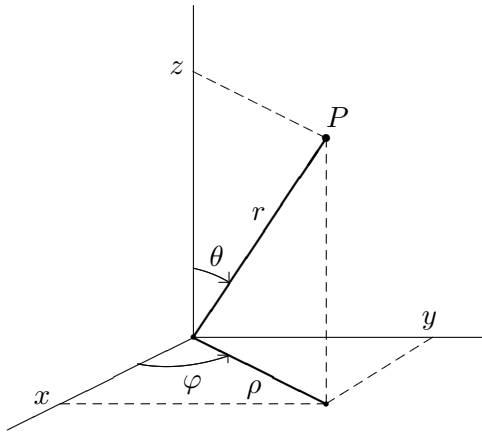


## Seção 26: Laplaciano em Coordenadas Esféricas

Para o leitor interessado, na primeira seção vamos deduzir a expressão do laplaciano em coordenadas esféricas. O leitor que estiver disposto a aceitar sem demonstração pode passar diretamente à igualdade (10).

Vamos usar os símbolos  $(r, \theta, \varphi)$  para indicar as coordenadas esféricas de um ponto.



Temos

$$\begin{cases} x = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \\ y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \\ z = r \cos \theta, \end{cases}$$

e também

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \rho = r \operatorname{sen} \theta = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

Nosso primeiro objetivo é expressar o laplaciano de uma função de três variáveis

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

em termos das coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$ . Um cálculo direto é bastante longo. Por isto, seguimos outro caminho. Usando a expressão do laplaciano em duas variáveis em termos das coordenadas polares, temos

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi}. \quad (1)$$

Notemos que as relações

$$z = r \cos \theta, \quad \rho = r \operatorname{sen} \theta$$

são análogas às relações entre as coordenadas cartesianas e polares no plano, somente, agora, com  $z$  e  $\rho$  desempenhando, respectivamente, os papéis de  $x$  e  $y$ . Portanto, usando novamente a expressão do laplaciano em coordenadas polares, podemos escrever

$$u_{zz} + u_{\rho\rho} = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}. \quad (2)$$

Somando  $u_{zz}$  a ambos os lados em (1), temos

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_{\rho\rho} + u_{zz} + \frac{1}{\rho} u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi}$$

e, usando (2),

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{\rho} u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi}. \quad (3)$$

Precisamos expressar  $u_{\rho}$  em coordenadas esféricas. Pela Regra da Cadeia,

$$u_{\rho} = u_r r_{\rho} + u_{\theta} \theta_{\rho} + u_{\varphi} \varphi_{\rho}.$$

Em (1), estávamos mantendo  $z$  fixo e tomando  $\rho$  e  $\varphi$  como variáveis independentes, de modo que  $\varphi_{\rho} = 0$ . Portanto,

$$u_{\rho} = u_r r_{\rho} + u_{\theta} \theta_{\rho}. \quad (4)$$

De

$$\theta = \arctan\left(\frac{\rho}{z}\right)$$

segue que

$$\theta_\rho = \frac{1}{1 + \left(\frac{\rho}{z}\right)^2} \frac{1}{z} = \frac{z}{z^2 + \rho^2} = \frac{z}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r}. \quad (5)$$

Por outro lado, de

$$r = \frac{\rho}{\text{sen } \theta} \quad (6)$$

segue que

$$r_\rho = \frac{\text{sen } \theta - \rho(\cos \theta)\theta_\rho}{\text{sen}^2 \theta}. \quad (7)$$

Usando (5) e (6) em (7), obtemos

$$r_\rho = \text{sen } \theta. \quad (8)$$

Substituindo (5) e (6) em (4), segue que

$$u_\rho = (\text{sen } \theta)u_r + \frac{\cos \theta}{r} u_\theta$$

e, portanto,

$$\frac{1}{\rho} u_\rho = \frac{1}{r} u_r + \frac{\cos \theta}{r^2 \text{sen } \theta} u_\theta. \quad (9)$$

Finalmente, substituindo (9) em (3), obtemos

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{\cot \theta}{r^2} u_\theta + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} u_{\varphi\varphi}, \quad (10)$$

que é a expressão do laplaciano em coordenadas esféricas.

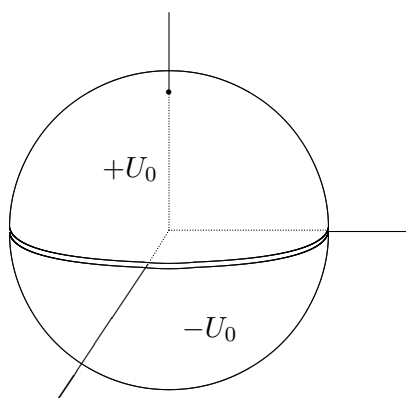
### Simetria Axial

Para simplificar, vamos considerar somente problemas com simetria axial, isto é, o caso em que a função  $u$  não depende de  $\varphi$ , dependendo apenas de  $r$  e  $\theta$ . Nesse caso, as derivadas em relação a  $\varphi$  se anulam e a expressão do laplaciano se simplifica um pouco,

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \text{sen } \theta} (\text{sen } \theta u_\theta)_\theta = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{\cot \theta}{r^2} u_\theta. \quad (11)$$

O exemplo a seguir mostra que essa situação particular é de interesse, pois corresponde a um problema fisicamente relevante.

**Exemplo.** Dois hemisférios de raio  $a$  condutores de eletricidade e isolados pelo equador são carregados até atingirem os potenciais  $+U_0$  e  $-U_0$ , respectivamente. Determinar o potencial:



(a) Na região interior à esfera;

(b) Na região exterior à esfera.

**Solução:** Note que as cargas elétricas se distribuirão de maneira não uniforme nos hemisférios. Por exemplo, haverá mais carga na região próxima ao equador, devido à atração entre as cargas positivas e negativas. Mas, depois de atingir o equilíbrio, não haverá mais corrente e, portanto, cada um dos hemisférios ficará a um potencial constante.

(a) **Na região interior.** No interior da esfera o potencial  $u$  é solução do problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{para } 0 < r < a \\ u(a, \theta) = \begin{cases} U_0 & , \text{ se } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ -U_0 & , \text{ se } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \end{cases} \end{cases}$$

O potencial na esfera não depende de  $\varphi$ , devido à simetria da esfera em relação ao eixo  $z$ . Portanto, em todo o espaço  $\mathbb{R}^3$  também vai depender de  $\varphi$ , isto é, a solução  $u$  vai depender apenas de  $r$  e  $\theta$ . Temos, portanto, para  $u = u(r, \theta)$ , o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{\cot \theta}{r^2} u_\theta = 0, & (0 < r < a) \\ u(a, \theta) = \begin{cases} U_0 & , \text{ se } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ -U_0 & , \text{ se } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \end{cases} \end{cases}$$

Resolvendo por separação de variáveis, começamos procurando uma função da forma  $u(r, \theta) = F(r)G(\theta)$ . Substituindo na equação diferencial, obtemos

$$F''(r)G(\theta) + \frac{2}{r}F'(r)G(\theta) + \frac{1}{r^2}F(r)G''(\theta) + \frac{\cot \theta}{r^2}F(r)G'(\theta) = 0.$$

Multiplicando por  $r^2$  e dividindo por  $F(r)G(\theta)$ , separamos as variáveis

$$\frac{r^2 F''(r) + 2r F'(r)}{F(r)} = -\frac{G''(\theta) + (\cot \theta) G'(\theta)}{G(\theta)} = \lambda.$$

Seguem daí as duas equações diferenciais independentes

$$r^2 F''(r) + 2r F'(r) - \lambda F(r) = 0 \quad \text{e} \quad G''(\theta) + (\cot \theta) G'(\theta) + \lambda G(\theta) = 0. \quad (12)$$

Apesar de mais complicada, vamos começar resolvendo a segunda equação.

Este é um problema clássico, para o qual existe um método também clássico de resolução. Ele consiste em fazer a mudança de variável  $\mu = \cos \theta$ .

$$\begin{aligned} G'(\theta) &= \frac{dG}{d\theta} = \frac{dG}{d\mu} \frac{d\mu}{d\theta} = -\operatorname{sen} \theta \frac{dG}{d\mu} \\ G''(\theta) &= \frac{d^2 G}{d\theta^2} = -\cos \theta \frac{dG}{d\mu} + \operatorname{sen}^2 \theta \frac{d^2 G}{d\mu^2} \end{aligned}$$

Substituindo na equação diferencial obtemos

$$(1 - \cos^2 \theta) \frac{d^2 G}{d\mu^2} - 2\mu \frac{dG}{d\mu} + \lambda G = 0,$$

isto é,

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2 G}{d\mu^2} - 2\mu \frac{dG}{d\mu} + \lambda G = 0, \quad (13)$$

que é a já estudada **equação de Legendre**. Como a variação de  $\theta$  é no intervalo  $0 \leq \theta \leq \pi$ , segue que  $\mu = \cos \theta$  varia no intervalo  $-1 \leq \mu \leq 1$ . Mas só nos servem soluções da equação de Legendre que sejam limitadas no intervalo  $[-1, 1]$ , soluções que sejam definidas e finitas inclusive para  $\mu = \pm 1$ . Como vimos, isto só acontece para

$$\lambda_n = n(n+1), \quad G_n = C_n P_n(\mu) = C_n P_n(\cos \theta). \quad (14)$$

Substituindo este valor de  $\lambda$  na outra equação, obtemos a equação de Euler–Cauchy

$$r^2 F''(r) + 2r F'(r) - n(n+1)F(r) = 0,$$

cuja solução geral é

$$F_n(r) = A r^n + B r^{-n-1}, \quad (15)$$

pois  $m_1 = n$  e  $m_2 = -n - 1$  são as soluções da equação  $m(m-1) + 2m - n(n+1) = 0$ .

Os cálculos que fizemos até aqui são válidos tanto para a região interior quanto exterior à esfera. Seriam válidos também para a região entre duas esferas centradas na origem.

**Conclusão:** Procurando pelo método de separação de variáveis, as funções da forma

$$u(r, \theta) = F(r) G(\theta) \quad (16)$$

satisfazendo a equação de Laplace  $\Delta u = 0$ , encontramos para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$F_n(r) = A r^n + B r^{-n-1} \quad \text{e} \quad G_n(\theta) = C_n P_n(\cos \theta). \quad (17)$$

Neste ponto vamos começar a tratar especificamente o problema de Dirichlet para a região interior à esfera. Estamos procurando soluções definidas inclusive na origem, onde  $r = 0$ . Logo,  $B = 0$ , pois  $r^{-n-1}$  se torna infinita na origem. Assim,

$$F_n(r) = A_n r^n. \quad (18)$$

e, então,

$$u_n(r, \theta) = A_n r^n P_n(\cos \theta). \quad (19)$$

Fazendo a superposição, temos

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta). \quad (20)$$

As condições de fronteira

$$u(a, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos \theta) = \begin{cases} U_0 & , \text{ se } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ -U_0 & , \text{ se } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \end{cases}$$

nos dizem que os  $A_n a^n$  são os coeficientes da expansão

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\mu) = f(\mu) = \begin{cases} U_0 & , \text{ se } 0 < \mu < 1 \\ -U_0 & , \text{ se } -1 < \mu < 0 \end{cases}$$

Sabemos que

$$A_n a^n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(\mu) P_n(\mu) d\mu.$$

A integral acima foi calculada na Seção 24, equação (35), nos complementos de leitura opcional,

$$A_{2n} = 0 \quad \text{e} \quad A_{2n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n) \cdot (2n+2)} \cdot \frac{(-1)^n (4n+3)}{a^{2n+1}} U_0, \quad \forall n \geq 1,$$

$$A_1 = \frac{3}{2a} \int_{-1}^1 f(\mu) P_1(\mu) d\mu = 3 \int_0^1 \mu U_0 d\mu = \frac{3}{2a} U_0.$$

Quem não leu a parte opcional da Seção 24, pode calcular os primeiros coeficientes  $A_{2n+1}$ , a partir de uma tabela contendo os primeiros polinômios de Legendre, conforme calculados na Seção 24. Fazendo assim, não vamos obter o coeficiente genérico como na expressão (21) abaixo, mas podemos calcular um número qualquer de termos da expansão.

Na região interior à esfera,  $r < 1$ ,

$$u(r, \theta) = \frac{3U_0 r \cos \theta}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} U_0 (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(n+1)! 2^{n+1}} \cdot \frac{(4n+3) r^{2n+1}}{a^{2n+1}} P_{2n+1}(\cos \theta). \quad (21)$$

**(b) Na região exterior.**

Passamos agora a considerar o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{\cot \theta}{r^2} u_{\theta} = 0, & (a < r < \infty) \\ u(a, \theta) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ -1 & , \text{ se } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \end{cases} \\ \lim_{r \rightarrow \infty} u(r, \theta) = 0 \end{cases}$$

A solução é igual ao anterior, exceto que agora, para

$$F(r) = A r^n + \frac{B}{r^{n+1}}$$

a condição  $\lim_{r \rightarrow \infty} F(r) = 0$  nos dá  $A = 0$ , isto é, em vez de (18) agora temos

$$F(r) = \frac{B}{r^{n+1}}. \quad (22)$$

A solução, então é,

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta), \quad (a < r < \infty). \quad (23)$$

Como acima, obtemos

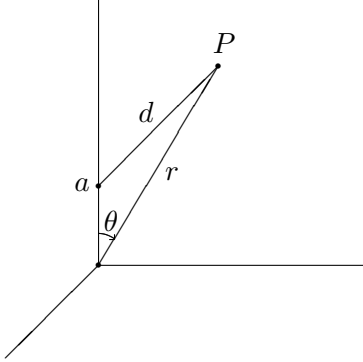
$$B_{2n} = 0, \quad \frac{B_{2n+1}}{a^{2n+2}} = U_0 \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n) \cdot (2n+2)} (-1)^n (4n+3), \quad \forall n \geq 1 \quad \text{e} \quad \frac{B_1}{a^2} = \frac{3}{2} U_0.$$

Logo, na região exterior à esfera,  $a < r < \infty$ ,

$$u(r, \theta) = \frac{3U_0}{2} \frac{a^2 \cos \theta}{r^2} + \sum_{n=1}^{\infty} U_0 (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(n+1)! 2^{n+1}} (4n+3) \frac{a^{2n+2} P_{2n+1}(\cos \theta)}{r^{2n+2}} \quad (24)$$

## Potencial Gerado por uma Carga Pontual

Continuando com o material de leitura opcional, vamos dar uma aplicação concreta da função geradora dos polinômios de Legendre. Consideremos uma carga  $q$  no ponto  $(0, 0, a)$ . Na figura temos



$$d^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta.$$

O potencial  $u$  no ponto  $P$ , gerado pela carga  $q$ , vale

$$u = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 - 2ar \cos \theta + r^2}}. \quad (25)$$

Na região  $r < a$ , colocando  $r^2$  em evidência dentro da raiz quadrada e retirando para fora como  $r$ , temos

$$u = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a \sqrt{1 - 2 \left(\frac{r}{a}\right) \cos \theta + \left(\frac{r}{a}\right)^2}}. \quad (26)$$

Lembremos que a função geradora dos polinômios de Legendre é

$$G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n. \quad (27)$$

Em (27), substituindo  $x$  por  $\cos \theta$ ,  $t$  por  $\frac{r}{a}$  e aplicando o resultado obtido em (26), obtemos

$$u = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \frac{r^n}{a^{n+1}}, \quad \text{se } 0 < r < a. \quad (28)$$

Note que o que faz com que a série (28) convirja é o fato que  $\frac{a}{r} < 1$ .

Na região  $r > a$  (longe da origem), dentro da raiz em (25) devemos colocar em evidência  $r$  e não  $a$ , como feito acima. Fazendo isso, em vez de (26), obtemos vale

$$u = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r \sqrt{1 - 2 \left(\frac{a}{r}\right) \cos \theta + \left(\frac{a}{r}\right)^2}}.$$

e, usando a função geradora,

$$u = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \frac{a^n}{r^{n+1}}, \quad \text{se } r > a. \quad (29)$$

Note que o que faz com que a série (29) convirja é que  $\frac{a}{r} < 1$ , na região  $r > a$ .

Reunindo (28) e (29), temos

$$u = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \frac{r^n}{a^{n+1}}, & \text{se } 0 < r < a \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \frac{a^n}{r^{n+1}}, & \text{se } a < r < \infty \end{cases} \quad (30)$$

## Potencial do Dipolo

Suponhamos que temos uma carga  $q$  no ponto  $(0, 0, a)$  e uma carga  $-q$  no ponto  $(0, 0, -a)$ . O potencial gerado pelo dipolo é a soma dos potenciais gerado por cada uma das cargas individualmente. Usando (29), o potencial longe do dipolo será dado por

$$u = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta) \frac{a^n - (-a)^n}{r^{n+1}} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}(\cos\theta) \frac{a^{2n+1}}{r^{2n+2}}. \quad (31)$$

Bem afastado do dipolo, para  $r \gg a$ , a razão  $\frac{a}{r}$  é muito próxima de 0 e conseqüentemente suas potências

$$\frac{a^{2n+1}}{r^{2n+2}} = \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1}$$

são muito pequenas. A expressão exata do potencial do dipolo é (31), mas só o primeiro termo da série já dá uma boa aproximação para  $r \gg a$

$$u \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a \cos\theta}{r^2},$$

ou,

$$u \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{m \cos\theta}{r^2},$$

onde  $m = 2aq$  é chamado de momento do dipolo. Esta última aproximação é bastante usada em Física.