

Seção 23: Resolução de equações diferenciais por séries de potências

Até este ponto, quando resolvemos equações diferenciais ordinárias, nosso objetivo foi sempre encontrar as soluções expressas por meio de funções elementares. Mais precisamente, tentamos sempre escrever as soluções na forma de um número finito de somas, produtos, quocientes e compostas de uma certa coleção limitada de funções (as funções elementares), incluindo polinômios, raízes, senos, cossenos, exponenciais, logaritmos, etc. Para resolver equações diferenciais parciais, não foi suficiente considerar somas finitas, foi necessário usar somas infinitas de produtos de funções trigonométricas ou exponenciais para expressar as soluções. Veremos agora que, para prosseguir no estudo das equações diferenciais ordinárias, vai ser insuficiente trabalhar apenas com funções elementares, como mencionado acima. Vamos precisar de formas alternativas para expressar as soluções das EDO's. As funções elementares constituem um universo pequeno demais para expressar com elas as soluções de todas as EDO's importantes nas aplicações. Para atacar essa questão, vamos desenvolver o método das séries de potências para resolver equações diferenciais ordinárias.

O método das séries de potências para equações diferenciais ordinárias, consiste em procurar as soluções de uma EDO expressas como soma de uma série de potências. Na presente seção damos dois exemplos, com o objetivo de explicar como funciona o método. Na próxima seção faremos uma breve revisão sobre séries de potências e enunciaremos o teorema que dá fundamentação teórica do método de resolução das EDO por séries de potências.

Exemplo 1: Consideremos a equação diferencial

$$y'' + x y' + y = 0. \quad (1)$$

Esta equação parece muito simples, no entanto os métodos de resolução vistos até agora não se aplicam a ela. Vamos, então, procurar uma solução expressa em forma de soma de uma série de potências

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (2)$$

Para entender como se deriva, talvez num primeiro momento seja melhor escrever por extenso

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots$$

Derivando, temos

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots,$$

ou seja,

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}. \quad (3)$$

Note que o primeiro termo desapareceu na derivação, pois era constante. A série de y' começa a partir de $n = 1$. Derivando mais uma vez, temos

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}. \quad (4)$$

Substituindo (3) e (4) na equação (1), obtemos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0. \quad (5)$$

Chamando $k = n - 2$ no primeiro somatório de (5), temos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k.$$

A seguir, em lugar da letra k , podemos usar qualquer outra, inclusive novamente n . Podemos também fazer o segundo somatório começar de $n = 0$, pois fazer isto corresponde acrescentar uma parcela a mais no somatório, mas esta parcela é nula. Encontramos, então,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Mudando a ordem dos termos e agrupando termos semelhantes, podemos escrever em forma de um único somatório

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} + (n+1) a_n] x^n = 0. \quad (6)$$

A igualdade (6) nos diz que todos os coeficientes se anulam (este ponto será melhor explicado na próxima seção)

$$(n+1)[(n+2) a_{n+2} + a_n] = 0,$$

ou seja,

$$(n+2) a_{n+2} + a_n = 0, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

Chamamos a igualdade (7) de **fórmula de recorrência**. Ela não nos diz nada sobre a_0 e a_1 , mas a partir daí todos os a_n ficam determinados. Assim, a_0 e a_1 podem ser escolhidos arbitrariamente, mas usando a fórmula de recorrência repetidas vezes, vamos obtendo

$$a_2 = -\frac{a_0}{2}, \quad a_3 = -\frac{a_1}{2}, \quad a_4 = -\frac{a_2}{4} = \frac{a_0}{2 \cdot 4}, \dots$$

Encontramos assim a solução da equação diferencial (1) expressa na forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e dependendo de duas constantes arbitrárias, a_0 e a_1 , o que não é de se estranhar, já que se trata de uma EDO de 2ª ordem.

Escolhendo $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$, encontramos

$$0 = a_1 = a_3 = a_5 = \dots$$

e

$$a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_4 = \frac{1}{2 \cdot 4}, \quad a_6 = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \dots \quad a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} = \frac{(-1)^n}{n! 2^n}.$$

Obtemos, assim, uma solução da equação diferencial,

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! 2^n} x^{2n}. \quad (8)$$

Observe que esta primeira solução poderia ser expressa em termos das funções elementares. De fato, usando a série da exponencial

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

e substituindo $t = -\frac{x^2}{2}$ obtemos

$$y_1 = e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (9)$$

Escolhendo $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, obtemos

$$0 = a_0 = a_2 = a_4 = \dots$$

e

$$a_1 = 1, \quad a_3 = -\frac{1}{3}, \quad a_5 = \frac{1}{3 \cdot 5}, \quad \dots \quad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!!}.$$

O símbolo !! acima é chamado de fatorial duplo e indica o produto em que os fatores vão diminuindo de 2 em 2 unidades. Assim uma segunda solução linearmente independente da primeira é dada por

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!!}. \quad (10)$$

Para verificar que de fato a expressão (10) para y_2 acima define uma solução da equação diferencial é necessário, antes de mais nada, verificar que a série converge, isto é, que a série de potências que define (10) tem raio de convergência maior do que 0. Não faremos isto agora.

Observações: (i) Se $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$, então $y(0) = a_0$ e $y' = a_1 + 2a_2 x + \dots$. Logo, $y'(0) = a_1$. Portanto, nossa solução y_1 corresponde às condições iniciais $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, enquanto que y_2 corresponde às condições iniciais $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

(ii) A solução encontrada $y_1 = e^{-\frac{x^2}{2}}$ é uma função elementar. Usando o método de D'Alembert, podemos encontrar uma segunda solução linearmente independente da forma $y_2 = v \cdot y_1$. Substituindo em (1), obtemos

$$(y_1 v'' + 2 y_1' v') + x y_1 v' = 0,$$

que nos dá

$$e^{-\frac{x^2}{2}} v'' - 2x e^{-\frac{x^2}{2}} v' + x e^{-\frac{x^2}{2}} v' = 0,$$

ou ainda,

$$v'' - x v' = 0.$$

Levando em conta que

$$y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 1,$$

de

$$y_2 = v y_1 \quad \text{e} \quad y_2' = v' y_1 + v y_1',$$

deduzimos que

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 1.$$

Vamos então resolver o problema de valor inicial

$$\begin{cases} v'' - x v' = 0 \\ v(0) = 0, \quad v'(0) = 1 \end{cases}$$

Pondo $z = v'$, a equação diferencial se reduz à equação de primeira ordem

$$\frac{dz}{dx} = xz,$$

que é separável

$$\frac{dz}{z} = x dx, \quad \ln z = \frac{x^2}{2} + C, \quad z = C_1 e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Da condição inicial $v'(0) = 1$, segue que $C_1 = 1$, isto é,

$$v' = e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Logo,

$$v(x) = \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt + C_2.$$

Usando que $v(0) = 0$, obtemos, finalmente,

$$v(x) = \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt,$$

ou seja,

$$y_2(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt.$$

Temos então que

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!!} = e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt. \quad (11)$$

Conclusão: Sabemos do cálculo que toda função contínua tem uma primitiva, mas nem sempre a primitiva de uma função elementar pode ser expressa em termos de funções elementares. O exemplo clássico desse fenômeno é que a integral

$$\int e^{t^2} dt$$

não expressa em termos de funções elementares. Dessa observação e de (11) decorre que a segunda solução $y_2(x)$ não se expressa em termos de funções elementares.

O Exemplo 1, acima, ilustra o fato que ao resolvermos uma equação diferencial linear de coeficientes variáveis, pode acontecer que uma ou até todas as soluções não possam ser expressas em termos das funções elementares. Por esta razão, estamos buscando uma forma alternativa para expressar as soluções, como soma de série de potências. Em outras palavras, as funções elementares não constituem um universo suficientemente grande para que com elas se possam expressar as soluções das EDO's com coeficientes variáveis.

Exemplo 2: Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} xy'' + x^2 y' - 2y = 0 \\ y(1) = 1, \quad y'(1) = -2 \end{cases} \quad (12)$$

Como as condições iniciais são dadas no ponto $x_0 = 1$, procuramos a solução expressa em forma de série de potências de $x - 1$, pois se

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - 1)^n, \quad (13)$$

então $a_0 = y(1)$ e $a_1 = y'(1)$, de modo que as condições iniciais do problema nos dizem que $a_0 = 1$ e $a_1 = -2$. Derivando (13) e substituindo na EDO, temos

$$\begin{aligned} [(x-1)+1] \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2} + [(x-1)+1]^2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} \\ - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n = 0. \end{aligned}$$

Reescrevemos como

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n+1} \\ + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n = 0. \end{aligned}$$

Fazendo mudança de índices e agrupando termos semelhantes, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n a_{n+1} (x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_{n-1} (x-1)^n \\ + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-1)^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n = 0. \end{aligned}$$

Notando que o 1º e 4º somatórios podem ser começados em $n = 0$ e o 3º somatório pode ser começado em $n = 1$ e agrupando os termos semelhantes, obtemos finalmente

$$\begin{aligned} -2a_0 + a_1 + 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} + (n+1)^2 a_{n+1} \right. \\ \left. + 2(n-1) a_n + (n-1) a_{n-1} \right] (x-1)^n = 0 \end{aligned}$$

Para que a igualdade acima se cumpra é necessário que todos os coeficientes da série se anulem. Obtemos, então, que

$$-2a_0 + a_1 + 2a_2 = 0 \quad (14)$$

e a fórmula de recorrência

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} + (n+1)^2 a_{n+1} + 2(n-1) a_n + (n-1) a_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

Já tínhamos que

$$a_0 = 1 \quad \text{e} \quad a_1 = -2.$$

Aplicando a igualdade (14), obtemos

$$a_2 = 2.$$

Utilizando esses valores e aplicando a fórmula de recorrência (15), vamos obtendo, sucessivamente,

$$a_3 = -\frac{4}{3}, \quad a_4 = \frac{1}{3}, \quad \dots \quad \text{etc.}$$

Segue a expressão em série de potências

$$y = 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots$$

para a solução do PVI (12).

Observação: No Exemplo 1, foi possível obter uma fórmula geral para os coeficientes das soluções. Isto não aconteceu no Exemplo 2, onde é possível calcular tantos coeficientes quanto quisermos, mas não encontramos uma fórmula geral para eles. Cabe perguntar qual a causa desta diferença. A resposta é que no Exemplo 1, a fórmula de recorrência $(n+2)a_{n+2} + a_n = 0$ é do tipo mais simples possível, envolve apenas dois termos. Assim, por exemplo, a_{2n} pode se expressar em função de a_0 somente. Isto não acontece no Exemplo 2, pois a fórmula de recorrência $(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)^2a_{n+1} + 2(n-1)a_n + (n-1)a_{n-1} = 0$ é mais complicada, envolvendo 4 termos. Em geral, quando a fórmula de recorrência envolver apenas dois termos, vai ser possível obter uma fórmula geral para os coeficientes das soluções. Quando a fórmula de recorrência envolver três ou mais termos, vai ser possível calcular tantos coeficientes quanto quisermos, mas não vamos encontrar uma fórmula geral para eles.