Seção 19: Equação do Calor

Consideremos um fluxo de calor em uma barra homogênea, construída de um material condutor de calor, em que as dimensões da seção lateral são pequenas em relação ao comprimento L. Em geral, vamos considerar a situação em que as faces laterais estão isoladas, de modo que só pode entrar ou sair calor através das extermidades $x = 0$ ou $x = L$. Devido à hipótese de que a seção lateral é pequena em relação ao comprimento, vamos supor que em cada instante t todos os pontos da seção de abscissa x estão à mesma temperatura $u(x, t)$. Utilisando-se as leis da condução do calor, pode-se provar que a função de duas variáveis $u(x, t)$ satisfaz a EDP

$$u_t = c^2 u_{xx}, \tag{1}$$

que é chamada de *equação do calor*. A constante positiva c^2 em (1) depende da condutibilidade térmica e do calor específico do material do qual a barra é construída.

Tipos de condição de fronteira.

(i) Extremidade mantida a uma temperatura prescrita: Se por exemplo, a extremidade $x = 0$ é mantida permanentemente à temperatura $u = a$, temos $u(0, t) = a$, para todo $t > 0$.

(ii) Extremidade isolada: O fluxo de calor através de uma seção de coordenada x da barra depende, além das propriedades de condutividade térmica e calor específico do material de que é feita a barra, do gradiente de temperatura em x. Quanto mais rapidamente a temperatura varia em relação a x, mais energia térmica cruza através da seção. Isto é, o fluxo de calor através da seção de coordenada x é diretamente proporcional a $u_x(x, t)$. Se, por exemplo, a extremidade $x = 0$ é mantida isolada, significa que o fluxo de calor através dela é 0. Portanto, matematicamente o fato de que a extremidade $x = 0$ está isolada se expressa pela condição $u_x(0, t) = 0$.

Exemplo 1. Resolva o problema abaixo, representando transmissão de calor em uma barra em que uma extremidade é mantida isolada e outra a uma temperatura prescrita.

$$\begin{cases} u_t = c^2\, u_{xx} & (0 < x < L\,, \quad 0 < t < +\infty) \\ u_x(0, t) = u(L, t) = 0 & (0 < t < +\infty) \\ u(x, 0) = 1 & (0 < x < L) \end{cases}$$

Solução: Utilizando o método de separação de variáveis, começamos procurando uma solução $u(x, t)$ da forma

$$u(x, t) = \varphi(x)\psi(t). \tag{2}$$

Substituindo (2) na equação do calor, temos

$$\varphi(x)\psi'(t) = c^2\varphi''(x)\psi(t).$$

Por divisão podemos separar as variáveis:

$$\frac{\psi'(t)}{c^2\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}. \tag{3}$$

O lado esquerdo de (3) depende apenas de t ao passo que a lado direito depende apenas de x. Portanto a única maneira de serem iguais é sendo a função constante, conforme já vimos.

Poderíamos justificar isto dizendo que o lado esquerdo de (3) não depende de x. Mas por ser igual ao lado direito, também não depende de t. Logo não depende de nenuma das variáveis, isto é, é constante. Assim,

$$\frac{\psi'(t)}{c^2\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \lambda = \text{const.}$$

Obtemos, assim, duas EDO's independentes,

$$\psi'(t) = \lambda c^2 \psi(t) \tag{4}$$

$$\varphi''(x) = \lambda \varphi(x) \tag{5}$$

Para aplicar as condições de fronteira, primeiro notamos que de (2) obtemos

$$u_x(x,t) = \varphi'(x)\psi(t).$$

Portanto, a condição $u_x(0,t) = 0$, isto é, $u_x(0,t) = \varphi'(0)\psi(t) = 0$, nos diz que

$$\varphi'(0) = 0 \tag{6}$$

ou

$$\psi(t) = 0, \quad \text{para todo } t.$$

Na eventualidade de $\psi(t) = 0$ para todo t, teríamos $u(x,t) = 0$ para todo x e para todo t. Esta é a solução trivial e não estamos interessados nela. O que queremos é encontrar as soluções não triviais para fazer a superposição delas.

Analogamente, da condição de fronteira $u(L,t) = 0$ segue que

$$\varphi(L) = 0 \tag{7}$$

Dentre as duas equações diferenciais (4) e (5), começamos com (5), pois para a função $\varphi(x)$ temos informações adicionais. Vamos estudar o problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} \varphi''(x) = \lambda\varphi(x) \\ \varphi'(0) = 0, \quad \varphi(L) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Note que a incógnita no problema (8) é um par, uma função $\varphi(x)$ e um número λ. A equação diferencial do problema (8) tem como equação característica $k^2 - \lambda = 0$ (k é a variável da equação característica).

Caso 1: $\lambda > 0$. Então $\lambda = \mu^2$, com $\mu > 0$.
Neste caso a equação característica é $k^2 - \mu^2 = 0$ e, portanto, tem raízes reais $k = \pm\mu$. Então, as soluções da EDO são

$$\varphi(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}.$$

Temos que $\varphi'(x) = \mu\big(Ae^{\mu x} - Be^{-\mu x}\big)$. Aplicando a condição de fronteira (6), temos

$$0 = \varphi'(0) = \mu\big(A - B\big).$$

Como $\mu \neq 0$, pois é positivo, temos $A - B$, ou seja, $A = B$ e

$$\varphi(x) = A\big(e^{\mu x} + e^{-\mu x}\big).$$

Segue que aplicando a condição de fronteira (7), temos

$$0 = \varphi(L) = A\big(e^{\mu L} + e^{-\mu L}\big).$$

Como $e^{\mu L}+e^{-\mu L}>0$, segue que $A=0$ e, portanto, $\varphi(x)=0$ é a solução trivial.

Caso 2: $\lambda=0$.
Neste caso, em (8) a EDO fica $\varphi''(x)=0$. Então, $\varphi'(x)=A$. Da condição de foronteira (6) segue que $A=0$. Logo, $\varphi'(x)=0$ e $\varphi(x)=B$. A condição de fronteira $\varphi(L)=0$ nos diz que $B=0$. Obtemos que $\varphi(x)=0$ é a solução trivial.

Caso 3: $\lambda<0$. Então $\lambda=-\mu^2$, com $\mu>0$.
Neste caso a equação característica $k^2+\mu^2=0$ tem raízes complexas $k=\pm i\mu$. As soluções da EDO são

$$\varphi(x)=A\cos\mu x+B\operatorname{sen}\mu x.$$

Aplicando as condições de fronteira, obtemos $0=\varphi'(0)=B\mu$. Como $\mu\neq 0$, então $B=0$ e

$$\varphi(x)=A\cos\mu x.$$

Também $0=\varphi(L)=A\cos\mu L$. Logo $A=0$ ou $\cos\mu L=0$. Se $A=0$, então $\varphi(x)=0$ é a solução trivial. Portanto, para obtermos solução não trivial devemos ter $\cos\mu L=0$, ou seja, μL da forma $\mu L=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$, com n inteiro. Como $\mu>0$, então

$$\mu=\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{L},\qquad \text{com}\qquad n=0,1,2,3,\ldots$$

Concluímos que as soluções não triviais de (8) são as funções

$$\varphi_n(x)=A_n\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{L},\qquad \text{com}\qquad n=0,1,2,3,\ldots \tag{9}$$

com os λ correspondentes dados por

$$\lambda_n=-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}{L^2}. \tag{10}$$

Substituindo este valor de λ na equação diferencial (4), obtemos a EDO de 1ª ordem

$$\psi'(t)+\left(\frac{c(n+\frac{1}{2})\pi}{L}\right)^2\psi(t)=0,$$

cuja solução geral é

$$\psi_n(t)=D_n e^{-\frac{c^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2 t}{L^2}}. \tag{11}$$

Multiplicando as funções (9) e (11), obtemos

$$u_n(x,t)=A_n e^{-\frac{c^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2 t}{L^2}}\cos\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L},\qquad n=0,1,2,3,\ldots \tag{12}$$

A constante D_n foi incorporada à constante A_n. Note que as funções (12) satisfazem a equação do calor e as condições de fronteira, quaisquer que sejam as constantes D_n e E_n. Ainda não levamos em conta a condição inicial. Antes disto, fazemos a superposição das funções dadas por (12), obtendo

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n e^{-\frac{c^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2 t}{L^2}}\cos\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}. \tag{13}$$

A idéia agora é ajustar a constantes A_n para que a função dada por (13) satisfaça também a condição inicial.

Fazendo $t = 0$ em (13), temos

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}\,, \tag{14}$$

onde $f(x)$ é a função constante $f(x) = 1$. Note que a expansão (14) não é exatamente uma série de Fourier para uma função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$, por causa do fator $n + \frac{1}{2}$ em lugar de n. Por isto, para analisar como podemos obter os coeficientes A_n, precisamos fazer um parênteses para introduzir dois novos sistemas ortogonais de funções.

Observação 1. As funções $\left\{\cos \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{L} \mid n = 0, 1, 2, 3, \ldots\right\}$ constituem um sistema ortogonal em $[0, L]$.

De maneira análoga ao que já fizemos antes, utilizando a identidade

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\Big[\cos(a+b) + \cos(a-b)\Big]\,,$$

é fácil verificar que

$$\int_0^L \cos \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{L} \cdot \cos \frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi x}{L}\, dx = \begin{cases} 0\,, & \text{se } n \neq m \\ \dfrac{L}{2}\,, & \text{se } n = m \end{cases} \tag{15}$$

Isto mostra a ortogonalidade do sistema de funções que estamos considerando. De acordo com o estudo que fizemos de ortogonalidade, para expandir uma função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ na forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}\,, \tag{16}$$

os coeficientes vão ser dados por

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos \frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}\, dx\,. \tag{17}$$

2. Analogamente, as funções $\left\{\operatorname{sen} \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{L} \mid n = 0, 1, 2, 3, \ldots\right\}$ em $[0, L]$ também constituem um sistema ortogonal em $[0, L]$ e

$$\int_0^L \operatorname{sen} \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{L} \cdot \operatorname{sen} \frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi x}{L}\, dx = \begin{cases} 0\,, & \text{se } n \neq m \\ \dfrac{L}{2}\,, & \text{se } n = m \end{cases} \tag{18}$$

Isto possibilita que se possa expandir uma função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ na forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}\,. \tag{19}$$

os coeficientes são dados por

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}\, dx\,. \tag{20}$$

Em alguns problemas, dependendo das condições de fronteira vamos precisar usar a expansão (19).

Fechando o parênteses, voltamos a (14) no problema que estamos resolvendo. Utilizando a expansão (16) para a função $f(x) = 1$,

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L \cos\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{(n+\frac{1}{2})\pi}\,\operatorname{sen}\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}\Bigg|_0^L .$$

Segue que

$$A_n = \frac{2\,\operatorname{sen}\Big((n+\frac{1}{2})\pi\Big)}{(n+\frac{1}{2})\pi} = \frac{2(-1)^n}{(n+\frac{1}{2})\pi}\,.$$

Substituindo em (13), obtemos, finalmente, que a solução é

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{(n+\frac{1}{2})\pi}\,e^{-\frac{c^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2 t}{L^2}}\cos\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}\,. \tag{21}$$

Exemplo 2. Resolva o problema

$$(\star)\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} \\ u(0,t) = a\ ,\quad u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

Neste caso a extremidade $x = 0$ está sendo mantida a uma temperatura que não é 0. Esta é uma condição de fronteira não homogênea. Por esta razão o método de separação de variáveis não pode ser aplicado diretamente, pois se somarmos funções satisfazendo a condição $u(0,t) = a$, a soma não vai satisfazer esta condição. A condição de fronteira $u(0,t) = a$ só poderia ser usada depois de fazermos a superposição.

Devido à dificuldade apontada acima, o método de separação de variáveis só se aplica quando tanto a equação diferencial quanto as condições de fronteira são homogêneas.

Vamos transformar o problema $(\star)$ em um novo problema que envolva condições de fronteira homogêneas. Começamos procurando uma função simples que satisfaça as condições de fronteira do problema $(\star)$. Por exemplo, $h(x,t) = a - \dfrac{ax}{L}$ satisfaz $h(0,t) = a$ e $h(L,t) = 0$ e tem a vantagem de depender apenas de x. Para u solução de $(\star)$, seja $v = u - h$. Então, $u = v + h$ e, portanto,

$$u_t = v_t \quad , \qquad u_x = v_x + h_x = v_x - \frac{a}{L} \qquad \text{e} \qquad u_{xx} = v_{xx}\,.$$

Portanto, v é solução do problema

$$(\star\star)\begin{cases} v_t = c^2 v_{xx} \\ v(0,t) = 0\ ,\quad v(L,t) = 0 \\ v(x,0) = \dfrac{ax}{L} - a \end{cases}$$

O plano agora é encontrar v resolvendo o problema $(\star\star)$ por separação de variáveis e então obter u como $u = v + h$. Não continuaremos aqui, pois a resolução do problema $(\star\star)$ por separação de variáveis é análoga a outros exemplos já feitos.

Exemplo 3. Resolva o problema

$$(\star)\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} + \gamma & (0 < x < L,\ 0 < t < +\infty) \\ u(0,t) = 0\ ,\quad u_x(L,t) = 0 & (0 < t < +\infty) \\ u(x,0) = 0 & (0 < x < L) \end{cases}$$

Este problema representa a difusão de calor em uma barra ao longo da qual uma fonte externa comunica calor a uma taxa constante e cujos extremos são mantidos um deles à temprerratura $u = 0$ e o outro isolado. A equação diferencial $u_t - c^2 u_{xx} = \gamma$ é não homogêna. Para ele não vale o princípio de superposição. O método de separação de variáveis não pode ser aplicado diretamente pois a soma de soluções não é solução. Vamos transformar o problema $(\star)$ em um novo problema que envolva uma equação diferencial homogênea e condições de fronteira também homogêneas. Começamos procurando uma função simples que satisfaça a equação diferencial não homogênea do problema $(\star)$. Por exemplo, vamos tentar encontrar uma função $w(x,t) = w(x)$, dependendo só de x, que satisfaça a equção diferencial e as condições de fronteira. Devemos ter

$$\begin{cases} c^2 w'' + \gamma = 0 \\ w(0) = w'(L) = 0 \end{cases}$$

Note que a solução $w(x,t)$ tem um significado físico. Por não depender do tempo, ela representa a situação de equilíbrio que a barra atinge depois de passado um tempo muito grande. Temos

$$w''(x) = -\frac{\gamma}{c^2}\,, \qquad w'(x) = -\frac{\gamma x}{c^2} + A\,, \qquad w(x) = -\frac{\gamma x^2}{2c^2} + Ax + B.$$

Para que $w(0) = w'(L) = 0$, é necessário que $B = 0$ e $A = \dfrac{\gamma L}{c^2}$. Então,

$$w(x) = -\frac{\gamma x^2}{2c^2} + \frac{\gamma L x}{c^2}\,.$$

Seja $v = u - w$. Para o operador diferencial linear $\mathcal{L}(u) = u_t - c^2 u_{xx}$, temos

$$\mathcal{L}(u) = \gamma \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}(w) = \gamma.$$

Portanto,

$$\mathcal{L}(v) = \mathcal{L}(u) - \mathcal{L}(w) = \gamma - \gamma = 0\,.$$

Logo $\mathcal{L}(v) = 0$, isto é, v satisfaz a equação usual do calor. Vejamos qual é a condição inicial satisfeita por v. Temos

$$v(x,0) = u(x,0) - w(x,0) = 0 - w(x) = \frac{\gamma x^2}{2c^2} - \frac{\gamma L x}{c^2}\,.$$

Finalmente, juntando todas essas informações, temos que v satisfaz o problema

$$(\star\star)\begin{cases} v_t = c^2 v_{xx} \\ v(0,t) = 0\ ,\quad v_x(L,t) = 0 \\ v(x,0) = \dfrac{\gamma x^2}{2c^2} - \dfrac{\gamma L x}{c^2} \end{cases}$$

A ideia agora é encontrar v resolvendo o problema $(\star\star)$ por separação de variáveis e então obter u como $u = v + w$. O problema $(\star\star)$ pode ser resolvido por separação de variáveis. A resolução é muito parecida com a do Exemplo 1.

Começamos procurando uma solução $v(x,t)$ da forma $v(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$. Em vez do problema (8), vamos ter o problema

$$\begin{cases} \varphi''(x) = \lambda\varphi(x) \\ \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(L) = 0 \end{cases} \tag{22}$$

Como no Exemplo 1, concluímos que as soluções não triviais de (22) são as funções

$$\varphi_n(x) = A_n \operatorname{sen} \frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}, \qquad \text{com} \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{23}$$

com os λ correspondentes dados por

$$\lambda_n = -\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}{L^2}. \tag{24}$$

Como no Exemplo 1, encontramos

$$\psi_n(t) = D_n e^{-\frac{c^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 t}{L^2}}. \tag{25}$$

De (23) e (25), obtemos

$$v_n(x,t) = A_n e^{-\frac{c^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 t}{L^2}} \operatorname{sen} \frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{26}$$

e, por superposição,

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\frac{c^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 t}{L^2}} \operatorname{sen} \frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L} \qquad (0 \le x \le L). \tag{27}$$

Aplicamos agora a condição inicial. Fazendo $t = 0$ em (27), temos

$$\frac{\gamma x^2}{2c^2} - \frac{\gamma L x}{c^2} = v(0,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}. \tag{28}$$

Note que (28) é a expansão que corresponde a (19) na Observação 2, acima. Temos, de acordo com (20), que

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left(\frac{\gamma x^2}{2c^2} - \frac{\gamma L x}{c^2} \right) \operatorname{sen} \frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L} \, dx.$$

Calculando a integral, obtemos

$$A_n = \frac{2\gamma L^2}{c^2 \pi^3 \left(n+\frac{1}{2}\right)^3}.$$

Substituindo em (27) encontramos, finalmente,

$$v(x,t) = \frac{2\gamma L^2}{c^2\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3} e^{-\frac{c^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 t}{L^2}} \operatorname{sen} \frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}.$$

Finalmente, a solução do problema original $(\star)$ é

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x) = -\frac{\gamma x^2}{2c^2} + \frac{\gamma L x}{c^2} + \frac{2\gamma L^2}{c^2\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3} e^{-\frac{c^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 t}{L^2}} \operatorname{sen} \frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}.$$