Seção 21 – Equação de Cauchy–Euler

Definição. A *equação de Cauchy–Euler* é a EDO da forma

$$t^2 y'' + a t y' + b y = 0\,, \tag{1}$$

onde a e b são constantes.

Observação fundamental. Vamos procurar uma solução da equação de Cauchy–Euler da forma $y = t^m$. Substituindo $y = t^m$ na equação de Cauchy–Euler,

$$m(m-1)t^m + amt^m + bt^m = 0.$$

Conclusão: *$y = t^m$ é uma solução da equação de Cauchy–Euler, quando m for uma raiz da equação algébrica*

$$m(m-1) + am + b = 0. \tag{2}$$

No caso das equações de Cauchy–Euler, equação algébrica (2) desempenha o mesmo papel que a equação característica desempenhava para as EDO lineares homogêneas de coeficientes constantes.

Temos 3 casos a considerar.

Caso 1. Se (2) tiver duas raízes reais distintas, podemos construir duas soluções linearmente independentes para (1).

Exemplo 1. Resolver a EDO $t^2 y'' + 2ty' - 2y = 0$.

Solução. Esta é uma equação de Cauchy–Euler. Procurando solução da forma $y = t^m$, substituímos esta expressão na EDO (ou aplicamos diretamente (2)), encontrando

$$m(m-1) + 2m - 2 = 0,$$

ou seja, $m^2 + m - 2 = 0$, cujas raízes são $m_1 = -2$ e $m_2 = 1$. Portanto, duas soluções linearmente independentes para a EDO são $y_1 = t^{-2}$ e $y_2 = t$. A solucão geral é

$$y = C_1 t^{-2} + C_2 t.$$

Caso 2. Se (2) tiver raiz real dupla $m_1 = m_2$. Neste caso, conhecemos uma solução $y_1 = t^{m_1}$ da equação de Cauchy–Euler. Aplicamos, então, o método de D'Alembert para descobrir uma segunda solução y_2 linearmente independente de y_1. Procuramos y_2 da forma $y_2 = vy_1$. Substituindo em (1), temos

$$t^2\big(v'' y_1 + 2v' y_1' + v y_1''\big) + at\big(v' y_1 + v y_1'\big) + bvy_1 = 0.$$

Agrupando os termos, obtemos

$$t^2 y_1 v'' + \big(2t^2 y_1' + aty_1\big)v' + \underbrace{\big(t^2 y_1'' + aty_1' + by_1\big)}_{=0} v = 0,$$

ou seja,

$$t^{m_1+2} v'' + \big(2m_1 t^{m_1+1} + at^{m_1+1}\big)v' = 0.$$

Simplificando, temos

$$tv'' + (2m_1 + a)v' = 0. \tag{3}$$

Note que a equação (2) se reescreve como

$$m^2 + (a-1)m + b = 0.$$

Portanto, se ela tem raiz dupla, é porque $(a-1)^2 - 4b = 0$. Neste caso, a raiz dupla é

$$m_1 = m_2 = \frac{1-a}{2}\,.$$

Portanto, $2m_1 + a = 1$. Substituindo em (3), obtemos

$$tv'' + v' = 0\,,$$

que é redutível à primeira ordem. Pondo $z = v'$, obtemos

$$t\,\frac{dz}{dt} + z = 0.$$

Separando as variáveis, temos

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dt}{t}.$$

Integrando e escolhendo a constante de integração como sendo 0, encontramos $\ln z = -\ln t$, de onde segue,

$$v' = z = t^{-1}.$$

Integrando mais uma vez, segue que $v = \ln t$ e, portanto,

$$y_2 = t^{m_1}\ln t\,.$$

Conclusão. *Se a equação algébrica* (2) *tem raiz real dupla* $m_1 = m_2$*, duas soluções linearmente independentes para a equação de Cauchy–Euler são* $y_1 = t^{m_1}$ *e* $y_2 = t^{m_1}\ln t$*.*

Exemplo 2. Resolva a EDO $t^2y'' + 5ty' + 4y = 0$.

Solução. A equação algébrica (2) toma a forma

$$m(m-1) + 5m + 4 = 0,$$

que tem raiz dupla $m_1 = m_2 = -2$. Portanto, duas soluções linearmente independentes são $y_1 = t^{-2}$ e $y_2 = t^{-2}\ln t$ e a solução geral é

$$y = C_1t^{-2} + C_2t^{-2}\ln t.$$

Caso 3. Se (2) tiver raízes complexas. Neste caso, as raízes são números complexos conjugados $m_1 = \alpha + i\beta$ e $m_2 = \alpha - i\beta$, $\beta \neq 0$, sendo, portanto, raízes distintas. Aplicando o primeiro caso, podemos construir duas soluções linearmente independentes

$$z_1 = t^{\alpha+i\beta} \qquad \text{e} \qquad z_2 = t^{\alpha-i\beta}. \tag{4}$$

Note que acima, temos duas exponenciais complexas de base t. Até este ponto, só tínhamos trabalhado com exponenciais complexas de base e. Para dar um significado às exponenciais complexas de base $t > 0$, usamos o fato que

$$t = e^{\ln t}.$$

Obtemos
$$t^{\alpha+i\beta} = \left(e^{\ln t}\right)^{\alpha+i\beta} = e^{(\alpha+i\beta)\ln t} = e^{\alpha \ln t + i\beta \ln t}\,.$$
Aplicando esta observação em (4), temos
$$z_1 = t^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha \ln t} \cdot e^{i\beta \ln t} = e^{\alpha \ln t}\big(\cos(\beta \ln t) + i\,\mathrm{sen}\,(\beta \ln t)\big) = t^{\alpha}\cos(\beta \ln t) + i\,t^{\alpha}\,\mathrm{sen}\,(\beta \ln t)$$
e
$$z_2 = t^{\alpha-i\beta} = e^{\alpha \ln t} \cdot e^{-i\beta \ln t} = e^{\alpha \ln t}\big(\cos(\beta \ln t) - i\,\mathrm{sen}\,(\beta \ln t)\big) = t^{\alpha}\cos(\beta \ln t) - i\,t^{\alpha}\,\mathrm{sen}\,(\beta \ln t).$$
O inconveniente destas duas soluções é que não são reais. Para conseguir soluções reais, vamos tomar combinações lineares convenientes. Soluções reais linearmente independentes são dadas pelas combinações lineares
$$y_1 = \frac{z_1 + z_2}{2} = t^{\alpha}\cos(\beta \ln t)$$
e
$$y_2 = \frac{z_1 - z_2}{2i} = t^{\alpha}\,\mathrm{sen}\,(\beta \ln t).$$
Exemplo 3. Encontre duas soluções reais linearmente independentes para a EDO
$$t^2 y'' + 3ty' + 5y = 0.$$
Solução. A equação algébrica (2) toma a forma
$$m(m-1) + 3m + 5 = 0,$$
ou seja, $m^2 + 2m + 5 = 0$, cujas raízes são $m_1 = -1 + 2i$ e $m_2 = -1 - 2i$. Portanto, duas soluções da EDO são z_1 e z_2, dados por
$$z_1 = t^{-1+2i} = \left(e^{\ln t}\right)^{-1+2i} = e^{-\ln t} \cdot e^{2i \ln t} = t^{-1} \cdot \big(\cos(2\ln t) + i\,\mathrm{sen}\,(2\ln t)\big)\,,$$
ou seja,
$$z_1 = t^{-1}\cos(2\ln t) + i\,t^{-1}\,\mathrm{sen}\,(2\ln t)$$
e
$$z_2 = t^{-1-2i} = t^{-1}\cos(2\ln t) - i\,t^{-1}\,\mathrm{sen}\,(2\ln t).$$
Duas soluções reais linearmente independentes são as combinações lineares
$$y_1 = \frac{z_1 + z_2}{2} = t^{-1}\cos(2\ln t)$$
e
$$y_2 = \frac{z_1 - z_2}{2i} = t^{-1}\,\mathrm{sen}\,(2\ln t).$$
Observação. Em toda a discução acima, a equação de Cauchy–Euler foi resolvida na semi-reta $(0, +\infty)$. As funções $y = t^m$ só estão definidas nesse domínio, pois
$$t^m = \left(e^{\ln t}\right)^m = e^{m \ln t}$$
e o domínio de $\ln t$ é a semi-reta $(0, +\infty)$. Não é de se estranhar que isto aconteça, pois a equação de Cauchy–Euler não está em forma normal (o termo de derivada mais alta y'' não está isolado). A forma normal da equação de Cauchy–Euler (1) é
$$y'' + \frac{a}{t}\,y' + \frac{b}{t^2}\,y = 0\,,$$
cujos coeficientes não estão definidos em $t = 0$. Portanto, a equação de Cauchy–Euler pode ser resolvida na semi-reta $(0, +\infty)$ (como fizemos acima) ou na semi-reta $(-\infty, 0)$. Para resolvê-la na semi-reta $(-\infty, 0)$, substituímos as funções $y = t^m$ e $y = t^m \ln t$ respectivamente por $y = |t|^m$ e $y = |t|^m \ln |t|$. Excepcionalmente, quando a equação algébrica (2) tiver raízes inteiras não negativas, podemos encontrar soluções difinidas em todo $(-\infty, +\infty)$. Isto aconteceu com uma das soluções da equação do Exemplo 1.