Seção 22: Equação de Laplace em coordenadas polares

Laplaciano em coordenadas polares. Seja $u = u(x, y)$ uma função de duas variáveis. Dependendo da região em que a função esteja definida, pode ser mais fácil trabalhar com coordenadas polares. Para lidar com a equação de Laplace nesta situação, vamos pecisar da expressão do laplaciano em coordenadas polares. Vamos usar que

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \tag{1}$$

e também

$$\begin{cases} r = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \\ \theta = \arctan\dfrac{y}{x} \end{cases} \tag{2}$$

Vamos pensar na situação em que a temperatura u de um ponto se expressa em termos das coordenadas polares (r, θ) desse ponto e que as coordenadas polares, por sua vez, se expressam em termos das coordenadas cartesianas através das equações (2). Temos, então, a função composta $(x, y) \longmapsto (r, \theta) \longmapsto u$. Aplicando a regra da cadeia, temos

$$u_x = u_r r_x + u_\theta \theta_x\,.$$

Derivando novamente, temos, pela regra da derivada do produto,

$$u_{xx} = \big(u_r\big)_x r_x + u_r r_{xx} + \big(u_\theta\big)_x \theta_x + u_\theta \theta_{xx}\,.$$

Usando a regra da cadeia, obtemos

$$u_{xx} = \big(u_{rr} r_x + u_{r\theta}\theta_x\big) r_x + u_r r_{xx} + \big(u_{\theta r} r_x + u_{\theta\theta}\theta_x\big)\theta_x + u_\theta \theta_{xx}\,.$$

Levando em conta que $u_{r\theta} = u_{\theta r}$, pois a ordem de derivação não influi no resultado, e agrupando os termos, temos

$$u_{xx} = u_{rr}\cdot(r_x)^2 + 2u_{r\theta}\cdot r_x\theta_x + u_{\theta\theta}\cdot(\theta_x)^2 + u_r r_{xx} + u_\theta\theta_{xx}\,. \tag{3}$$

Analogamente, derivando em relação a y, obtemos

$$u_{yy} = u_{rr}\cdot(r_y)^2 + 2u_{r\theta}\cdot r_y\theta_y + u_{\theta\theta}\cdot(\theta_y)^2 + u_r r_{yy} + u_\theta\theta_{yy}\,. \tag{4}$$

Somando (3) e (4), segue que o laplaciano vale

$$\begin{aligned} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} =& \big((r_x)^2 + (r_y)^2\big)u_{rr} + 2\big(r_x\theta_x + r_y\theta_y\big)u_{r\theta} + \big((\theta_y)^2 + (\theta_y)^2\big)u_{\theta\theta} \\ &+ (r_{xx} + r_{yy})u_r + (\theta_{xx} + \theta_{yy})u_\theta\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Utilizando as expressões (2) para calcular as derivadas parciais indicadas em (5), obtemos

$$\begin{aligned} &(r_x)^2 + (r_y)^2 = 1 \\ &r_x\theta_x + r_y\theta_y = 0 \\ &(\theta_y)^2 + (\theta_y)^2 = \frac{1}{r^2} \\ &r_{xx} + r_{yy} = \frac{1}{r} \\ &\theta_{xx} + \theta_{yy} = 0 \end{aligned}$$

Substituindo em (5), obtemos, finalmente,

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} \,, \tag{6}$$

que é a expressão do laplaciano em coordenadas polares.

Exemplo. Consideremos a função $u = u(x, y) = x^2 + y^2 + x$. Então,

$$\begin{aligned} u_x &= 2x + 1 \,, \qquad & u_{xx} &= 2 \\ u_y &= 2y \,, & u_{yy} &= 2 \end{aligned}$$

e obtemos $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 4$. Por outro lado, expressando u em coordenadas polares, temos

$$u = (r\cos\theta)^2 + (r \operatorname{sen}\theta)^2 + r\cos\theta = r^2 + r\cos\theta \,.$$

Derivando, obtemos

$$u_r = 2r + \cos\theta \,, \qquad u_{rr} = 2 \,, \qquad u_\theta = -r\operatorname{sen}\theta \,, \qquad u_{\theta\theta} = -r\cos\theta$$

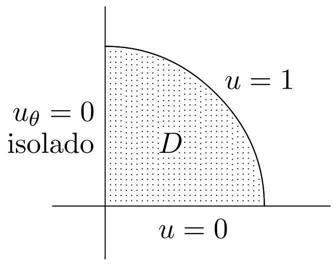
e

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}\, u_r + u_{\theta\theta} = 2 + \frac{2r + \cos\theta}{r} - \frac{r\cos\theta}{r^2} = 4 \,,$$

confirmando o mesmo resultado que havia sido obtido calculando com coordenadas cartesianas.

Exemplo 1. Resolva o problema de Dirichlet para o setor circular:

$$\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{1}{r}\, u_r + \dfrac{1}{r^2}\, u_{\theta\theta} = 0 \,, \quad \text{em} \quad D : 0 < r < 1 \,,\ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2} \\ u(r, 0) = 0 \,, \\ u_\theta(r, \frac{\pi}{2}) = 0 \,, \quad \text{no lado} \quad \theta = \dfrac{\pi}{2} \\ u(1, \theta) = 1 \end{cases}$$



Solução: Começamos procurando uma função da forma $u(r, \theta) = \varphi(r)\,\psi(\theta)$. Substituindo na equação de Laplace, obtemos

$$\varphi''(r)\,\psi(\theta) + \frac{1}{r}\,\varphi'(r)\,\psi(\theta) + \frac{1}{r^2}\,\varphi(r)\,\psi''(\theta) = 0.$$

Dividindo pelo produto $\varphi(r)\psi(\theta)$, segue que

$$\frac{\varphi''(r)}{\varphi(r)} + \frac{\varphi'(r)}{r\varphi(r)} + \frac{\psi''(\theta)}{r^2\psi(\theta)} = 0 \,.$$

Multiplicando por r^2, podemos separar as variáveis,

$$\frac{r^2\varphi''(r)}{\varphi(r)} + \frac{r\varphi'(r)}{\varphi(r)} = -\frac{\psi''(\theta)}{\psi(\theta)} = \lambda \,.$$

Seguem daí duas EDO independentes

$$r^2\varphi''(r) + r\varphi'(r) - \lambda\varphi(r) = 0 \tag{7}$$

$$\psi''(\theta) + \lambda\psi(\theta) = 0 \tag{8}$$

Da mesma forma que nos problemas resolvidos nas seções anteriores, as condições de fronteira $u(r,0) = 0$ e $u_\theta(r, \frac{\pi}{2}) = 0$ implicam que só encontraremos solução não trivial se

$$\psi(0) = \psi'\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = 0\,. \tag{9}$$

Começamos com a equação (8) e com as codições de fronteira (9), isto é, com o problema de fronteira de encontrar uma função $\psi : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ não constante igual a 0 e um escalar λ satisfazendo

$$\begin{cases} \psi''(\theta) + \lambda\psi(\theta) = 0 \\ \psi(0) = \psi'\big(\frac{\pi}{2}\big) = 0\,. \end{cases} \tag{10}$$

Como nos inúmeros problemas já considerados, dividimos em três casos.

Caso 1. $\lambda < 0$. É trivial.

Caso 2. $\lambda = 0$. É trivial.

Caso 3. $\lambda > 0$. Neste caso, $\lambda = \mu^2$, com $\mu > 0$. A EDO fica

$$\psi''(\theta) + \mu^2\psi(\theta) = 0\,,$$

cuja solução é

$$\psi(\theta) = A\cos\mu\theta + B\,\mathrm{sen}\,\mu\theta\,.$$

Como $\psi(0) = 0$, temos que $A = 0$ e, conseqüentemente,

$$\psi(\theta) = B\,\mathrm{sen}\,\mu\theta\,.$$

Então,

$$0 = \psi'\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = B\cos\frac{\mu\pi}{2}\,.$$

Segue que $B = 0$ ou $\cos\dfrac{\mu\pi}{2} = 0$. Se $B = 0$, então teríamos $\psi(\theta) = 0$ para todo θ, o que nos daria solução trivial. Portanto, só encontramos solução não trivial trabalhando com a condição $\cos\dfrac{\mu\pi}{2} = 0$. Segue que

$$\frac{\mu\pi}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2}\,,$$

ou seja,

$$\mu = 2n + 1\,.$$

Logo, as soluções não triviais do problema (10) são

$$\psi_n(\theta) = B_n\,\mathrm{sen}\big((2n+1)\theta\big)\,, \qquad \lambda_n = (2n+1)^2\,, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{11}$$

Passamos a analisar a equação (8), sabendo já que $\lambda = \lambda_n = (2n+1)^2$. Obtemos a equação de Cauchy–Euler

$$r^2\varphi''(r) + r\varphi'(r) - (2n+1)^2\varphi(r) = 0\,. \tag{12}$$

Sabemos que (12) admite soluções da forma $\varphi(r) = r^k$ para k raiz da equação algébrica

$$k(k-1) + k - (2n+1)^2 = 0\,,$$

cujas raízes são $k_1 = 2n+1$ e $k_2 = -(2n+1)$. Portanto a solução geral da EDO (12) é

$$\varphi(r) = D\,r^{2n+1} + E\,r^{-(2n+1)}\,, \qquad (0 < r \le 1).$$

Notemos que a origem faz parte da região D. Mas na origem, temos $r = 0$ e, portanto, a função $r^{-(2n+1)}$ se torna infinita na origem. Logo, devemos ter $E = 0$ e

$$\varphi_n(r) = D_n r^{2n+1}\,, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{13}$$

Multiplicando (11) e (13), obtemos

$$u_n(r,\theta) = B_n r^{2n+1} \operatorname{sen}(2n+1)\theta\,, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Fazendo a superposição encontramos

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{2n+1} \operatorname{sen}(2n+1)\theta\,. \tag{14}$$

Fazendo $r = 1$ e aplicando a condição de fronteira, obtemos

$$1 = u(1,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \operatorname{sen}(2n+1)\theta\,, \qquad \text{para } 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\,. \tag{15}$$

Levando em conta que $\operatorname{sen}(2n+1)\theta = \operatorname{sen}\frac{(n+\frac{1}{2})\pi\theta}{\frac{\pi}{2}}$, note que (15) é a expansão em série da função constante $f(\theta) = 1$ no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ em relação ao sistema ortogonal já estudado $\left\{ \operatorname{sen}\frac{(n+\frac{1}{2})\pi\theta}{\frac{\pi}{2}} \;\middle|\; n = 0, 1, 2, 3, \ldots \right\}$. Segue que os coeficientes B_n de (15), que são os mesmos de (14), são dados por

$$B_n = \frac{2}{\pi/2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(2n+1)\theta\, d\theta = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\Big[-\cos(2n+1)\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{(2n+1)\pi}\,.$$

Substituindo em (14), concluímos que a solução do problema é

$$u(r,\theta) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\, r^{2n+1} \operatorname{sen}(2n+1)\theta\,.$$

Exemplo 2. Resolva o problema de Dirichlet para a região exterior ao disco:

$$\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{1}{r}\,u_r + \dfrac{1}{r^2}\,u_{\theta\theta} = 0\ , \quad (\,r > 1\,) \\ u(1,\theta) = \begin{cases} U_1\,, & \text{se } 0 < \theta < \pi \\ 0\,, & \text{se } \pi < \theta < 2\pi \end{cases} \\ |\,u(r,\theta)\,| \le M \quad \text{para algum } M \quad (\text{isto é, } u \text{ é limitada.}) \end{cases}$$

Solução: Começamos procurando uma função da forma $u(r,\theta) = \varphi(r)\,\psi(\theta)$. Como no exemplo anterior, obtemos as EDO

$$r^2\varphi''(r) + r\varphi'(r) - \lambda\varphi(r) = 0\,; \tag{16}$$

$$\psi''(\theta) + \lambda\psi(\theta) = 0\,. \tag{17}$$

Podemos fazer a cordenada polar θ variar em todo $(-\infty, +\infty)$. Note que $u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi)$, pois mantendo a coordenada polar r fixa e dando um acréscimo de 2π ao ângulo θ, voltamos ao mesmo ponto do plano. Segue daí que

$$\varphi(r)\,\psi(\theta+2\pi) = \varphi(r)\,\psi(\theta)\,,$$

ou seja,

$$\varphi(r) \cdot \Big(\psi(\theta + 2\pi) - \psi(\theta)\Big) = 0\,.$$

Portanto, $\varphi(r) = 0$ para todo r (que daria a solução trivial) ou $\psi(\theta+2\pi)-\psi(\theta) = 0$ para todo θ (que nos diz que $\psi(\theta)$ é uma função $2\pi-$periódica). Concluímos que para que para obter solução não trivial, devemos trabalhar com a condição

$$\psi(\theta) \text{ é uma função } 2\pi\text{−periódica.} \tag{18}$$

Tomando a equação (17) e a condição (18), formamos o problema

$$\begin{cases} \psi''(\theta) + \lambda\psi(\theta) = 0 \\ \psi(\theta) \quad 2\pi\text{−periódica} \end{cases} \tag{19}$$

No problema (19), procuramos uma função não identicamente nula $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e um escalar λ. A condição (18) desempenha um papel análogo ao de condições de fronteira.

Caso 1. $\lambda < 0$. Neste caso, $\lambda = -\mu^2$, com $\mu > 0$.
Neste caso a EDO do problema (19) é

$$\psi''(\theta) - \mu^2\psi(\theta) = 0\,,$$

cujas soluções são

$$\psi(\theta) = Ae^{\mu\theta} + Be^{-\mu\theta}\,. \tag{20}$$

Mas a função $\psi(\theta)$ ainda deve ser contínua e periódica e, portanto, limitada. Fazendo $\theta \longrightarrow +\infty$ temos que as exponenciais

$$\lim_{\theta\to+\infty} e^{\mu\theta} = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{\theta\to+\infty} e^{-\mu\theta} = 0$$

Portanto, $A = 0$, pois caso contrário a função $\psi(\theta)$ não seria limitada. Da mesma forma, analisando o comportamento das funções para $\theta \longrightarrow -\infty$, concluímos que $B = 0$. Portanto, $\psi(\theta)$ =const.$= 0$ e o Caso 1 é trivial.

Caso 2. $\lambda = 0$.
Neste caso a EDO do problema (19) é $\psi''(\theta) = 0$, cuja solução é $\psi(\theta) = A\theta + B$. Utilizando que $\psi(\theta + 2\pi) = \psi(\theta)$, temos

$$A\theta + A2\pi + B = A\theta + B\,.$$

Segue que $A = 0$ e obtivemos a solução não trivial

$$\psi_0(\theta) = B_0\,, \qquad \lambda_0 = 0\,. \tag{21}$$

Caso 3. $\lambda > 0$. Neste caso, $\lambda = \mu^2$, com $\mu > 0$.
A EDO do problema (19) é

$$\psi''(\theta) + \mu^2\psi(\theta) = 0\,,$$

cujas soluções são

$$\psi(\theta) = A\cos\mu\theta + B\,\mathrm{sen}\,\mu\theta\,. \tag{22}$$

Utilizando a condição de periodicidade $\psi(\theta + 2\pi) = \psi(\theta)$, com $\psi(\theta)$ dada por (22), temos

$$A\cos(\mu\theta + \mu2\pi) + B\,\mathrm{sen}\,(\mu\theta + \mu2\pi) = A\cos\mu\theta + B\,\mathrm{sen}\,\mu\theta\,.$$

Segue que $\mu2\pi$ é um período para a senóide $\psi(\theta) = A\cos\mu\theta + B\,\mathrm{sen}\,\mu\theta$. Então, $\mu2\pi = n2\pi$, para algum inteiro positivo n, ou seja,

$$\mu = n\,, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Obtemos assim as soluções não triviais

$$\psi_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta\,, \qquad \lambda_n = n^2\,, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{23}$$

A seguir, analisamos a equação de Cauchy–Euler (16), conhecendo já os valores convenientes para λ.

Para $\lambda = \lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, obtemos a equação de Cauchy–Euler

$$r^2\varphi''(r) + r\varphi'(r) - n^2\varphi(r) = 0\,, \tag{24}$$

cuja solução geral é

$$\varphi(r) = Dr^n + Er^{-n}\,, \qquad (1 \leq r < +\infty).$$

Para ter $\varphi(r)$ limitada bo intervalo $[1, +\infty)$, devemos ter $D = 0$. Logo,

$$\varphi_n(r) = E_n r^{-n}\,. \tag{25}$$

Para $\lambda = \lambda_0 = 0$, a equação de Cauchy–Euler (24) fica

$$r^2\varphi''(r) + r\varphi'(r) = 0. \tag{26}$$

Para procurar soluções da forma $\varphi(r) = r^k$, analisamos a equação algébrica $k(k-1) + k = 0$, que tem raiz dupla $k_1 = k_2 = 0$. Logo, duas soluçõs L.I. de (26) são $\{1, 1{\cdot}\ln r\}$ e a solução geral é

$$\varphi(r) = D + E\ln r\,.$$

Como queremos soluções limitadas, então

$$\varphi_0(r) = D_0\,. \tag{27}$$

Multiplicando, para obter $u_n(r,\theta) = \varphi_n(r)\,\psi_n(\theta)$, temos

$$u_n(r,\theta) = \big(A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta\big)r^{-n}\,, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{28}$$

e

$$u_0(r,\theta) = B_0 \tag{29}$$

Finalmente, fazendo a superposição, temos

$$u(r,\theta) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\big(A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta\big)r^{-n}\,. \tag{30}$$

Para aplicar a condição de fronteira, fazemos $r = 1$ e obtemos que

$$u(1,\theta) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\big(A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta\big) = u(1,\theta) = f(\theta)$$

é a expansão em série de Fourier da função $2\pi-$periódica $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

$$f(\theta) = \begin{cases} U_1\,, & \text{para } \ 0 < \theta < \pi \\ 0\,, & \text{para } \ \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

Para calcular os coeficientes de Fourier é útil observar que esta função não é par nem ímpar, mas que traçando seu gráfico é fácil ver que, fazendo uma translação vertical, a função $f(\theta) - \dfrac{U_1}{2}$ é ímpar. Então, a função $f(\theta) - \dfrac{U_1}{2}$ se expande numa série de senos

$$f(\theta) - \frac{U_1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} n\theta.$$

Logo,

$$f(\theta) = \frac{U_1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} n\theta$$

e portanto $B_0 = \dfrac{U_1}{2}$ e $A_n = 0$, para $n \geq 1$. Mas,

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta \, d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta \, d\theta = \frac{U_1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} n\theta \, d\theta = \frac{U_1}{\pi}\Big[-\frac{\cos n\theta}{n}\Big]_0^{\pi}$$

e, em conseqüência,

$$B_n = \frac{U_1}{\pi n}\big(1 - (-1)^n\big) = \begin{cases} \dfrac{2U_1}{n\pi}\,, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 0\,, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Finalmente,

$$u(r,\theta) = \frac{U_1}{2} + \frac{2U_1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{-(2n+1)} \operatorname{sen}(2n+1)n\theta}{2n+1}\,.$$

Exemplo 3. Resolva o problema de Dirichlet para um anel circular:

$$(\star)\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{1}{r}\,u_r + \dfrac{1}{r^2}\,u_{\theta\theta} = 0\ , \quad (\,1 < r < 2\,) \\ u(1,\theta) = f(\theta)\ , \quad (\,0 < \theta < 2\pi\,) \\ u(2,\theta) = g(\theta)\ , \quad (\,0 < \theta < 2\pi\,) \end{cases}$$

onde $f(\theta)$ e $g(\theta)$ são duas funções dadas.

Solução: O problema, tal como está, já poderia ser resolvido por separação de variáveis, no entanto fica bem mais fácil de ser resolvido se o decompusermos em dois problemas. Consideremos os dois problemas

$$(\star\star)\begin{cases} v_{rr} + \dfrac{1}{r}\,v_r + \dfrac{1}{r^2}\,v_{\theta\theta} = 0\ , \quad (\,1 < r < 2\,) \\ v(1,\theta) = f(\theta)\ , \quad (\,0 < \theta < 2\pi\,) \\ v(2,\theta) = 0\ , \quad (\,0 < \theta < 2\pi\,) \end{cases}$$

e

$$(\star\star\star)\begin{cases} w_{rr} + \dfrac{1}{r}\,w_r + \dfrac{1}{r^2}\,w_{\theta\theta} = 0\ , \quad (\,1 < r < 2\,) \\ w(1,\theta) = 0\ , \quad (\,0 < \theta < 2\pi\,) \\ w(2,\theta) = g(\theta)\ , \quad (\,0 < \theta < 2\pi\,) \end{cases}$$

A idéia é resolver estes dois problemas mais simples e tomar v solução de $(\star\star)$ e w solução de $(\star\star\star)$. Então, a função $u = v + w$ será solução do problema $(\star)$.

Vamos resolver o problema $(\star\star)$. O outro é análogo. Começamos procurando a função $v(r,\theta)$ da forma $v(r,\theta) = \varphi(r)\,\psi(\theta)$. Exatamente como no Exemplo 2 acima, obtemos as EDO's

$$r^2\varphi''(r) + r\varphi'(r) - \lambda\varphi(r) = 0 \qquad \text{e} \qquad \psi''(\theta) + \lambda\psi(\theta) = 0\,.$$

Da condição $v(2,\theta) = 0$ segue que $\varphi(2)\,\psi(\theta) = 0$ e, portanto, $\varphi(2) = 0$, pois caso contrário teríamos $\psi(\theta) = 0$, para todo θ, a solução trivial.

Passamos a considerar o problema

$$\begin{cases} \psi''(\theta) + \lambda\psi(\theta) = 0 \\ \psi(\theta) \quad 2\pi\text{–periódica} \end{cases}$$

Como no Exemplo 2, considerando os casos $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ e $\lambda > 0$, encontramos as soluções

$$\psi_0(\theta) = B_0 \ , \qquad \lambda_0 = 0$$

e

$$\psi_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta \ , \qquad \lambda_n = n^2 \ , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

A seguir analisamos a equação de Cauchy-Euler

$$r^2\varphi''(r) + r\varphi'(r) - n^2\varphi(r) = 0 \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

com a condição $\varphi(2) = 0$.

Como vimos no Exemplo 2, se $n = 0$, a solução geral da EDO é

$$\varphi(r) = D + E \ln r \, .$$

Mas

$$0 = \varphi(2) = D + E \ln 2 \, .$$

Portanto, $E = -D/\ln 2$ e

$$\varphi_0(r) = D_0\left(1 - \frac{\ln r}{\ln 2}\right) .$$

Temos $v_0(r, \theta) = \varphi_0(r)\, \psi_0(\theta)$. Incorporando constante D_0 em B_0, obtemos

$$v_0(r, \theta) = B_0\left(1 - \frac{\ln r}{\ln 2}\right).$$

Se $n \geq 1$, a solução geral da EDO é

$$\varphi(r) = Dr^n + Er^{-n} \, .$$

Mas,

$$0 = \varphi(2) = D2^n + E2^{-n} \, , \qquad (1 \leq r < +\infty)$$

Portanto $E = -D2^{2n}$ e, finalmente,

$$\varphi_n(r) = D_n\big(r^n - 2^{2n}r^{-n}\big) \, .$$

Temos $v_n(r, \theta) = \varphi_n(r)\, \psi_n(\theta)$. Incorporando constante D_n em A_n e B_n, obtemos

$$v_n(r, \theta) = \big(r^n - 2^{2n}r^{-n}\big)\big(A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta\big), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Fazendo a superposição das várias v_n encontradas, temos

$$v(r, \theta) = B_0\left(1 - \frac{\ln r}{\ln 2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\big(r^n - 2^{2n}r^{-n}\big)\big(A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta\big). \tag{31}$$

Aplicando a condição de fronteira,

$$v(1, \theta) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\big(1 - 2^{2n}\big)\big(A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta\big) = f(\theta)$$

onde a função f pode ser considerada como $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $2\pi-$periódica. Pelas fórmulas de Euler para os coeficienes de Fourier, temos

$$\big(1-2^{2n}\big)A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$

A integração pode ser feita entre 0 e 2π. Logo,

$$A_n = \frac{1}{\big(1-2^{2n}\big)\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx. \tag{32}$$

Analogamente obtém-se

$$B_n = \frac{1}{\big(1-2^{2n}\big)\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,nx\,dx. \tag{33}$$

O coeficiente B_0 faz o papel de $\dfrac{a_0}{2}$ na série de Fourier. Então,

$$2B_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx\,,$$

ou seja,

$$B_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx. \tag{34}$$

Em resumo, reunindo as conclusões (31), (32),(33) e (34), temos que a solução do problema $(\star\star)$ é

$$v(r,\theta) = B_0\left(1-\frac{\ln r}{\ln 2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\big(r^n - 2^{2n}r^{-n}\big)\big(A_n\cos n\theta + B_n\,\mathrm{sen}\,n\theta\big),$$

onde

$$A_n = \frac{1}{\big(1-2^{2n}\big)\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad , \qquad B_n = \frac{1}{\big(1-2^{2n}\big)\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,nx\,dx$$

e

$$B_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx.$$

Analogamente resolve-se o problema $(\star\star\star)$, encontrando

$$w(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\big(r^n - r^{-n}\big)\big(A_n\cos n\theta + B_n\,\mathrm{sen}\,n\theta\big),$$

onde

$$A_n = \frac{1}{\big(2^n-2^{-n}\big)\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\cos nx\,dx \qquad , \qquad B_n = \frac{1}{\big(2^n-2^{-n}\big)\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\,\mathrm{sen}\,nx\,dx.$$

e

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\,dx.$$