Seção 25: continuação do método de resolução por séries de potências

Na Seção 22 foi exposto informalmente, através de exemplos, o método de resolução de equações diferenciais ordinárias por séries de potências. Enunciamos agora o teorema que fundamenta o método. Precisamos primeiro de uma definição.

Definição: x_0 é um *ponto ordinário* da equação

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0 \tag{1}$$

se $P(x)$ e $Q(x)$ são funções analíticas no ponto x_0. Caso contrário dizemos que x_0 é um *ponto singular*.

Teorema: *Seja x_0 um ponto ordinário da equação* (1)*, com* $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n\,(x-x_0)^n$ *e* $Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n\,(x-x_0)^n$ *com raios de convergência respectivamente R_1 e R_2. Então qualquer problema de valor inicial para a equação* (1)

$$\begin{cases} y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0 \\ y(x_0) = a_0\ , \quad y'(x_0) = a_1 \end{cases}$$

tem solução única $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n$ *, que é analítica no ponto x_0 e tem raio de convergência $R \geq \min\{R_1, R_2\}$.*

Exemplo: Equação de Chebyshev

$$(1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0\ , \quad \alpha = \text{const.}$$

Para colocar a equação em forma normal, devemos dividir por $1-x^2$. Portanto $P(x) = \dfrac{-x}{1-x^2}$ e $Q(x) = \dfrac{\alpha^2}{1-x^2}$. Logo 1 e -1 são os únicos pontos singulares. Considerando $x_0 = 0$, o teorema nos diz que vamos encontrar soluções da forma $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n$ com raio de convergência $R \geq 1$.

Polinômios de Legendre

Vamos estudar a *equação de Legendre*

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0\,, \tag{2}$$

onde p é um parâmetro real a ser escolhido. Vamos ver adiante que esta equação é muito importante nas aplicações. O ponto $x_0 = 0$ é ordinário, pois as funções $P(x) = -\dfrac{2x}{1-x^2}$ e $Q(x) = -\dfrac{p(p+1)}{1-x^2}$ são analíticas neste ponto. Suas séries têm raio de convergência $R = 1$. São séries geométricas de razão x^2, por exemplo,

$$P(x) = -2x\big(1 + x^2 + x^4 + \cdots\big) = -2x - 2x^3 - 2x^5 - \cdots \quad .$$

Logo, a solução é da forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\,, \tag{3}$$

com raio de convergência $R \geq 1$. Substituindo (3) na equação de Legendre (2), temos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + p(p+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0\,.$$

Fazendo a mudança de índice $k = n - 2$ no 1º somatório, ele se transforma em

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k\,.$$

Podemos usar qualquer outra letra no lugar da letra k, inclusive a letra n novamente. O 2º e o terceiro somatórios podem ser começados em $n = 0$ (fazendo isto entram mais duas parcelas para a soma, mas são ambas nulas). Feito isto, podemos reunir todos os termos em um único somatório

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big[(n+2)(n+1)a_{n+2} - \Big((n(n+1) - p(p+1)\Big)\, a_n\Big]x^n = 0\,.$$

Obtemos, daí, a fórmula de recorrência

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - \Big((n(n+1) - p(p+1)\Big)\, a_n = 0\,, \quad \text{para} \;\; n = 0, 1, 2, \ldots$$

que pode ser reescrita como

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - p(p+1)}{(n+2)(n+1)}\, a_n\,. \tag{4}$$

Como vamos aplicar esta fórmula repetidas vezes, convém fatorar o numerador, com vistas a uma possível simplificação. Considerando n como variável e p como constante, o trinômio

$$n(n+1) - p(p+1) = n^2 + n - p(p+1)$$

tem raízes $n_1 = p$ e $n_2 = -p - 1$ e, portanto, se fatora como

$$(n-p)\,(n+p+1)\,.$$

Finalmente, a fórmula de recorrência (4) toma a forma

$$a_{n+2} = \frac{(n-p)(n+p+1)}{(n+2)(n+1)}\, a_n\,. \tag{5}$$

Escolhendo, primeiro $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$ e depois $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, obtemos

$$y_1 = 1 - \frac{p(p+1)}{2!}\, x^2 + \frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!}\, x^4 - \cdots \tag{6}$$

e

$$y_2 = x - \frac{(p-1)(p+2)}{3!}\,x^3 + \frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!}\,x^5 - \cdots \,, \tag{7}$$

que são duas soluções linearmente independentes com raio de convergência $R \geq 1$. Uma observação extremamente importante é que se $p = n = 0, 1, 2, 3, \dots$, então uma das soluções (6) ou (7) é um polinômio de grau n. Por exemplo,

$$\begin{aligned}
&\text{para } n = 0\,, \quad y_1 = 1 \\
&\text{para } n = 1\,, \quad y_2 = x \\
&\text{para } n = 2\,, \quad y_1 = 1 - 3\,x^2 \\
&\text{para } n = 3\,, \quad y_2 = x - \tfrac{5}{3}\,x^3 \\
&\text{para } n = 4\,, \quad y_1 = 1 - 10\,x^2 + \tfrac{35}{3}\,x^4\,.
\end{aligned}$$

É fácil ver que estes polinômios e seus múltiplos são as únicas soluções polinomiais da equação de Legendre. Para padronizar uma maneira de escolher esses múltiplos, multiplicamos por constantes convenientes de modo a ter que o polinômio assume sempre o valor 1 para $x = 1$. Normalizados desta maneira, são chamados de **polinômios de Legendre** e denotados por $P_n(x)$. Assim,

$$P_0(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad P_1(x) = x\,. \tag{8}$$

Para $n = 2$, $y_1 = 1 - 3x^2$ satisfaz $y(1) = -2$. Logo,

$$P_2(x) = \frac{1 - 3x^2}{-2} = \frac{3}{2}\,x^2 - \frac{1}{2}\,. \tag{9}$$

Para $n = 3$, $y_2 = x - \dfrac{5}{3}\,x^3$ satisfaz $y_2(1) = -\dfrac{2}{3}$ e, portanto,

$$P_3(x) = \frac{x - \frac{5}{3}\,x^3}{-\frac{2}{3}} = \frac{5}{2}\,x^3 - \frac{3}{2}\,x\,. \tag{10}$$

Analogamente, se deduz que

$$P_4(x) = \frac{1}{8}\left(35\,x^4 - 30\,x^2 + 3\right). \tag{11}$$

Podemos encontrar outra solução linearmente independente para a equação de Legendre pelo método D'Alembert.

Para $n = 0$, procuramos outra solução na forma $Q_0(x) = v(x)\,P_0(x)$. É fácil ver que $v(x)$ deve satisfazer

$$(1 - x^2)v'' - 2xv' = 0\,,$$

que, pondo $z = v'$, se reduz à equação separável de 1ª ordem

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2xz}{1 - x^2}\,,$$

para a qual encontramos a solução $z = \dfrac{1}{1 - x^2}$. Segue que $v = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$. Como estamos interessados em resolver a equação no intervalo $(-1,\,1)$, podemos dispensar os módulos e escrever

$$Q_0(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}\,. \tag{12}$$

Vemos que

$$\lim_{x\to 1^-} Q_0(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to -1^+} Q_0(x) = -\infty\,.$$

Como já tínhamos, pelo teorema, que $R \geq 1$, concluímos então que, para $Q_0(x)$, $R = 1$.

Conclusão: *Para $n = 0$, a equação de Legendre tem duas soluções linearmente independentes, uma delas o polinômio $P_0(x) = 1$ e a outra a função $Q_0(x)$ ilimitada no intervalo $(-1,\,1)$. Logo, as únicas soluções limitadas no intervalo $(-1,\,1)$ são os múltiplos de $P_0(x)$.*

Para $n = 1$, de maneira análoga, duas soluções linearmente independentes são

$$P_1(x) = x \qquad \text{e} \qquad Q_1(x) = \frac{x}{2}\,\ln\frac{1+x}{1-x} - 1\,. \tag{13}$$

Aqui

$$\lim_{x\to 1^-} Q_1(x) = \lim_{x\to -1^+} Q_1(x) = +\infty\,.$$

Vale, portanto, a mesma conclusão, isto é, para a equação de Legendre com $n = 1$ as únicas soluções limitadas no intervalo $(-1,\,1)$ são os múltiplos do polinômio de Legendre $P_1(x)$.

Continuando este mesmo procedimento, para $n = 2$, temos

$$P_2(x) = \frac{3}{2}\,x^2 - \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad Q_2(x) = \frac{1}{4}\big(3x^2 - 1\big)\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{3}{2}\,x \tag{14}$$

e, para $n = 3$,

$$P_3(x) = \frac{5}{2}\,x^3 - \frac{3}{2}\,x \qquad \text{e} \qquad Q_3(x) = \frac{1}{4}\big(5x^3 - 3x\big)\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{5}{2}\,x^2 + \frac{2}{3}\,. \tag{15}$$

Em geral mostra-se, mas isto não será feito aqui, que uma segunda solução da equação de Legendre é

$$Q_n(x) = \frac{1}{2}\,P_n(x)\,\ln\frac{1+x}{1-x} + \sum_{j=0}^{s}\frac{2n-4j-1}{(2j+1)\,(n-j)}\,P_{n-2j-1}(x)\,,$$

onde $s = \left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ é o maior inteiro que é menor ou igual a $\dfrac{n-1}{2}$.

Conclusão: *Qualquer que seja $p = n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, as únicas soluções limitadas no intervalo $(-1,\,1)$ da equação de Legendre são os múltiplos do polinômio de Legendre $P_n(x)$.*

OBS. Um fato verdadeiro, mas que não vamos justificar aqui é que para outros valores de p, que não os da forma $p = n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, a equação de Legendre não tem solução limitada no intervalo $(-1,\,1)$, além da trivial.

Consequência. *As únicas possibilidades de obter soluções não triviais que sejam limitadas no intervalo $(-1,\,1)$ para equação de Legendre*

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0$$

são para $p = n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Neste caso, as soluções limitadas no intervalo $(-1,\,1)$ são da forma

$$y = CP_n(x)\,.$$

Fórmula de Rodrigues: Vale a seguinte expressão para os polinômios de Legendre:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[\Big(x^2-1\Big)^n\right]. \tag{16}$$

Não demonstraremos este fato aqui, apenas diremos que ele pode ser provado em 3 etapas. Seja $R_n(x) = \dfrac{1}{n!\,2^n}\dfrac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]$.

1ª) Como $\left(x^2-1\right)^n$ tem grau $2n$, $R_n(x)$ tem grau n.

2ª) Mostrar que $R_n(x)$ satisfaz a equação de Legendre.

3ª) Mostrar que $R(1) = 1$.

Como $P_n(x)$ é o único polinômio que satisfaz a equação de Legendre e assume o valor 1 para $x = 1$, ficaria então provado que $R(x) = P_n(x)$.

Exemplo: Use a fórmula de Rodrigues para mostrar que $P_5(x) = \dfrac{1}{8}\big(63x^5 - 70x^3 + 15x\big)$.

Solução: Tomando $n = 5$ na fórmula de Rodrigues (16), começamos aplicando o Binômio de Newton

$$\begin{aligned}(x^2-1)^5 &= x^{10} - C_5^1 x^8 + C_5^2 x^6 - C_5^3 x^4 + C_5^4 x^2 - 1\\ &= x^{10} - 5x^8 + 10x^6 - 10x^4 + 5x^2 - 1\,.\end{aligned}$$

Derivando 5 vezes, temos

$$\frac{d^5}{dx^5}\left[\left(x^2-1\right)^5\right] = 30240x^5 - 33600x^3 + 7200x\,.$$

Finalmente, dividindo por $5!2^5 = 3840$, obtemos

$$P_5(x) = \frac{1}{8}\big(63x^5 - 70x^3 + 15x\big)\,.$$

Observação. Mostraremos mais adiante, na parte de leitura opcional, uma maneira muito mais eficiente de obter os polinômios de Legendre, utilizando a fórmula de recorrência.

Ortogonalidade dos polinômios de Legendre. A propriedade mais importante dos polinômios de Legendre é a ortogonalidade:

$$\langle P_n(x), P_m(x)\rangle = \int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx = 0\,, \qquad \text{para } n \neq m\,, \tag{17}$$

isto é, os $P_n(x)$ são ortogonais em relação ao produto interno $\langle f(x), g(x)\,\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\,dx$.

Demonstração:

Escrevendo a equação de Legendre para $P_n(x)$, temos

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0\,,$$

ou ainda,

$$\big((1-x^2)P_n'(x)\big)' + n(n+1)P_n(x) = 0\,.$$

Multiplicando por $P_m(x)$ e integrando, temos

$$n(n+1)\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx = -\int_{-1}^{1} P_m(x)\,\frac{d}{dx}\big((1-x^2)P_n'(x)\big)\,dx\,.$$

Integrando por partes, com $u = P_m(x)$ e $v = (1-x^2)P_n'(x)$, temos

$$n(n+1)\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx = (1-x^2)\,P_n'(x)\,P_m(x)\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}(1-x^2)\,P_n'(x)\,P_m'(x)\,dx\,,$$

isto é,

$$n(n+1)\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx = \int_{-1}^{1}(1-x^2)\,P_n'(x)\,P_m'(x)\,dx\,.$$

Trocando os papéis de n e m (que equivale a começar com a equação de $P_m(x)$ e multiplicar por $P_n(x)$), temos, analogamente, que

$$m(m+1)\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx = \int_{-1}^{1}(1-x^2)\,P_n'(x)\,P_m'(x)\,dx\,.$$

Segue daí que

$$n(n+1)\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx = m(m+1)\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx\,.$$

Portanto,

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx = 0\,, \qquad \text{se } \ n \neq m\,.$$

Desenvolvimento em Série de Fourier–Legendre.

Vimos acima que $\{P_n(x)\}$ forma um sistema ortogonal no intervalo $[-1,\,1]$. Usando esse fato, dada uma função $f : [-1,\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua por partes e tendo uma derivada f' contínua por partes, vamos querer expandi-la como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P_n(x) \qquad \text{(série de Fourier–Legendre).} \tag{18}$$

Como em qualquer expansão em série de funções ortogonais, os coeficientes são dados por

$$\alpha_n = \frac{\langle f, P_n\rangle}{\langle P_n, P_n\rangle}\,, \tag{19}$$

onde

$$\langle f, P_n\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\,P_n(x)\,dx \qquad \text{e} \qquad \langle P_n, P_n\rangle = \int_{-1}^{1} \big(P_n(x)\big)^2 dx. \tag{20}$$

Precisamos obter o valor dessa última integral. Note que

$$\begin{aligned}
\langle P_0, P_0\rangle &= \int_{-1}^{1} \big(P_0(x)\big)^2 dx = \int_{-1}^{1} dx = 2\\
\langle P_1, P_1\rangle &= \int_{-1}^{1} \big(P_1(x)\big)^2 dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}\\
\langle P_2, P_2\rangle &= \int_{-1}^{1} \big(P_2(x)\big)^2 dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(3x^2-1)\,dx = \frac{2}{5}
\end{aligned} \tag{21}$$

Os resultados resultados obtidos em (21) acima ilustram o fato que

$$\langle P_n, P_n\rangle = \int_{-1}^{1} \big(P_n(x)\big)^2 dx = \frac{2}{2n+1}\,, \qquad \text{para todo } \ n = 0,1,2,3,\ldots \tag{22}$$

Mais adiante, como leitura opcional, daremos uma demonstração rigorosa de (22). Juntando os resultados de (18), (19),(20) e (22) temos o seguinte teorema.

Teorema (Expansão em série de Fourier–Legendre). *Seja* $f : [-1,\, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua por partes e tendo uma derivada* f' *contínua por partes. Então,* f *pode ser expandida na forma*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P_n(x)\,, \tag{23}$$

com os coeficientes α_n *dados por*

$$\alpha_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\, P_n(x)\, dx\,. \tag{24}$$

Exemplo: Expandir em série de Fourier–Legendre a função $f : [-1,\, 1] \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ f(x) = |x|\,.$

Como $f(x)$ é uma função par, $\alpha_{2n+1} = 0$, pois, sendo $P_{2n+1}(x)$ ímpar e $f(x)$ par, segue que $f(x)P_{2n+1}(x)$ é ímpar e, portanto, $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, P_{2n+1}(x)\, dx = 0$. Segue que (24) que $\alpha_{2n+1} = 0$, para todo n. Analogamente, de (24), segue que

$$\alpha_{2n} = \frac{2(2n)+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\, P_{2n}(x)\, dx = (4n+1) \int_{0}^{1} f(x)\, P_{2n}(x)\, dx\,.$$

Mas $f(x) = |x| = x$, para $0 \le x \le 1$. Portanto,

$$\alpha_{2n} = (4n+1) \int_{0}^{1} x\, P_{2n}(x)\, dx\,. \tag{25}$$

Por integração podemos calcular os primeiros coeficientes, tantos quanto quisermos,

$$\alpha_0 = \int_0^1 x\, P_0(x)\, dx = \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2} \tag{26}$$

$$\alpha_2 = 5 \int_0^1 x\, P_2(x)\, dx = 5 \int_0^1 \left(\frac{3}{2}\, x^3 - \frac{1}{2}\, x\right) dx = \frac{5}{8} \tag{27}$$

$$\alpha_4 = 9 \int_0^1 x\, P_4(x)\, dx = 9 \int_0^1 \frac{1}{8}\, (35x^5 - 30x^3 + 3x) dx = -\frac{9}{8} \tag{28}$$

Mais adiante vamos ver que, utilizando resultados apresentados abaixo, é possível obter uma expressão genérica para os coeficientes dados por (25).

Segue que a expansão procurada em série de Fourier–Legendre é

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} P_0(x) + \frac{5}{8} P_2(x) - \frac{9}{8} P_4(x) + \cdots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{5}{8}\left(\frac{5}{2} x^2 - \frac{3}{2}\right) - \frac{9}{64}\big(35x^4 - 30x^2 + 3\big) + \cdots \end{aligned} \tag{29}$$

Complementos – leitura opcional

Função Geradora: A função $G(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 2\,x\,t + t^2}}$ satisfaz

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \quad , \qquad \text{para } \ |x| \le 1 \quad \text{ e } \quad |t| < 1\,. \tag{30}$$

Não daremos propriamente uma demonstração deste fato. Apenas notamos que substituindo $u = t^2 - 2xt$ na série binomial correspondente a $\alpha = -\frac{1}{2}$

$$(1+u)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\,u + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,u^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,u^3 + \cdots$$

obtemos

$$\begin{aligned} G(x,t) &= 1 - \frac{1}{2}\,(t^2 - 2xt) + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,(t^2-2xt)^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,(t^2-2xt)^3 + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{2}\,(t^2-2xt) + \frac{3}{8}\left(t^4 - 4xt^3 + 4x^2t^2\right) - \frac{15}{48}\left(t^6 - 6\,xt^5 + 24x^2t^4 - 8x^3t^3\right) + \cdots \end{aligned}$$

Agrupando os termos e colocando em evidência as potências de t obtemos

$$G(x,t) = 1 + xt + \left(\frac{3}{2}\,x^2 - \frac{1}{2}\right)t^2 + \left(\frac{5}{2}\,x^3 - \frac{3}{2}\,x\right)t^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,t^n \quad .$$

A função geradora encerra várias propriedades da família dos polinômios de Legendre. Muitas outras famílias de polinômios ou funções que são úteis nas aplicações da Matemática também possuem a sua função geradora. Abaixo vamos mostrar como várias dessas propriedades podem ser deduzidas a partir da função geradora. O mesmo tipo de raciocínio se aplica a outras famílias de funções.

Propriedades

1. Fórmula de Recorrência.

$$\big(n+1\big)P_{n+1}(x) - \big(2\,n+1\big)x\,P_n(x) + n\,P_{n-1}(x) = 0\ , \qquad n = 1,2,3,\ldots \tag{31}$$

Demonstração: Na demonstração vamos novamente usar a função geradora

$$G(x,t) = \Big(1 - 2xt + t^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,t^n\,.$$

Derivando em relação a t, temos

$$G_t(x,t) = -\frac{1}{2}\big(1 - 2xt + t^2\big)^{\frac{1}{2}}\big(-2x + 2t\big)\,.$$

Logo,

$$\big(1 - 2xt + t^2\big)G_t(x,t) = \big(x - t\big)G(x,t)\,. \tag{32}$$

Uma igualdade como (32) costuma encerrar alguma propriedade interessante da família de polinômios. No presente caso, de (32) segue que

$$\Big(1 - 2xt + t^2\Big)\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)\,t^{n-1} = \big(x - t\big)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,t^n\,.$$

Multiplicando, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} - 2\sum_{n=1}^{\infty} nxP_n(x)\,t^n + \sum_{n=1}^{\infty} nxP_n(x)\,t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} xP_n(x)\,t^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,t^{n+1}\,.$$

ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)\,t^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} nxP_n(x)\,t^n + \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)xP_{n-1}(x)\,t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x\,P_n(x)\,t^n - \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}(x)\,t^n\,.$$

Agrupando os termos, obtemos, finalmente,

$$P_1(x) - xP_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big((n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x)\Big)t^n = 0\,.$$

Igualando a 0 o coeficiemte de cada t^n, segue a conclusão.

Obs: Conhecendo dois polinômios de Legendre consecutivos, a fórmula de recorrência nos permite calcular o próximo. Por exemplo, vimos acima que

$$P_3(x) = \frac{1}{2}\Big(5\,x^3 - 3\,x\Big) \quad \text{e} \quad P_4(x) = \frac{1}{8}\Big(35\,x^4 - 30\,x^2 + 3\Big).$$

Fazendo $n = 4$ na fórmula de recorrência, vamos obter

$$P_5(x) = \frac{1}{5}\Big(9xP_4(x) - 4P_3(x)\Big) = \frac{1}{8}\Big(63x^5 - 70x^3 + 15x\Big).$$

Tendo agora as expressões de $P_4(x)$ e $P_5(x)$, usando novamente a fórmula de recorrência, podemos obter $P_6(x)$, e assim por diante. Este método é muito mais simpes do que utilizando a fórmula de Rodrigues (16). Em particular, a recorrência se presta para escrever um programa de computador para calcular os polinômios de Legendre.

2. Norma. Acima foi verificado, para os primeiros valores de n, que

$$\langle P_n(x), P_n(x)\rangle = \int_{-1}^{1}\Big(P_n(x)\Big)^2\,dx = \frac{2}{2n+1}\,. \tag{33}$$

Vajamos agora a demonstração para o caso geral. Esta propriedade foi importante para estabelecer a expansão em série de Fourier-Legendre (18).

Demonstração:

Multiplicando a identidade $\dfrac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,t^n$ por si própria, obtemos

$$\frac{1}{1-2xt+t^2} = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,t^n \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x)\,t^m = \sum_{n,m=0}^{\infty} P_n(x)\,P_m(x)\,t^{n+m}\,.$$

Integrando em relação a x, obtemos

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1-2xt+t^2} = \sum_{n,m=0}^{\infty} t^{n+m}\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx\,.$$

Usando a ortogonalidade dos $P_n(x)$, na soma acima sobram só as parcelas em que $m = n$ e, portanto,

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \int_{-1}^{1} \Big(P_n(x)\Big)^2 \, dx\,.$$

Por outro lado,

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1-2xt+t^2} = \frac{\ln\left(1-2xt+t^2\right)}{-2\,t}\Bigg|_{x=-1}^{x=1} = \frac{1}{2t}\Big(\ln(1+2xt+t^2) - \ln(1-2xt+t^2)\Big)$$

$$= \frac{1}{t}\Big(\ln(1+t) - \ln(1-t)\Big) = \frac{1}{t}\left[\left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots\right) + \left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} + \cdots\right)\right]$$

$$= 2\left(1 + \frac{t^2}{3} + \frac{t^4}{5} + \cdots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1}\, t^{2\,n} \quad .$$

Comparando os coeficientes de $t^{2\,n}$ nas duas séries, obtemos, finalmente,

$$\int_{-1}^{1} \Big(P_n(x)\Big)^2 \, dx = \frac{2}{2n+1}\,.$$

3. $P_n(1) = 1$ (esta propriedade foi usada já na própria definição dos polinômios de Legendre. O objetivo agora e ver, como ilustração que ela poderia ser obtida alternativamente, como uma conseqüência da função geradora).

Demonstração: Fazendo $x = 1$ na função geradora,

$$G(1,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2t+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)\, t^n\,.$$

Portanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)\, t^n = \frac{1}{\sqrt{(1-t)^2}} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n\,.$$

Comparando os coeficientes dos t^n nos dois lados da igualdade, obtemos finalmente

$$P_n(1) = 1\,.$$

4. $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, isto é, se n for par, então $P_n(x)$ é função par (só envolve potências de x com expoente par) e analogamente para n ímpar. Novamente, da maneira como os polinômios de Legendre foram construídos, fica claro que esta propriedade é válida. O objetivo aqui é ver, como exercício, que a propriedade também poderia ser deduzida da função geradora.

Demonstração:

A função geradora $G(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$ satisfaz $G(x,t) = G(-x,-t)$. Logo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-x)\,(-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n P_n(-x)\, t^n\,.$$

Comparando os coeficientes dos t^n nos dois lados da igualdade, obtemos

$$P_n(-x) = (-1)^n\, P_n(x)\,.$$

5.

$$P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2\,n-1)}{n!\,2^n} \qquad \text{e} \qquad P_{2n+1}(0) = 0\,. \tag{34}$$

Demonstração: Fazendo $x = 0$ na função geradora,

$$G(0,t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)\,t^n\,.$$

Usando a série binomial

$$(1+s)^a = 1 + as + \frac{1}{2!}a(a-1)s^2 + \frac{1}{3!}a(a-1)(a-2)s^3 + \cdots\,,$$

com $s = t^2$ e $a = -\dfrac{1}{2}$, obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = 1 - \frac{1}{2}\,t^2 + \frac{1 \cdot 3}{2! \cdot 2^2}\,t^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3! \cdot 2^3}\,t^6 + \cdots\,.$$

Comparando as duas expressões para $\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, obtemos

$$P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n\, 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2\,n-1)}{n!\,2^n} \qquad \text{e} \qquad P_{2n+1}(0) = 0\,.$$

Se quisermos, podemos ainda reescrever

$$P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n\, 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2\,n)} = \frac{(-1)^n\,(2\,n)!}{\Big(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)\Big)^2} = \frac{(-1)^n\,(2n)!}{(n!)^2\,2^{2\,n}}\,.$$

6.

$$\int_0^1 P_{2n-1}(x)\,dx = (-1)^{n+1}\,\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2\,n-3)}{n!\,2^n}\,, \qquad \text{para } n \geq 2 \tag{35}$$

e

$$\int_0^1 P_{2n}(x)\,dx = 0\,, \qquad \text{para } n \geq 1\,. \tag{36}$$

Demonstração:

Integrando $G(x,t) = \Big(1 - 2xt + t^2\Big)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,t^n$ em relação a x, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_0^1 P_n(x)\,dx = \int_0^1 \Big(1 - 2xt + t^2\Big)^{-\frac{1}{2}}\,dx = -\left.\frac{\Big(1 - 2\,x\,t + t^2\Big)^{\frac{1}{2}}}{t}\right|_{x=0}^{x=1}$$

$$= \Big[\Big(1+t^2\Big)^{\frac{1}{2}} - (1-t)\Big] = \frac{1}{t}\Big[t + \frac{1}{2}\,t^2 - \frac{1}{2!}\,\frac{1}{2^2}\,t^4 + \frac{1}{3!}\,\frac{1 \cdot 3}{2^3}\,t^6 - \cdots\Big]$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\,t - \frac{1}{2!}\,\frac{1}{2^2}\,t^3 + \frac{1}{3!}\,\frac{1 \cdot 3}{2^3}\,t^5 - \cdots$$

Comparando os coeficientes de t^n nos dois lados, obtém-se a conclusão.

Exemplo: Retomando o exemplo visto acima de expandir em série de Fourier–Legendre a função $f : [-1,\, 1] \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ f(x) = |x|\,$, vamos obter a expressão genérica do coeficiente (25)

$$\alpha_{2n} = (4n+1) \int_0^1 x\, P_{2n}(x)\, dx\,.$$

Da fórmula de recorrência (31), substituindo n por $2n$, segue que

$$x\, P_{2n}(x) = \frac{1}{4n+1}\Big((2n+1)\, P_{2n+1}(x) + 2n\, P_{2n-1}(x) \Big)\,, \qquad \text{para } \ n \geq 1\,.$$

Integrando, temos

$$\int_0^1 x\, P_{2n}(x)\, dx = \frac{1}{4n+1}\Big((2n+1) \int_0^1 P_{2n+1}(x)\, dx + 2n \int_0^1 P_{2n-1}(x)\, dx \Big)\,.$$

Mas utilizando (35) provado acima, obtemos

$$\int_0^1 xP_{2n}(x)\, dx = \frac{1}{4n+1}\Bigg[(2n+1)\, (-1)^n\, \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{(n+1)!\, 2^{n+1}} + 2\, n\, (-1)^{n-1}\, \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2\, n-3)}{n!\, 2^n} \Bigg]\,,$$

de onde segue

$$\alpha_{2n} = \left((-1)^{n+1}\, \frac{(2\, n-1)(2n+1)}{(n+1)2} + 2n(-1)^n \right) \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2\, n-3)}{n!\, 2^n} \quad ,$$

ou seja,

$$\alpha_{2n} = (-1)^{n-1}\, \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2\, n-3)}{(n+1)!\, 2^{n+1}}\, (4\, n+1)\,, \qquad \text{para } \ n \geq 2\,. \tag{37}$$

Temos que os valores de α_0 e α_2 não estão incluídos da igualdade (37) e, portanto, precisam ser calculados separadamente. Mas já foi feito acima em (26) e (27). Obtemos, assim, a expansão

$$f(x) = |x| = \frac{1}{2} + \frac{5}{8}\, P_2(x) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1}\, \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2\, n-3)}{(n+1)!\, 2^{n+1}}\, (4\, n+1)\, P_{2\, n}(x)\,, \tag{38}$$

para todo $x \in [-1,\, 1]\,$. Note que a expansão (38) apresenta de modo genérico os primeiros termos da expansão obtida em (29).