fundamental. Veremos que uma membrana vibrante também tem uma infinidade de freqüências naturais de vibração, mas essas freqüências não são todas múltiplos da freqüência mais baixa. Isto explica porque é fácil produzir uma melodia em um instrumento de cordas, mas não num tambor! Vimos que um sistema formado por duas massas e duas ou três molas pode ter mais de uma freqüência natural de vibração. Na corda vibrante temos uma infinidade de freqüências naturais.

O método da separação de variáveis. O método que acima foi empregado para resolver o problema de condições iniciais e de fronteira para a equação da onda considerado no Exemplo 1, chama-se *método da separação de variáveis* e será sistematicamente empregado para resolver EDP's. O método da separação de variáveis consiste em começar procurando soluções da forma $u(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$.

Outro tipo de condição de fronteira: Fronteira livre. Outra situação que é descrita pela mesma equação da onda é quando se tem vibrações longitudinais em uma mola. Agora $u(x,t)$ mede o deslocamento longitudinal de um partícula que, na posição de equilíbrio da mola, ocupava originalmente a posição de coordenada x. No instante t, esta mesma partícula vai ocupar a posição de coordenada $x + u(x,t)$. Num dado instante t, um determinado trecho da mola, estará comprimido ou dilatado, conforme a função $x \longmapsto u(x,t)$ for decrescente ou crescente. Portanto compressão corresponde a $u_x < 0$, ao passo que dilatação corresponde a $u_x > 0$. Uma extremidade livre da mola só recebe força de um dos lados, portanto não pode ser comprimida ou dilatada. Logo, matematicamente, descrevemos o fato de uma extremidade ficar livre, através da condição $u_x = 0$. Uma situação análoga são ondas de som em um tubo, como em uma flauta. Trata-se de ondas de compressão e rarefação. Como na mola, são vibrações longitudinais (as partículas se movem na mesma direção que a onda). Se, por exemplo, a extremidade $x = 0$ estiver fechada, teremos a condição de fronteira $u(0,t) = 0$. Se, por exemplo, a extremidade $x = L$ estiver aberta, teremos a condição $u_x(L,t) = 0$, análoga à condição de extremidade livre na mola.

Condições de extremidade livre também podem ser pensadas na corda vibrante, mas exigem um mecanismo um pouco mais engenhoso para manter a tensão na corda.

Exemplo 2. Resolva o problema abaixo, que representa oscilações em uma corda com extremidade livres.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & (0 < x < L\,, 0 < t < \infty) \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 & (0 < t < \infty) \\ u(x,0) = f(x) & (0 < x < L) \\ u_t(x,0) = g(x) & (0 < x < L) \end{cases}$$

Em seguida escreva a solução para o caso de $f(x) = 0$ e $g(x) = 1$, para $0 < x < \frac{L}{2}$ e $g(x) = 0$, para $\frac{L}{2} < x < L$.

Solução: Utilizando o método da separação de variáveis, começamos procurando u da forma $u(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$. Substituindo na equação da onda, obtemos

$$\varphi(x)\psi''(t) = \varphi''(x)\psi(t).$$

Por divisão podemos separar as variáveis:

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}. \tag{19}$$

O lado esquerdo de (19) depende apenas de t enquanto que o lado direito depende apenas de x. Como vimos no Exemplo 1, a única maneira de serem iguais é sendo a função constante. Então,

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \lambda = \text{const.}$$

Obtemos duas EDO's independentes,

$$\varphi''(x) = \lambda\varphi(x) \tag{20}$$

$$\psi''(t) = \lambda\psi(t) \tag{21}$$

A condição de fronteira $u_x(0,t) = 0$ juntamente com $u_x(0,t) = \varphi'(0)\psi(t)$ nos diz que

$$\varphi'(0) = 0 \tag{22}$$

ou

$$\psi(t) = 0, \quad \text{para todo } t.$$

Se $\psi(t) = 0$ para todo t, teríamos $u(x,t) = 0$ para todo x e para todo t, isto é, a solução trivial. Queremos eoncontrar as soluções não triviais. Por isto, vamos trabalhar com a condição (22).

Analogamente, da condição de fronteira $u_x(L,t) = 0$ segue que

$$\varphi'(L) = 0. \tag{23}$$

Dentre as duas equações diferenciais (20) e (21), começamos com (20), pois para a função $\varphi(x)$ temos mais informação. Vamos estudar o problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} \varphi''(x) = \lambda\varphi(x) \\ \varphi'(0) = 0, \quad \varphi'(L) = 0 \end{cases} \tag{24}$$

Note que a incógnita no problema (24) é um par de objetos, uma função $\varphi(x) \neq \text{const.} = 0$ e um número λ. A equação diferencial do problema (24) tem como equação característica $k^2 - \lambda = 0$. Precisamos considerar três casos.

Caso 1: $\lambda > 0$. Então $\lambda = \mu^2$, com $\mu > 0$.
Neste caso a equação característica é $k^2 - \mu^2 = 0$ e, portanto, tem raízes reais $k = \pm\mu$. Então, as soluções da EDO são

$$\varphi(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}.$$

Para aplicar as condições de fronteira, primeiro derivamos a função,

$$\varphi'(x) = A\mu e^{\mu x} - B\mu e^{-\mu x}.$$

Aplicando (22), obtemos $(A - B)\mu = 0$ e, portanto, $A = B$. Segue que

$$\varphi(x) = A(e^{\mu x} + e^{-\mu x})$$
$$\varphi'(x) = A\mu(e^{\mu x} - e^{-\mu x}).$$

Aplicando (23), obtemos

$$A\mu(e^{\mu L} - e^{-\mu L}) = 0.$$

Para um produto dar 0, pelo menos um dos fatores precisa se anular. Mas $e^{\mu L} - e^{-\mu L} \neq 0$, pois $e^{\mu L} > e^0 = 1$ e $e^{-\mu L} < e^0 = 1$. Também $\mu \neq 0$, pois $\mu > 0$. Segue, $A = 0$. Logo, no caso 1 temos só a solução trivial.

Caso 2: $\lambda = 0$.
Neste caso, em (7) a EDO fica $\varphi''(x) = 0$. Então, $\varphi'(x) = A$ e $\varphi(x) = Ax + B$. As condições $\varphi'(0) = 0$ e $\varphi'(L) = 0$ nos dizem que $A = 0$. Logo, temos a solução não trivial $\varphi_0(x) = B_0$ e $\lambda_0 = 0$.

Caso 3: $\lambda < 0$. Então $\lambda = -\mu^2$, com $\mu > 0$.
Neste caso a equação característica é $k^2 + \mu^2 = 0$ e, portanto, tem raízes complexas $k = \pm i\mu$. As soluções da EDO são

$$\varphi(x) = A\cos\mu x + B\operatorname{sen}\mu x.$$

Para aplicar as condições de fronteira, derivamos

$$\varphi'(x) = \mu(-A\operatorname{sen}\mu x + B\cos\mu x).$$

A condição $\varphi'(0) = 0$ nos diz que devemos ter $B\mu = 0$ e, portanto, $B = 0$, pois $\mu > 0$. Então,

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= A\cos\mu x\\ \varphi'(x) &= -\mu A\operatorname{sen}\mu x\end{aligned}$$

A condição $\varphi'(L) = 0$ nos diz que devemos ter $\mu A\operatorname{sen}\mu L = 0$. Pelo menos um dos três fatores deve se anular. Sabemos que $\mu > 0$. Se $A = 0$, vamos ter a solução trivial $\varphi(x) = 0$. A única maneira de ter solução não trivial é se $\operatorname{sen}\mu L = 0$, ou seja,

$$\mu = \frac{n\pi}{L}, \qquad \text{com} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Concluímos que as soluções não triviais de (24) são

$$\varphi_n(x) = A_n\cos\frac{n\pi x}{L}\,, \qquad \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \qquad \text{com} \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{25}$$

e ainda

$$\varphi_0(x) = B_0\,, \qquad \lambda_0 = 0. \tag{26}$$

Substituindo estes valores de λ na equação diferencial (21), obtemos

$$\psi''(t) + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\psi(t) = 0,$$

cuja solução geral é

$$\psi_n(t) = D_n\cos\frac{n\pi t}{L} + E_n\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}\,, \qquad \text{se } n \geq 1 \tag{27}$$

e

$$\psi_0(t) = D_0 t + E_0\,, \qquad \text{se } n = 0. \tag{28}$$

Multiplicando as funções (25) e (27), obtemos

$$u_n(x,t) = \left(D_n\cos\frac{n\pi t}{L} + E_n\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}\right)A_n\cos\frac{n\pi x}{L}, \qquad n = 1, 2, 3, \dots \tag{29}$$

e multiplicando (26) e (28), obtemos

$$u_0(x,t) = B_0(D_0 t + E_0) = D_0 t + E_0\,, \qquad \text{se } \; n = 0. \tag{30}$$

Note que as constantes A_n e B_0 são desnecessárias, pois por multiplicação podem ser incorporadas às constantes D_n e E_n. Note que as funções (29) e (30) satisfazem a equação diferencial (da onda) e as condições de fronteira, quaisquer que sejam as constantes D_n e E_n. Ainda não levamos em conta as duas condições iniciais. Antes disto, fazemos a superposição das funções dadas por (29) e (30), obtendo

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = D_0 t + E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(D_n \cos\frac{n\pi t}{L} + E_n \,\mathrm{sen}\, \frac{n\pi t}{L} \right) \cos\frac{n\pi x}{L}\,. \tag{31}$$

Como no Exemplo 1, fazendo $t = 0$, temos

$$f(x) = u(x,0) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos\frac{n\pi x}{L}\,, \qquad \text{para } 0 \le x \le L$$

e, portanto,

$$D_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx\,, \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{32}$$

Também o coeficiente E_0 desempenha o papel de $\dfrac{a_0}{2}$ na expansão em série de Fourier-cosseno. Portanto,

$$E_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx\,. \tag{33}$$

Derivando (31) em relação a t, temos

$$u_t(x,t) = D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-D_n \frac{n\pi}{L} \,\mathrm{sen}\, \frac{n\pi t}{L} + E_n \frac{n\pi}{L} \cos\frac{n\pi t}{L} \right) \cos\frac{n\pi x}{L}\,.$$

Fazendo $t = 0$, obtemos

$$g(x) = u_t(x,0) = D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \frac{n\pi}{L}\,\cos\frac{n\pi x}{L}\,, \qquad \text{para } 0 \le x \le L.$$

Segue que

$$E_n \frac{n\pi}{L} = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\,\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx\,,$$

ou seja,

$$E_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^L g(x)\,\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \tag{34}$$

e que

$$D_0 = \frac{1}{L}\int_0^L g(x)\,dx\,. \tag{35}$$

<u>Conclusão</u>: A solução do problema é dada pela série (31), onde D_n e E_n são dados por (32), (33), (34) e (35).

Exemplo 3. Resolva o problema abaixo, que representa oscilações amortecidas (com atrito) em uma corda com extremidades livres.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 2\,u_t & (0 < x < \pi\,, 0 < t < \infty) \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 & (t > 0) \\ u(x,0) = f(x) & (0 < x < \pi) \\ u_t(x,0) = g(x) & (0 < x < \pi) \end{cases}$$

onde $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ e $g : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ são funções dadas mas não especificadas aqui.

Solução: Utilizando o método da separação de variáveis, começamos procurando u da forma $u(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$. Substituindo na equação diferencial do problema, como foi feito nos exemplos anteiores, encontramos

$$\varphi(x)\psi''(t) = \varphi''(x)\psi(t) - 2\varphi(x)\psi'(t).$$

Para separar as variáveis, dividimos por $\varphi(x)\psi(t)$. Obtemos

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} - \frac{2\psi'(t)}{\psi(t)}\,.$$

Raciocinando como nos exemplos anteriores, obtemos

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} + \frac{2\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \lambda\,.$$

Obtemos duas EDO's independentes,

$$\varphi''(x) = \lambda\varphi(x) \tag{36}$$

$$\psi''(t) + 2\psi'(t) = \lambda\psi(t) \tag{37}$$

Como nos exemplos anteriores, obtemos as condições de fronteria

$$\varphi'(0) = \varphi'(\pi) = 0. \tag{38}$$

Temos, então, como nos exemplos anteriores, o problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} \varphi''(x) = \lambda\varphi(x) \\ \varphi'(0) = 0, \quad \varphi'(\pi) = 0 \end{cases}$$

cujas soluções não triviais (conforme está explicado nos exemplos anteriores) são

$$\varphi_n(x) = A_n \cos nx\,, \qquad \lambda_n = -n^2\,, \qquad \text{com} \qquad n = 1,2,3,\ldots \tag{39}$$

e

$$\varphi_0(x) = B_0\,, \qquad \lambda_0 = 0. \tag{40}$$

Agora entramos com esses valores de λ na equação (37). Para $n = 0$, temos a EDO de $2^{\underline{a}}$ ordem linear homogênea

$$\psi''(t) + 2\psi'(t) = 0. \tag{41}$$

A equação característica é

$$k^2 + 2k = 0,$$

cujas raízes são $k_1 = 0$ e $k_2 = -2$. Duas soluções L.I. de (41) são $e^{0t} = 1$ e e^{-2t} e a solução geral é

$$\psi_0(t) = C_0 + D_0 e^{-2t}. \tag{42}$$

Para $n \geq 1$, a equação (37) fica

$$\psi''(t) + 2\psi'(t) + n^2\psi(t) = 0. \tag{43}$$

A equação característica é

$$k^2 + 2k + n^2 = 0, \tag{44}$$

cujas raízes são dadas por

$$k = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4n^2}}{2} = -1 \pm \sqrt{1 - n^2} = -1 \pm \sqrt{(-1)(n^2 - 1)}\,.$$

Para $n = 1$, a equação (44) tem raiz dupla $k_1 = k_2 = -1$ e, portanto, a solução geral de (43) é

$$\psi_1(t) = (C_1 + D_1 t)e^{-t}. \tag{45}$$

Para $n \geq 2$, a equação (44) tem raízes complexas $k = -1 \pm i\sqrt{n^2 - 1}$. Neste caso, a solução geral de (43) é

$$\psi_n(t) = C_n e^{-t} \cos\big(t\sqrt{n^2 - 1}\big) + D_n e^{-t} \operatorname{sen}\big(t\sqrt{n^2 - 1}\,\big). \tag{46}$$

Multiplicando (40) por (42), multiplicando (39) por (45) e também (40) por (46). Obtemos as soluções

$$\begin{aligned}
u_0(x,t) &= C_0 + D_0 e^{-2t} \\
u_1(x,t) &= (C_1 + D_1 t)e^{-t} \cos x \\
u_n(x,t) &= e^{-t}\Big(C_n \cos\big(t\sqrt{n^2 - 1}\,\big) + D_n \operatorname{sen}\big(t\sqrt{n^2 - 1}\,\big)\Big) \cos nx\,, \qquad \text{para } n \geq 2.
\end{aligned}$$

Fazendo a superposição, encontramos

$$\begin{aligned}
u(x,t) =& C_0 + D_0 e^{-2t} + (C_1 + D_1 t)e^{-t} \cos x \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} e^{-t}\Big(C_n \cos\big(t\sqrt{n^2-1}\,\big) + D_n \operatorname{sen}\big(t\sqrt{n^2-1}\,\big)\Big) \cos nx\,.
\end{aligned} \tag{47}$$

Fazendo $t = 0$, temos

$$f(x) = u(x,0) = C_0 + D_0 + C_1 \cos x + \sum_{n=2}^{\infty} C_n \cos nx\,.$$

Acima $C_0 + D_0$ está desempenhando o papel do coeficiente $\dfrac{a_0}{2}$ na série de Fourier-cosseno. Portanto,

$$C_0 + D_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx\,. \tag{48}$$

Temos também

$$C_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\cos nx\,dx\,, \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{49}$$

Derivando (47) em relação a t e em seguida substituindo $t = 0$ (para quem se sentir com confiança, é possível fazer tudo de uma só vez, para evitar escrever muito), obtemos

$$g(x) = u_t(x,0) = -2D_0 + (D_1 - C_1)\cos x + \sum_{n=2}^{\infty}\big(-C_n + D_n\sqrt{n^2 - 1}\,\big)\cos nx\,.$$

Segue que

$$D_0 = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi g(x)\,dx\,, \tag{50}$$

$$D_1 - C_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\,\cos x\,dx\,, \tag{51}$$

$$-C_n + D_n\sqrt{n^2-1} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\,\cos x\,dx\,, \tag{52}$$

Portanto a solução do problema é dada por (47), onde os coeficientes podem ser obtidos das igualdades (48), (49), (50), (51) e (52).